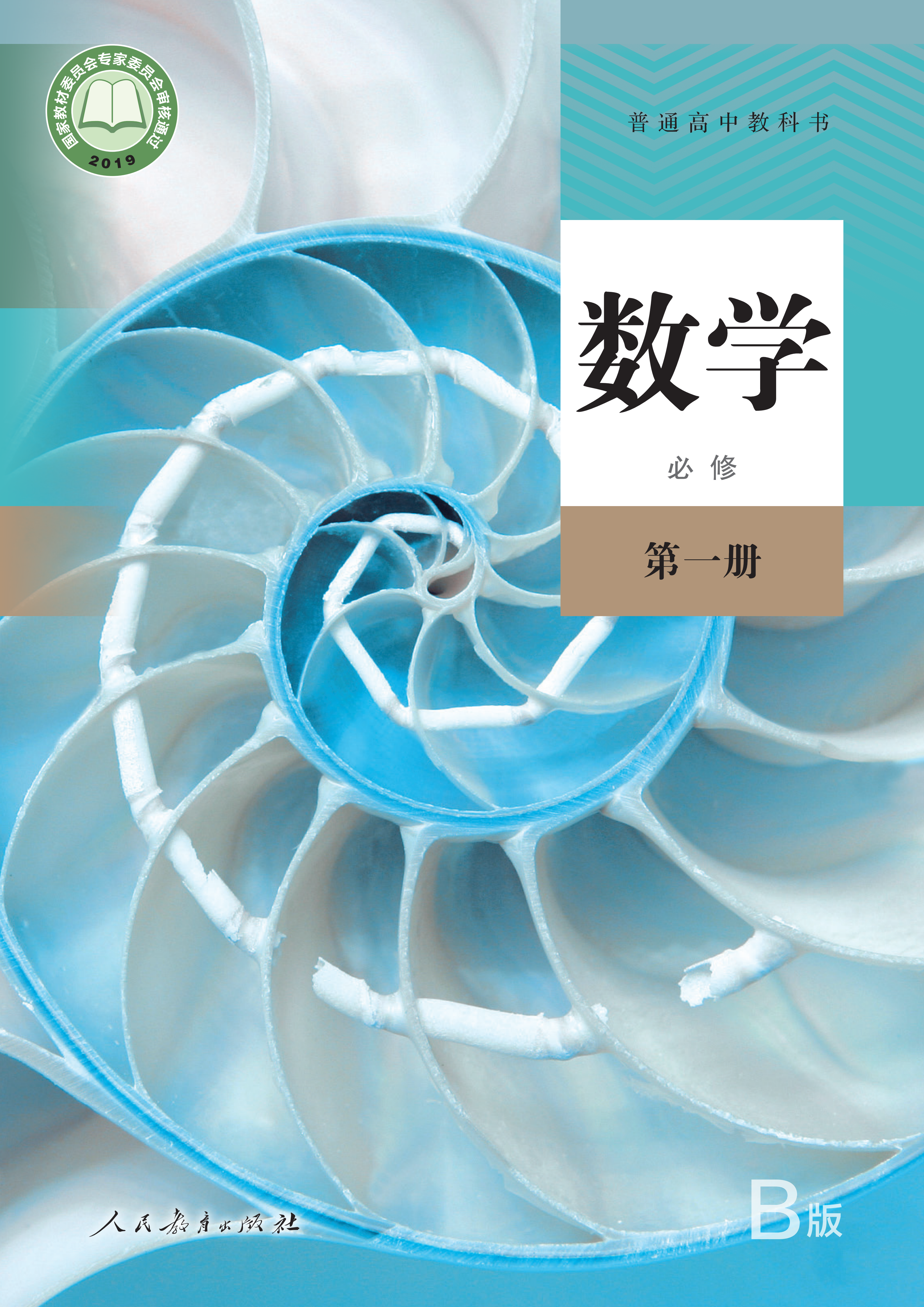


国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学

必修

第一册

B版

人民教育出版社

人民教育出版社

普 通 高 中 教 科 书

数学

必　修

第一册

人民教育出版社　课程教材研究所
中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组　编著

人民教育出版社
·北京·

B版

人民教育出版社

主　　编：高存明
副 主 编：王殿军　朱志勇　龙正武
本册主编：张　鹤　李建才
其他编者：韩小利　邵文武　吴中才　张晓东　李劲松　米大毅

普通高中教科书　数学（B 版）　必修　第一册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

出　　版　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn

前　言

人们喜欢音乐，是因为它拥有优美和谐的旋律；人们喜欢美术，是因为它描绘了人和自然的美；人们喜欢数学，是因为它用空间形式和数量关系刻画了自然界和人类社会的内在规律，用简洁、优美的公式与定理揭示了世界的本质，用严谨的语言和逻辑梳理了人们的思维……

我国著名数学家华罗庚先生曾经指出：数学是一切科学的得力助手和工具；任何一门科学缺少了数学这一工具便不能确切地刻画出客观事物变化的状态，更不能从已知数据推出未知的数据来，因而就减少了科学预见的可能性，或者减弱了科学预见的准确度.

事实上，任何一项现代科学技术的出现与发展，背后都一定有数学知识的支撑. 互联网的普及、共享经济的繁荣、网络支付的便利、物联网的兴起、人工智能的发展、大数据的应用，离开了数学知识都是不可能的！并且，现代生活中，类似“逻辑”“函数”“命题”“线性增长”“指数增长”“概率”“相关性”等数学术语，在政府文件、新闻报道中比比皆是.

正如《普通高中数学课程标准（2017 年版）》（以下简称“课程标准”）所指出的：数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程中发挥着不可替代的作用. 数学素养是现代社会每一个人应该具备的基本素养. 高中生学习必需的数学知识，能为自身的可持续发展和终身学习奠定基础.

为了帮助广大高中生更好地学习相关数学知识，我们按照课程标准的要求编写了这套高中数学教材. 在编写过程中，我们着重做了以下几项工作.

1. 关注学生成长，体现时代特征

教材在选取内容的背景素材时，力图从学生熟悉的情境出发，着力体现时代特征，并为学生的成长提供支撑. 例如，以下内容在本套教材中都有所体现：利用数学知识破解魔术的“秘密”，用生活中的例子说明学习逻辑知识以及理性思考的重要性，从数学角度理解报刊上有关人工智能、新兴媒体等报道中出现的“线性增长”“爆炸式增长”等名词.

教材中还提到了“网络搜索”“人工智能”“环境保护”“大数据”“按揭贷款”“电子商务”“创业创新”等. 我们相信，这些能引起大家的共鸣.

此外，教材中多处出现了借助现代信息技术学习数学知识的内容，包括怎样借助数学软件解方程、不等式，怎样借助信息技术呈现统计结果、展示模拟过程，等等.

在体现时代特征的同时，我们也特别注重对中华优秀传统文化的展示. 例如，教材中精选了多道我国古代数学名题，启发大家从数学角度去理解“失败乃成功之母”“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”等语句的含义，呈现了与二十四节气、古典诗词等有关的调查数据，介绍了《九章算术》在代数上的成就以及我国古代的统计工作，等等.

2. 吸收先进理念，改变呈现方式

在教材编写过程中，编者认真学习和讨论了当前教育学、心理学等学科的先进理念，并通过改变教材呈现方式来加以体现，力图真正做到“以学习者为中心”.

例如，教材每一章都引用了一段名人名言，旨在为大家的数学学习提供参考和指引；通过“情境与问题”栏目，展示相关数学知识在现实生活等情境中的应用；利用“尝试与发现”栏目，鼓励大家大胆尝试，并在此基础上进行猜想、归纳与总结；通过填空的方式，培养大家学习数学的信心；选择与内容紧密联系的专题，设置拓展阅读，以拓宽大家的知识面，了解数学应用的广泛性；等等.

3. 遵循认知规律，力求温故知新

数学学习必须循序渐进是一种共识. 基础不扎实是很多人学不好数学的重要原因，本套教材在编写时特别考虑了这一点.

事实上，教材一方面按照课程标准的要求，讲解和复习了高中数学必备的集合、等式、不等式等内容；另一方面，在呈现新知识时，教材注重从已有知识出发，在回顾的基础上通过实际例子逐步引入，尽力展现新旧知识的联系，以达到温故知新的效果.

例如，教材在复习了变量以及初中函数概念的基础上介绍了函数中的对应关系，在回顾了整数指数幂、二次根式后引入了分数指数幂，等等.

正因为如此，即使是初中数学基础比较薄弱的同学，使用本套教材也能顺利地进行学习，并最终达到理想的效果. 这在本套教材试教过程中已得到印证.

4. 揭示内容本质，重视直观理解

数学知识具有客观性，但数学知识的理解有多种方式与途径. 揭示内容本质，培养大家对数学内容的直观理解，是我们编写本套教材时特别注意的方面之一.

首先，教材内容的安排突出主线，强调“通性通法”. 例如，多次强调了配方法的使用，自始至终贯彻函数的研究应从特殊到一般、从性质到图象，等等.

其次，尽量自然地引入新内容或新方法. 例如，通过实例说明学习中位数、百分位数的必要性，通过对比说明用样本估计总体的合理性，等等.

最后，注重培养大家的数学学科核心素养. 课程标准提出的数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析，在教材中都得到了落实. 仅以数学抽象为例，教材处处强调了自然语言与符号语言之间的相互转化等.

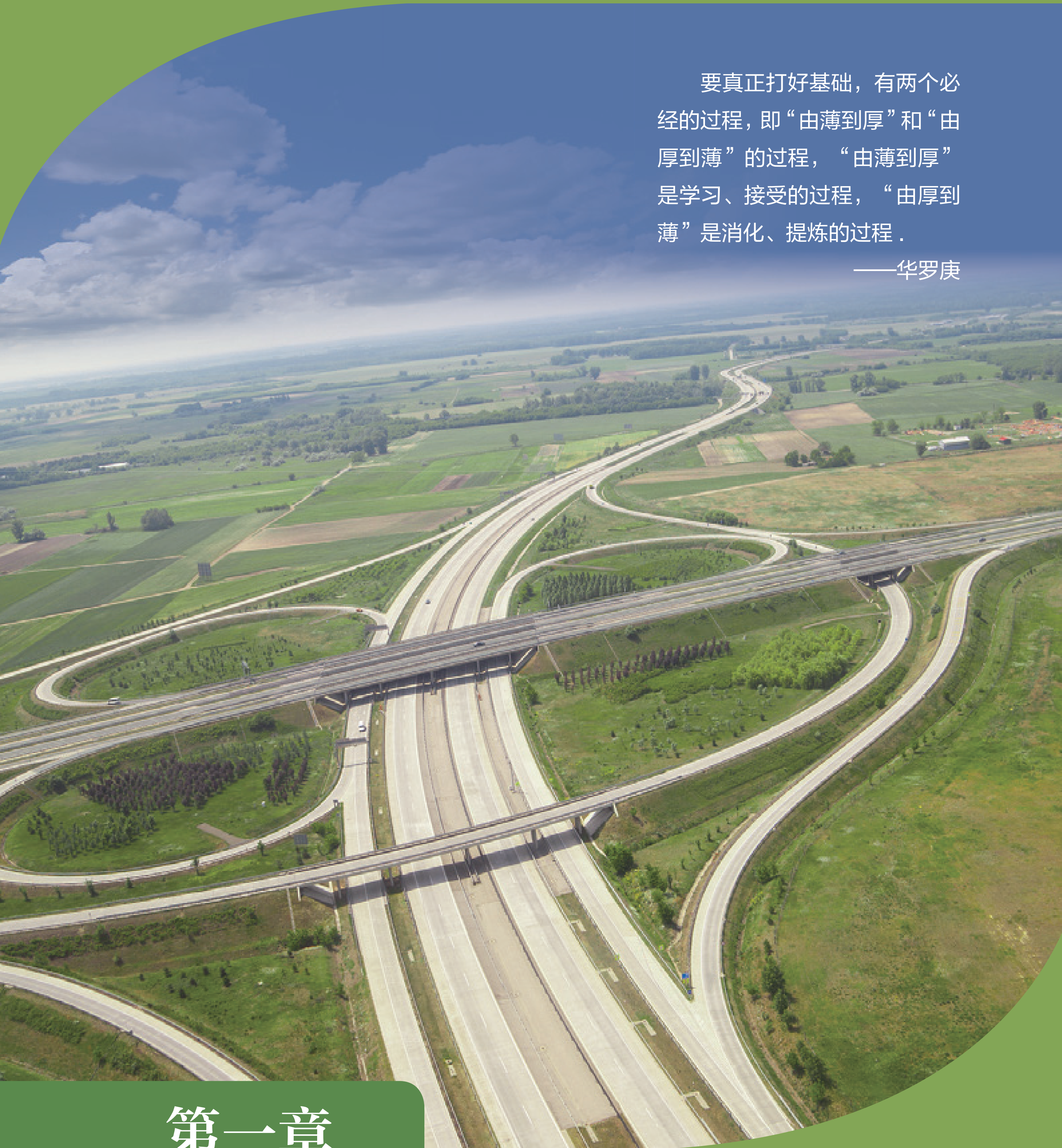
总的来说，“引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界”并不容易. 为此，我们在编写教材时做了很多新的尝试，力图给大家提供一套有时代特色、易教易学的数学教材，以帮助大家学习.

本书是这套教材必修部分的第一册，呈现了集合与常用逻辑用语、等式与不等式、函数的内容. 这些内容是高中数学乃至高等数学的基础，希望大家重视. 通过本书的目录与每章的“本章导语”，可以大致了解本书的全貌，这里不再重复.

由于编写时间有限等原因，书中难免会有疏漏之处，敬请大家多提宝贵意见，以使教材日臻完善.

目录

本书拓展阅读目录



要真正打好基础，有两个必经的过程，即“由薄到厚”和“由厚到薄”的过程，“由薄到厚”是学习、接受的过程，“由厚到薄”是消化、提炼的过程．

——华罗庚

第一章

集合与常用逻辑用语

本章导语

你见过下面这个魔术吗?

先从图 1 中六张不同的扑克牌中选出一张，不要告诉任何人你选的是什么，自己记住即可.

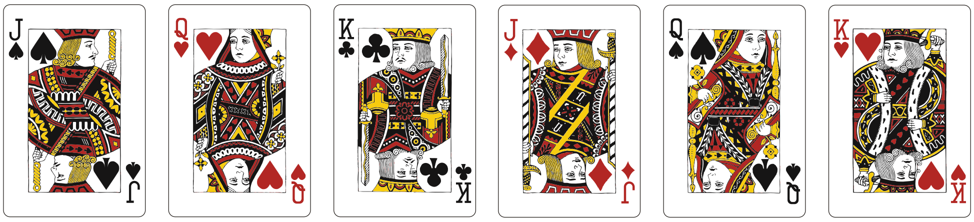


图 1

闭上眼睛，用十秒左右的时间回忆刚才选中的那张牌的花色和点数. 然后睁开眼睛，看！你所选择的那张牌在图 2 中已经消失了！怎么样？神奇吗?

图 2

想知道其中的“秘密”吗？学完集合的有关知识后，你就能清楚地看出其中的“门道”了！

事实上，集合是刻画一类事物的语言与工具，是一种重要的数学语言. 利用集合可以简洁、准确地描述数学中的对象与关系.

常用逻辑用语也是数学语言的重要组成部分，是逻辑思维的基本语言，是数学表达与交流的工具. 而且，逻辑知识已经是我们日常生活中不可或缺的知识了.

2013 年 7 月 4 日《人民日报》刊登的《培养理性思维 需要学点逻辑》一文中谈道：“只有学逻辑、懂逻辑，才能既自觉地遵循逻辑，又自觉地识别并避免逻辑错误，使自己的思维更加理性.” 由此可见学习逻辑知识的重要性.

1.1 集合

1.1.1 集合及其表示方法

1. 集合

情境与问题

在生活与学习中，为了方便，我们经常要对事物进行分类. 例如，图书馆中的书是按照所属学科等分类摆放的（如图 1-1-1 所示），作文学习可按照文体如记叙文、议论文等进行，整数可以分成正整数、负整数和零这三类……

你能说出数学中其他分类实例吗？试着分析为什么要进行分类.

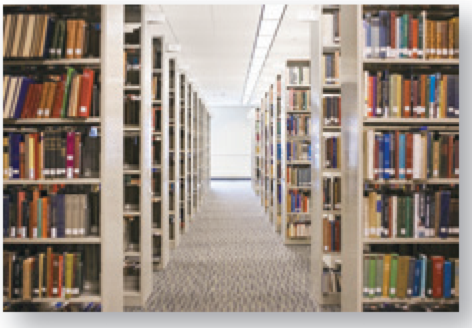


图 1-1-1

在数学中，我们经常用“集合”来对所研究的对象进行分类. 把一些能够确定的、不同的对象汇集在一起，就说由这些对象组成一个**集合**（有时简称为**集**），组成集合的每个对象都是这个集合的**元素**.

集合通常用英文大写字母 A，B，C，…表示，集合的元素通常用英文小写字母 a，b，c，…表示.

如果 a 是集合 A 的元素，就记作

$$a \in A,$$

读作“a 属于 A”；如果 a 不是集合 A 的元素，就记作

$$a \notin A,$$

读作“a 不属于 A”.

想一想

是否可以借助袋子、抽屉等来直观地理解集合？

尝试与发现

你能举出几个用集合表达的、与数学有关的例子吗？指出例子中集合的元素是什么.

例如：

（1）如果 A 是由所有小于 10 的自然数组成的集合，则 $0\in A$，$0.5\notin A$；

（2）如果 B 是由方程 $x^2=1$ 的所有解组成的集合，则 -1 **1** ______ B，0 **2** ______ B，1 **3** ______ B；

（3）如果 C 是平面上与定点 O 的距离等于定长 r（$r>0$）的点组成的集合，则对于以 O 为圆心、r 为半径的圆 O 上的每个点 P 来说，都有 $P\in C$.

现在我们来考虑方程 $x+1=x+2$ 的所有解组成的集合，由于该方程无解，因此这个集合不含有任何元素.

一般地，我们把不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$.

由空集的定义可得，0 **4** ______ $\varnothing$，1 **5** ______ $\varnothing$.

根据集合的概念可知，集合的元素具有以下特点：

（1）确定性：集合的元素必须是确定的.

因此，不能确定的对象不能组成集合，即给定一个集合，任何对象是不是这个集合的元素，应该可以明确地判断出来.

（2）互异性：对于一个给定的集合，集合中的元素一定是不同的.

因此，集合中的任意两个元素必须都是不同的对象，相同的对象归入同一个集合时只能算作集合中的一个元素. 例如，由英语单词 success（成功）中的所有英文字母组成的集合，包含的元素只有 4 个，即 s，u，c，e.

（3）无序性：集合中的元素可以任意排列.

尝试与发现

（1）你所在的班级中，身高不低于 175 cm 的同学能组成一个集合吗？

（2）你所在的班级中，高个子同学能组成一个集合吗？为什么？

（3）不等式 $x-2>1$ 的所有解能组成一个集合吗？

尝试与发现中，（1）（3）的答案都是“能”，但（2）的答案是“不能”，因为“高个子同学”不满足确定性.

给定两个集合 A 和 B，如果组成它们的元素完全相同，就称这两个集合**相等**，记作 $A=B$.

集合可以根据它含有的元素个数分为两类：含有有限个元素的集合称为**有限集**，含有无限个元素的集合称为**无限集**. 空集可以看成包含 0 个元素的集合，所以空集是有限集.

2. 几种常见的数集

有一些数的集合经常要用到，为了方便起见，人们用约定俗成的符号来

表示它们.

(1) 所有非负整数组成的集合，称为**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$.

值得注意的是，$0\in\mathbf{N}$，即 0 是自然数集 $\mathbf{N}$ 中的一个元素.

容易看出，如果 $a\in\mathbf{N}$，$b\in\mathbf{N}$，则一定有 $a+b\in\mathbf{N}$ 且 $ab\in\mathbf{N}$，但 $a-b\in\mathbf{N}$ 和 $\frac{a}{b}\in\mathbf{N}$ 都不一定成立. 例如，$1\in\mathbf{N}$，$3\in\mathbf{N}$，但

$$1-3=-2\notin\mathbf{N}\ \text{且}\ \frac{1}{3}\notin\mathbf{N}.$$

在自然数集 $\mathbf{N}$ 中，去掉元素 0 之后的集合，称为**正整数集**，记作 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$.

(2) 所有整数组成的集合，称为**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$.

与自然数集 $\mathbf{N}$ 不同的是，如果 $a\in\mathbf{Z}$，$b\in\mathbf{Z}$，则一定有 $a-b\in\mathbf{Z}$，但 $\frac{a}{b}\in\mathbf{Z}$ 不一定成立（请读者自己举例说明）.

(3) 所有有理数组成的集合，称为**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$.

我们知道，凡是能够表示成分数（即两个整数的商）的数称为有理数. 因此，如果 $a\in\mathbf{Q}$，$b\in\mathbf{Q}$ 且 $b\neq 0$，则 $\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}$. 例如，$3\in\mathbf{Q}$，$\frac{1}{2}\in\mathbf{Q}$，且 $\frac{3}{\frac{1}{2}}=6\in\mathbf{Q}$.

> **想一想**
>
> (1) 无限循环小数 $1.\dot{6}$ 可以表示成分数吗?
>
> (2) 任何一个无限循环小数都是 $\mathbf{Q}$ 中的元素，这种说法正确吗?

(4) 所有实数组成的集合，称为**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

显然，如果 $a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$，则

$$a+b\ \boxed{6}\_\_\_\ \mathbf{R},\quad a-b\ \boxed{7}\_\_\_\ \mathbf{R},\quad ab\ \boxed{8}\_\_\_\ \mathbf{R},$$

当 $b\neq 0$ 时，还有 $\frac{a}{b}\in\mathbf{R}$.

如不特别声明，本书中所有字母表示的数均指实数.

利用集合的符号，可以简化有关描述，比如：

“0 是整数”可以表示为“$0\in\mathbf{Z}$”；

“π 不是有理数”可以表示为“$\pi\notin\mathbf{Q}$”；

“如果 n 是自然数，那么 $n+1$ 也是自然数”可以表示为“如果 $n\in\mathbf{N}$，那么 $n+1\in\mathbf{N}$”.

3. 列举法

前面提到的集合都是用自然语言描述的，但在数学中，我们经常要使用符号来表示集合.

把集合中的元素一一列举出来（相邻元素之间用逗号分隔），并写在大括号内，以此来表示集合的方法称为列举法.

例如，由两个元素 0，1 组成的集合可用列举法表示为

$$\{0,\ 1\};$$

又如，24 的所有正因数 1，2，3，4，6，8，12，24 组成的集合可用列举法表示为

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\};$$

再如，中国古典长篇小说四大名著组成的集合可以表示为

{《红楼梦》，《三国演义》，《水浒传》，《西游记》}.

用列举法表示集合时，一般不考虑元素的顺序. 例如，$\{1,\ 2\}$ 与 $\{2,\ 1\}$ 表示同一个集合. 但是，如果一个集合的元素较多，且能够按照一定的规律排列，那么在不至于发生误解的情况下，可按照规律列出几个元素作为代表，其他元素用省略号表示. 例如，不大于 100 的自然数组成的集合，可表示为

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100\}.$$

无限集有时也可用列举法表示. 例如，自然数集 **N** 可表示为

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}.$$

值得注意的是，只含一个元素的集合 $\{a\}$ 也是一个集合，要将这个集合与它的元素 a 加以区别，事实上，

$$a\in\{a\}.$$

4. 描述法

尝试与发现

以下集合用列举法表示方便吗？如果不方便，你觉得可以怎样表示？

（1）满足 $x>3$ 的所有实数组成的集合 A；

（2）所有有理数组成的集合 **Q**.

显然，用列举法表示上述集合并不方便. 但因为集合 A 中的元素 x 都具有性质“x 是大于 3 的实数”，而不属于集合 A 的元素都不具有这个性质，所以可以把集合 A 表示为

$$\{x\mid x\text{ 是大于 3 的实数}\}\text{ 或 }\{x\mid x>3\},$$

即 $A=\{x\mid x\text{ 是大于 3 的实数}\}$ 或 $A=\{x\mid x>3\}$.

类似地，**Q** 中的每一个元素都具有性质“是两个整数的商”，而不属于

人民教育出版社

$\mathbf{Q}$ 的元素都不具有这个性质，因此可以把 $\mathbf{Q}$ 表示为

$$\mathbf{Q}=\{x \mid x \text{ 是两个整数的商}\} \text{ 或 } \mathbf{Q}=\left\{x \middle| x=\frac{m}{n}, m\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{Z}, n\neq 0\right\}.$$

上述表示集合的方法中，大括号内竖线的左边是元素的形式，竖线的右边是只有这个集合中的元素才满足的性质.

一般地，如果属于集合 A 的任意一个元素 x 都具有性质 $p(x)$，而不属于集合 A 的元素都不具有这个性质，则性质 $p(x)$ 称为集合 A 的一个**特征性质**. 此时，集合 A 可以用它的特征性质 $p(x)$ 表示为

$$\{x \mid p(x)\}.$$

这种表示集合的方法，称为**特征性质描述法**，简称为**描述法**.

例如，“一组对边平行且相等的四边形”是平行四边形的一个特征性质，因此所有平行四边形组成的集合可以表示为

$$\{x \mid x \text{ 是一组对边平行且相等的四边形}\}.$$

又如，所有能被 3 整除的整数组成的集合，可以用描述法表示为

$$\{x \mid x=3n, n\in\mathbf{Z}\}.$$

类似地，所有被 3 除余 1 的自然数组成的集合可以表示为

$$\{x \mid x=3n+1, n\in\mathbf{N}\},$$

不过这一集合通常也表示为

$$\{x\in\mathbf{N} \mid x=3n+1, n\in\mathbf{Z}\}.$$

这就是说，集合 $\{x \mid p(x)\}$ 中所有在另一个集合 I 中的元素组成的集合，可以表示为

$$\{x\in I \mid p(x)\}.$$

例 1 用适当的方法表示下列集合：

(1) 方程 $x(x-1)=0$ 的所有解组成的集合 A；

(2) 平面直角坐标系中，第一象限内所有点组成的集合 B.

尝试与发现

判断 A 与 B 是有限集还是无限集，由此思考该选用哪种表示方法.

解 (1) 因为 0 和 1 是方程 $x(x-1)=0$ 的解，而且这个方程只有两个解，所以

$$A=\{0, 1\}.$$

(2) 因为集合 B 的特征性质是横坐标与纵坐标都大于零，因此

$$B=\{(x, y) \mid x>0, y>0\}.$$

5. 区间及其表示

习惯上，如果 $a<b$，则集合 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 可简写为 $[a, b]$，并称为**闭区间**．例如，集合 $\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$ 可简写为闭区间 $[1, 2]$．

类似地，如果 $a<b$：

集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 可简写为 (a, b)，并称为**开区间**；

集合 $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 可简写为 $[a, b)$，集合 $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 可简写为 $(a, b]$，并都称为**半开半闭区间**．

上述区间中，a，b 分别称为区间的左、右端点，$b-a$ 称为区间的长度．区间可以用数轴形象地表示．例如，区间 $[-2, 1)$ 可用图 1-1-2 表示，注意图中 -2 处的点是实心点，而 1 处的点是空心点．

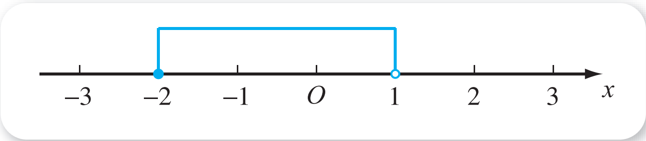


图 1-1-2

如果用“$+\infty$”表示“正无穷大”，用“$-\infty$”表示“负无穷大”，则：

实数集 **R** 可表示为区间 $(-\infty, +\infty)$；

集合 $\{x \mid x\geqslant a\}$ 可表示为区间 $[a, +\infty)$；

集合 $\{x \mid x>a\}$ 可表示为区间 9 ______；

集合 $\{x \mid x\leqslant a\}$ 可表示为区间 10 ______；

集合 $\{x \mid x<a\}$ 可表示为区间 11 ______．

类似地，上述区间也可用数轴来形象地表示．例如，区间 $[7, +\infty)$ 可以用图 1-1-3 表示．

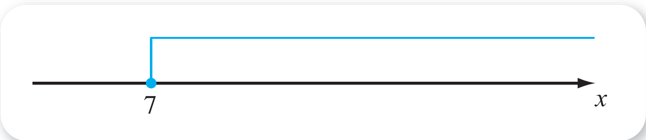


图 1-1-3

例 2 用区间表示不等式 $2x-\frac{1}{2}>x$ 的所有解组成的集合 A．

解 由 $2x-\frac{1}{2}>x$ 可知 $x>\frac{1}{2}$，所以 $A=\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$．

人民教育出版社

练习A

1. 用符号“∈”或“∉”填空：

(1) 2 ____ $\mathbf{N}$； (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ____ $\mathbf{Q}$； (3) $\frac{1}{3}$ ____ $\mathbf{Z}$；

(4) 3.14 ____ $\mathbf{R}$； (5) -3 ____ $\mathbf{N}$； (6) $\sqrt{9}$ ____ $\mathbf{Q}$.

2. 下列的集合中，哪些是有限集？哪些是无限集？

(1) 使得式子$\sqrt{x-2}$有意义的所有实数组成的集合；

(2) 使得式子$\sqrt{3-x}$有意义的所有自然数组成的集合；

(3) 方程 $x^2=-1$ 的所有实数解组成的集合.

3. 用列举法表示下列集合：

(1) 我国古代四大发明组成的集合；

(2) 大于 2 且小于 15 的所有素数组成的集合；

(3) $\{x \mid x^2=2\}$.

4. 用描述法表示下列集合：

(1) 小于 1 500 的正偶数组成的集合； (2) 所有矩形组成的集合.

5. 用区间表示下列集合：

(1) $\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$； (2) $\{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$； (3) $\{x \mid 2 \leqslant x < 5\}$；

(4) $\{x \mid 0 < x < 2\}$； (5) $\{x \mid x < 3\}$； (6) $\{x \mid x \geqslant 2\}$.

练习B

1. 用符号“∈”或“∉”填空：

(1) 0 ____ $\varnothing$； (2) -2 ____ $\{x \mid x^2<5\}$；

(3) $(2, 3)$ ____ $\{(x, y) \mid x+2y=3\}$； (4) 2 017 ____ $\{x \mid x=4n-1, n \in \mathbf{Z}\}$.

2. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 英语单词 mathematics（数学）中的所有英文字母组成的集合；

(2) 方程 $x+2y=7$ 的所有解组成的集合；

(3) 绝对值小于 0 的所有实数组成的集合.

3. 设区间 $A=(-2, 3]$，$B=[2, +\infty)$，是否有实数 x，使得 $x \in A$ 且 $x \in B$？举例说明.

4. 已知集合 $A=\{x-2, x+5, 12\}$ 且 $-3 \in A$，求 x 的值.

1 ∈ **2** ∉ **3** ∈ **4** ∉ **5** ∉ **6** ∈ **7** ∈ **8** ∈

9 $(a, +\infty)$ **10** $(-\infty, a]$ **11** $(-\infty, a)$

1.1.2 集合的基本关系

1. 子集

情境与问题

如果一个班级中，所有同学组成的集合记为 S，而所有女同学组成的集合记为 F，你觉得集合 S 和 F 之间有怎样的关系？你能从集合元素的角度分析它们的关系吗？

给定集合 $A=\{1, 3\}$，$B=\{1, 3, 5, 6\}$，容易看出，集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素.

一般地，如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 称为集合 B 的**子集**，记作

$$A \subseteq B \text{（或 } B \supseteq A\text{），}$$

读作“A 包含于 B”（或“B 包含 A”）.

对应地，如果 A 不是 B 的子集，则记作 $A \not\subseteq B$（或 $B \not\supseteq A$），读作“A 不包含于 B”（或“B 不包含 A”）.

上述情境与问题中的两个集合，满足 $F \subseteq S$.

想一想

符号“$\in$”与符号“$\subseteq$”表达的含义相同吗？

尝试与发现

（1）根据子集的定义判断，如果 $A=\{1, 2, 3\}$，那么 $A \subseteq A$ 吗？

（2）你认为可以规定空集 $\varnothing$ 是任意一个集合的子集吗？为什么？

不难看出，依据子集的定义，任意集合 A 都是它自身的子集，即 $A \subseteq A$.

因为空集不包含任何元素，所以我们规定：空集是任意一个集合 A 的子集，即 $\varnothing \subseteq A$.

2. 真子集

前面的情境与问题中的两个集合满足 $F \subseteq S$，但是，只要班级中有男同学，那么 S 中就有元素不属于 F.

一般地，如果集合 A 是集合 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属

人民教育出版社

于 A，那么集合 A 称为集合 B 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$（或 $B \supsetneqq A$），读作"A 真包含于 B"（或"B 真包含 A"）.

例如，分析集合 $A=\{1, 2\}$，$B=\{1, 2, 3, 4\}$之间的关系，可知 A 是 B 的子集（即 $A \subseteq B$），而 $3 \in B$ 且 $3 \notin A$，因此 A 是 B 的真子集，即 $A \subsetneqq B$.

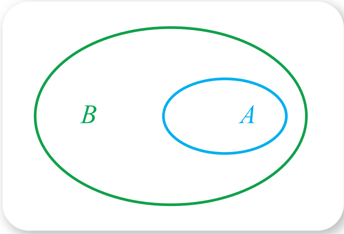


图 1-1-4

如果用平面上一条封闭曲线的内部来表示集合，那么我们就可作出示意图来形象地表示集合之间的关系，这种示意图通常称为**维恩图**. 例如，A 是 B 的真子集，可用图 1-1-4 表示.

根据子集、真子集的定义可知：

（1）对于集合 A，B，C，如果 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$；

（2）对于集合 A，B，C，如果 $A \subsetneqq B$，$B \subsetneqq C$，则 $A \subsetneqq C$.

想一想

如果要作出维恩图来理解子集与真子集的这些性质，该如何作？

例 1 写出集合 $A=\{6, 7, 8\}$ 的所有子集和真子集.

分析 如何才能一个不漏地写出这个集合的所有子集呢？注意到集合 A 含有 3 个元素，因此它的子集含有的元素个数为 0，1，2，3. 可依下列步骤来完成此题：

（1）写出元素个数为 0 的子集，即$\varnothing$；

（2）写出元素个数为 1 的子集，即 $\{6\}$，$\{7\}$，$\{8\}$；

（3）写出元素个数为 2 的子集，即 **1** ______________________；

（4）写出元素个数为 3 的子集，即 **2** ______________________.

解 集合 A 的所有子集是

$\varnothing$，$\{6\}$，$\{7\}$，$\{8\}$，$\{6, 7\}$，$\{6, 8\}$，$\{7, 8\}$，$\{6, 7, 8\}$.

在上述子集中，除去集合 A 本身，即 $\{6, 7, 8\}$，剩下的都是 A 的真子集.

例 2 已知区间 $A=(-\infty, 2]$ 和 $B=(-\infty, a)$，且 $B \subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

解 因为集合 B 的元素都是集合 A 的元素，所以可用数轴表示它们的关系，如图 1-1-5 所示.

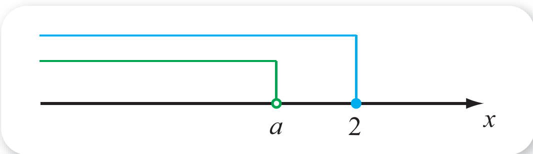


图 1-1-5

从而可知 $a \leqslant 2$.

拓展阅读

罗素悖论与第三次数学危机

某村的理发师宣布了这样一个原则：他为且只为村里所有不给自己刮胡子的人刮胡子．那么，这个理发师是否应该为自己刮胡子呢？如果理发师不为自己刮胡子，那么他是不给自己刮胡子的人，所以按照他的原则，他必须为自己刮胡子；反之，如果他为自己刮胡子，因为他只为不给自己刮胡子的人刮胡子，所以他不应该为自己刮胡子．

看完上面这段话后是不是觉得有些困惑？这是数学上有名的“理发师困境”，是著名数学家罗素于 20 世纪初提出的“罗素悖论”的简化版本．

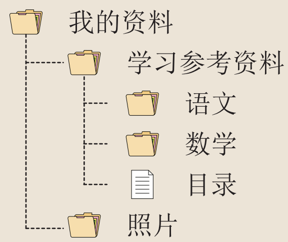
罗素悖论与集合论知识有关．

事实上，我们所学习的集合，也能以集合作为元素．例如，若记集合 $A=\{1,\ 2\}$ 的所有子集组成的新集合为 B，则

$$B=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\},$$

B 中的元素都是集合（B 一般称为类）．

以集合作为元素在直观上是容易理解的：如果把一个集合理解为一个袋子，元素理解为袋子里的东西，则以集合为元素的集合，就相当于袋子里的东西还是袋子．这也可以用电脑中的文件夹来理解，文件夹中可以是文件，也可以是文件夹，如图所示．



罗素认为，任何一个集合都可以考虑它是否属于自身的问题，有些集合属于它自身，有些集合不属于它自身．随后，罗素构造了集合 S：由所有不是自身元素的集合组成的集合．

问题是：S 是否属于 S？继续往下分析就会出现类似上述“理发师困境”的两难局面．

罗素悖论提出时，集合论的知识已经成为数学的基础．这一悖论的出现引发了人们对数学基础的质疑，从而导致了“第三次数学危机”．但是数学家们通过对集合论进行公理化成功地解决了这一危机，为了避免出现罗素悖论，公理中规定集合不能以它自身为元素．这跟我们的日常经验一致：一个袋子不能把自己装起来，一个文件夹也不能包括它自己．

感兴趣的同学，请自行查阅有关书籍和网络，了解悖论和第三次数学危机的更多内容吧！

3. 集合的相等与子集的关系

情境与问题

已知 $S=\{x \mid (x+1)(x+2)=0\}$，$T=\{-1,\ -2\}$，这两个集合的元素有什么关系？$S\subseteq T$ 吗？$T\subseteq S$ 吗？你能由此总结出集合的相等与子集的关系吗？

上述问题中，组成 S 的元素与组成 T 的元素完全相同，即 $S=T$；另外，由子集的定义可知

$$S\subseteq T \text{ 且 } T\subseteq S.$$

一般地，由集合相等以及子集的定义可知：

（1）如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$；

（2）如果 $A=B$，则 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

例 3 写出下列每对集合之间的关系：

（1）$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{1, 3, 5\}$；

（2）$C=\{x \mid x^2=1\}$，$D=\{x \mid |x|=1\}$；

（3）$E=(-\infty, 3)$，$F=(-1, 2]$；

（4）$G=\{x \mid x$ 是对角线相等且互相平分的四边形$\}$，$H=\{x \mid x$ 是有一个内角为直角的平行四边形$\}$.

分析 因为集合之间的关系是通过元素来定义的，所以只要针对集合中的元素进行分析即可.

解 （1）因为 B 的每个元素都属于 A，而 $4\in A$ 且 $4\notin B$，所以

$$B\subsetneqq A.$$

（2）不难看出，C 和 D 包含的元素都是 1 和 -1，所以

$$C=D.$$

（3）在数轴上表示出区间 E 和 F，如图 1-1-6 所示.

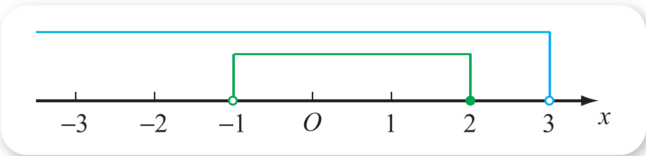


图 1-1-6

由图可知

$$F\subsetneqq E.$$

（4）如果 $x\in G$，则 x 是对角线相等且互相平分的四边形，所以 x 是矩形，从而可知 x 是有一个内角为直角的平行四边形，所以 $x\in H$，因此

$$G\subseteq H.$$

反之，如果 $x\in H$，则 x 是有一个内角为直角的平行四边形，所以 x 是矩形，从而可知 x 是对角线相等且互相平分的四边形，所以 $x\in G$，因此

$$H\subseteq G.$$

综上可知，$G=H$.

由上可以看出，当 A 是 B 的子集时，要么 A 是 B 的真子集，要么 A 与 B 相等.

探索与研究

填写下表，回答后面的问题：

集合	元素个数	所有子集	子集个数
$\{a\}$	1		
$\{a, b\}$	2		
$\{a, b, c\}$	3		
$\{a, b, c, d\}$	4		

（1）你能找出“元素个数”与“子集个数”之间关系的规律吗？

（2）如果一个集合的元素个数为 n，你能用 n 表示出这个集合的子集个数吗？

练习A

1. 用“$\in$”“$\notin$”“$\subsetneqq$”“$\supsetneqq$”或“$=$”填空：

（1）5 ______ $\{5\}$；　（2）$\{a, b, c\}$ ______ $\{a, c\}$；

（3）$\{1, 2, 3\}$ ______ $\{3, 2, 1\}$；　（4）$\varnothing$ ______ $\{0\}$.

2. 用“$\subsetneqq$”或“$\supsetneqq$”填空：

（1）$\mathbf{Z}$ ____ $\mathbf{N}$；　（2）$\mathbf{Z}$ ____ $\mathbf{Q}$；　（3）$\mathbf{Q}$ ____ $\mathbf{N}$；　（4）$\mathbf{R}$ ____ $\mathbf{Q}$.

3. 用“$\subsetneqq$”“$\supsetneqq$”或“$=$”填空：

（1）$[0, 2]$ ____ $(-1, 3)$；　（2）$[0, 5)$ ____ $(2, 3]$；

（3）$[-1, +\infty)$ ____ $[2, +\infty)$；　（4）$(-\infty, 2)$ ____ $\{x \mid x<2\}$.

练习B

1. 写出集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 的所有子集.
2. 用列举法表示集合 $A=\{x \mid x=3m-1, m\in\mathbf{N}\}$ 和 $B=\{x \mid x=3m+2, m\in\mathbf{N}\}$，并说明它们之间的关系.
3. 已知集合 A 满足 $\{1\}\subseteq A\subsetneqq\{1, 2, 3, 4\}$，用列举法写出所有可能的 A.
4. 已知 $[-1, +\infty)\supseteq[a, +\infty)$，求实数 a 的取值范围.
5. 已知 $A=\{x \mid x=2n, n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x \mid x=4n, n\in\mathbf{N}\}$. 分别列出这两个集合中最小的 3 个元素，并证明 $B\subsetneqq A$.

1 $\{6, 7\}$，$\{6, 8\}$，$\{7, 8\}$　　2 $\{6, 7, 8\}$

人民教育出版社

1.1.3 集合的基本运算

1. 交集

情境与问题

学校高一年级准备成立一个科学兴趣小组，招募成员时要求同时满足：

（1）中考的物理成绩不低于 80 分；

（2）中考的数学成绩不低于 70 分.

如果满足条件（1）的同学组成的集合记为 P，满足条件（2）的同学组成的集合记为 M，而能成为科学兴趣小组成员的同学组成的集合记为 S，那么这三个集合之间有什么联系呢？

可以看出，集合 S 中的元素既属于集合 P，又属于集合 M.

一般地，给定两个集合 A，B，由既属于 A 又属于 B 的所有元素（即 A 和 B 的公共元素）组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作

$$A\cap B,$$

读作“A 交 B”. 两个集合的交集可用图 1-1-7 所示的阴影部分形象地表示.

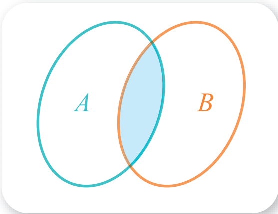


图 1-1-7

因此，上述情境与问题中的集合满足 $P\cap M=S$.

例如，$\{1, 2, 3, 4, 5\}\cap\{3, 4, 5, 6, 8\}=\{3, 4, 5\}$；在平面直角坐标系内，$x$ 轴与 y 轴相交于坐标原点，用集合语言可以表示为

$$\{(x, y) \mid y=0\}\cap\{(x, y) \mid x=0\}=\boxed{1}\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

想一想

如果集合 A，B 没有公共元素，那么它们的交集是什么？

从定义可以看出，$A\cap B$ 表示由集合 A，B 按照指定的法则构造出一个新集合，因此“交”可以看成集合之间的一种运算，通常称为交集运算.

交集运算具有以下性质，对于任意两个集合 A，B，都有：

（1）$A\cap B=B\cap A$；

（2）$A\cap A=A$；

（3）$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$；

（4）如果 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$，反之也成立.

人民教育出版社

例 1 求下列每对集合的交集：

(1) $A=\{1, -3\}$，$B=\{-1, -3\}$；

(2) $C=\{1, 3, 5, 7\}$，$D=\{2, 4, 6, 8\}$；

(3) $E=(1, 3]$，$F=[-2, 2)$.

解 (1) 因为 A 和 B 的公共元素只有 -3，所以

$A\cap B=$ 2 ________.

(2) 因为 C 和 D 没有公共元素，所以 $C\cap D=\varnothing$.

(3) 在数轴上表示出区间 E 和 F，如图 1-1-8 所示.

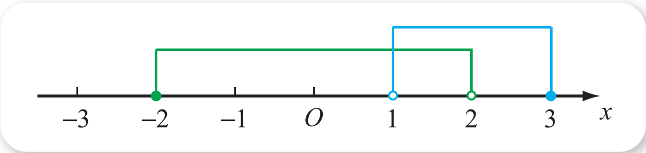


图 1-1-8

由图可知

$$E\cap F=(1, 2).$$

例 2 已知 $A=\{x\mid x$ 是菱形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是矩形$\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x\mid x$ 是菱形$\}\cap\{x\mid x$ 是矩形$\}=\{x\mid x$ 是正方形$\}$.

我们经常使用的“且”可以借助集合的交集来理解. 例如，平面直角坐标系中的点 (x, y) 在第一象限内的条件是：横坐标大于 0 且纵坐标大于 0，用集合的语言可以表示为

$$\{(x, y)\mid x>0\}\cap\{(x, y)\mid y>0\}=\{(x, y)\mid x>0, y>0\},$$

也就是说，为了保证点 (x, y) 在第一象限内，条件横坐标大于 0 与纵坐标大于 0 要同时成立.

本章导语中那个魔术的“秘密”你知道了吗？图 1 中所有扑克牌组成的集合和图 2 中所有扑克牌组成的集合的交集是什么？

2. 并集

情境与问题

某班班主任准备召开一个意见征求会，要求所有上一次考试中语文成绩低于 70 分或英语成绩低于 70 分的同学参加. 如果记语文成绩低于 70 分的所有同学组成的集合为 M，英语成绩低于 70 分的所有同学组成的集合为 N，需要去参加意见征求会的同学组成的集合为 P，那么这三个集合之间有什么联系呢？

人民教育出版社

可以看出，集合 P 中的元素，要么属于集合 M，要么属于集合 N.

一般地，给定两个集合 A，B，由这两个集合的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记作

$$A\cup B,$$

读作“A 并 B”. 两个集合的并集可用图 1-1-9（1）或（2）所示的阴影部分形象地表示. 由 A，B 构造出 $A\cup B$，通常称为并集运算.

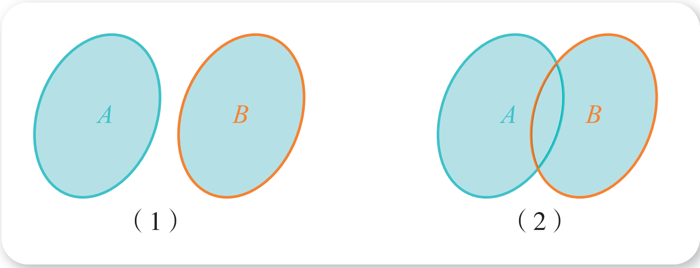


图 1-1-9

因此，上述情境与问题中的集合满足 $M\cup N=P$.

例如，

$$\{1, 3, 5\}\cup\{2, 3, 4, 6\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

注意，同时属于 A 和 B 的元素，在 $A\cup B$ 中只出现一次.

尝试与发现

类比交集运算的性质，探索得出并集运算的性质，对于任意两个集合 A，B，都有：

（1）$A\cup B=$ 3 ____________；

（2）$A\cup A=$ 4 ____________；

（3）$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=$ 5 ____________；

（4）如果 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=$ 6 ____________，反之也成立.

例 3 已知区间 $A=(-3, 1)$，$B=[-2, 3]$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

解 在数轴上表示出 A 和 B，如图 1-1-10 所示.

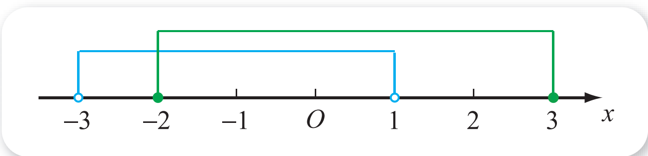


图 1-1-10

由图可知

$A\cap B=$ 7 ____________，$A\cup B=$ 8 ____________.

我们经常使用的“或”可以借助集合的并集来理解. 例如，$x\geqslant 0$ 的含义是 $x>0$ 或 $x=0$，这可以用集合语言表示为

$$\{x \mid x\geqslant 0\}=\{x \mid x>0 或 x=0\}=\{x \mid x>0\}\cup\{x \mid x=0\},$$

也就是说，为了保证 $x\geqslant 0$，条件 $x>0$ 与 $x=0$ 只要有一个成立即可.

探索与研究

（1）设有限集 M 所含元素的个数用 $\operatorname{card}(M)$ 表示，并规定 $\operatorname{card}(\varnothing)=0$. 已知 $A=\{x \mid x$ 是外语兴趣小组的成员$\}$，$B=\{x \mid x$ 是数学兴趣小组的成员$\}$，且 $\operatorname{card}(A)=20$，$\operatorname{card}(B)=8$，$\operatorname{card}(A\cap B)=4$，你能求出 $\operatorname{card}(A\cup B)$吗？

（2）设 A，B 为两个有限集，讨论 $\operatorname{card}(A)$，$\operatorname{card}(B)$，$\operatorname{card}(A\cap B)$，$\operatorname{card}(A\cup B)$之间的关系.

3. 补集

情境与问题

如果学校里所有同学组成的集合记为 S，所有男同学组成的集合记为 M，所有女同学组成的集合记为 F，那么：

（1）这三个集合之间有什么联系？

（2）如果 $x\in S$ 且 $x\notin M$，你能得到什么结论？

可以看出，集合 M 和集合 F 都是集合 S 的子集，而且如果 $x\in S$ 且 $x\notin M$，则一定有 $x\in F$.

在研究集合与集合之间的关系时，如果所要研究的集合都是某一给定集合的子集，那么称这个给定的集合为**全集**，全集通常用 U 表示. 如果集合 A 是全集 U 的一个子集，则由 U 中不属于 A 的所有元素组成的集合，称为 A 在 U 中的**补集**，记作

$$\complement_U A,$$

读作“A 在 U 中的补集”. 由全集 U 及其子集 A 得到 $\complement_U A$，通常称为补集运算.

集合的补集也可用维恩图形象地表示，其中全集通常用矩形区域代表，如图 1-1-11 所示.

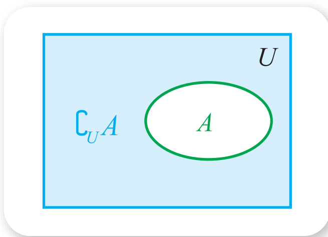


图 1-1-11

因此，上述情境与问题中的集合满足

$$\complement_S F=M,\quad \complement_S M=F.$$

例如，如果 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$A=\{1, 3, 5\}$，则

$$\complement_U A=\{2,\ 4,\ 6\}.$$

注意，此时 $\complement_U A$ 仍是 U 的一个子集，因此 $\complement_U(\complement_U A)$ 也是有意义的，此例中的

$$\complement_U(\complement_U A)=\{1,\ 3,\ 5\}=A.$$

事实上，给定全集 U 及其任意一个子集 A，补集运算具有如下性质：

(1) $A\cup(\complement_U A)=U$；

(2) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$；

(3) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

想一想

补集的性质是否可以借助维恩图来直观理解？

例 4 已知 $U=\{x\in\mathbf{N}\mid x\leqslant 7\}$，$A=\{x\in U\mid x^2\leqslant 7\}$，$B=\{x\in U\mid 0<2x\leqslant 7\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cap B)$.

分析 注意 U 中的元素都是自然数，而且 A，B 都是 U 的子集.

解 不难看出

$$U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\},\ A=\{0,\ 1,\ 2\},\ B=\{1,\ 2,\ 3\}.$$

因此

$$\complement_U A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\},$$
$$\complement_U B=\{0,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\},$$
$$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{0,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\},$$
$$\complement_U(A\cap B)=\{0,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}.$$

例 5 已知 $A=(-1,\ +\infty)$，$B=(-\infty,\ 2]$，求 $\complement_{\mathbf{R}}A$，$\complement_{\mathbf{R}}B$.

解 在数轴上表示出 A 和 B，如图 1-1-12 所示.

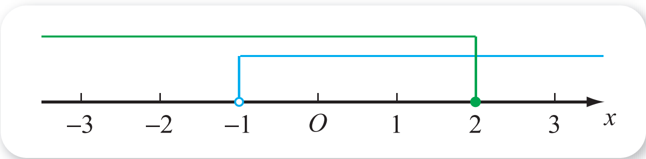


图 1-1-12

由图可知

$\complement_{\mathbf{R}}A=$ 9________，$\complement_{\mathbf{R}}B=$ 10________.

探索与研究

给定三个集合 A，B，C，式子 $(A\cup B)\cap C$ 的意义是什么？$(A\cap C)\cup(B\cap C)$ 呢？作维恩图研究这两个式子之间的关系，并研究 $(A\cap B)\cup C$ 和 $(A\cup C)\cap(B\cup C)$ 之间的关系.

练习A

❶ 已知 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{b, d, e, f\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

❷ 已知区间 $A=(0, +\infty)$，$B=(2, +\infty)$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

❸ 若 $A=\{x \mid x$ 是选修羽毛球课程的同学$\}$，$B=\{x \mid x$ 是选修乒乓球课程的同学$\}$，请分别说明 $A\cap B$，$A\cup B$ 所表示的含义.

❹ 设 $U=\{x\in\mathbf{N} \mid x<9\}$，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.

❺ 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=[7, +\infty)$，求 $\complement_U A$，$(\complement_U A)\cap U$，$A\cup(\complement_U A)$.

练习B

❶ 对于任意两个集合 A，B，关系式 $(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$ 总成立吗？说明理由.

❷ 已知集合 $A=\{a, b, c\}$.

(1) 写出所有满足条件 $A\cup B=A$ 的集合 B；

(2) 满足条件 $A\cap C=C$ 的集合 C 有多少个？

❸ 设全集 $U=\mathbf{Z}$，$A=\{x \mid x=2k, k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid x=2k+1, k\in\mathbf{Z}\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.

❹ 设全集 $U=\{2, 4, a^2\}$，集合 $A=\{4, a+3\}$，$\complement_U A=\{1\}$，求实数 a 的值.

❺ 已知区间 $A=(2, 4)$，$B=(a, 5)$.

(1) 若 $A\cap B=(3, 4)$，求实数 a 的值；

(2) 若 $A\cup B=(2, 5)$，求实数 a 的取值范围.

1 $\{(0, 0)\}$	2 $\{-3\}$	3 $B\cup A$	4 A	5 A	6 B
7 $[-2, 1)$	8 $(-3, 3]$	9 $(-\infty, -1]$	10 $(2, +\infty)$		

习题1-1A

❶ 设 $A=\{x \mid x$ 是 U 中的奇数$\}$.

(1) 如果 $U=\{4, 5, 6\}$，列出 A 中的所有元素；

(2) 如果 $U=\{x \mid x$ 是小于 15 的正整数$\}$，列出 A 中的所有元素；

(3) 如果 $U=\{x\in\mathbf{Z} \mid 25<x<40\}$，列出 A 中的所有元素.

❷ 写出集合 $\left\{x \,\middle|\, x=\dfrac{2n}{3}, n\in\mathbf{N}\right\}$ 中最小的3个元素.

❸ 判断下列表达式是否正确：

(1) $2\subsetneqq(-\infty, 10]$；　　(2) $2\in(-\infty, 10]$；

(3) $\{2\}\subsetneqq(-\infty, 10]$; (4) $\varnothing\in(-\infty, 10]$;

(5) $\varnothing\subseteq(-\infty, 10]$; (6) $\varnothing\subsetneqq(-\infty, 10]$.

4 用 “$\in$” “$\notin$” “$\subsetneqq$” 或 “$\supsetneqq$” 填空：

(1) 2 ____ $\{x \mid x$ 是素数$\}$; (2) $\{0\}$ ____ $\varnothing$;

(3) π ____ $\mathbf{Q}$; (4) $\{2\}$ ____ $\{x \mid 0<x<3\}$.

5 已知 $A=\{x \mid x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是菱形$\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

6 设 $A=\{x \mid x$ 是小于 10 的素数$\}$，$B=\{x \mid x$ 是小于 10 的正奇数$\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

7 已知 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$，$C=\{6, 7, 8, 9\}$. 求：

(1) $A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap C$; (2) $A\cup B$，$B\cup C$，$A\cup C$.

8 如果集合 A，B 分别满足下列等式，试写出 A 与 B 之间的关系：

(1) $A\cap B=A$; (2) $A\cup B=A$.

9 已知区间 $A=(-6, 1)$，$B=[-7, 3)$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

10 已知区间 $A=(-3, 2]$，求 $\complement_{\mathbf{R}}A$.

习题1-1B

1 已知 $A=\{0, 2, 4, 6, 8\}$，$B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，$C=\{4, 5, 6\}$，求：

(1) $A\cap B\cap C$; (2) $A\cup B\cup C$;

(3) $(A\cap B)\cup C$; (4) $(A\cup B)\cap C$.

2 已知全集 $U=\{a, b, c, d, e\}$，$A=\{a, b, c\}$，分别列出满足下列条件的所有可能的集合 B：

(1) $A\cup B=A$; (2) $A\cap B=B$; (3) $\complement_U B=A$.

3 已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$A=\{3, 4, 5\}$，$B=\{4, 7, 8\}$.

(1) 求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$;

(2) 验证

$$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B),\quad \complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B).$$

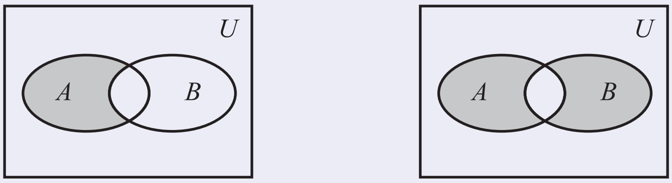
4 已知 $A=\{0, 1, 2, 3\}$，$B=\{0, 2, 4, 5\}$，$C\subseteq A$，$C\subseteq B$，写出符合条件的所有集合 C.

5 已知 $A=\{x \mid |x|<3\}$，$B=\{x\in\mathbf{N} \mid x^2<11\}$，求 $A\cap B$.

6 已知 $A=[-1, 2]$，$B=\left(-\infty, -\dfrac{p}{4}\right)$，且 $B\subsetneqq \complement_{\mathbf{R}}A$，求实数 p 的取值范围.

人民教育出版社

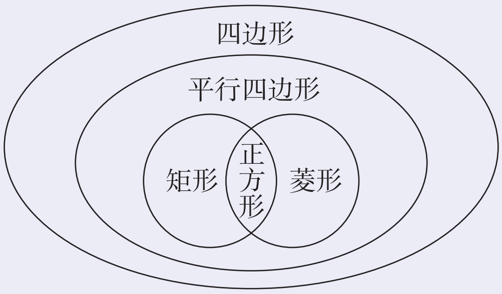
7. 用集合语言分别表示下图中的阴影部分.



(1)　　　　(2)

(第 7 题)

8. 如图所示是初中所学的不同类型四边形的知识结构图，你能用集合的语言来描述图中的关系吗?



(第 8 题)

习题1-1C

1. 已知集合 $A=\{1,3,m\}$，$B=\{m^2,1\}$，且 $A\cup B=A$，求 m 的值.
2. 已知集合 $P=\{x \mid x^2\leqslant 1\}$，$M=\{a\}$，若 $P\cup M=P$，求 a 的取值范围.
3. 已知 $U=(-\infty,+\infty)$，$A=(-\infty,a]$，$B=(-\infty,1)$，且 $(\complement_U A)\cup B=U$，求 a 的取值范围.
4. 已知 M，N 为全集 U 的非空真子集，且 M 与 N 不相等，若 $(\complement_U M)\cap N=\varnothing$，试判断集合 M 和 N 的关系，并求出 $M\cup N$.

1.2　常用逻辑用语

1.2.1 命题与量词

1. 命题

情境与问题

“命题”这个词在新闻报道中经常可以见到．例如：“从最直接的生态保护方式之一——植树造林，到多种更具创新性的环保活动的开展，如何建立起公众与自然沟通的桥梁，引发人们对于自然环境的关注和思考，成为时下的环保‘新命题’．”（2017年12月21日《中国青年报》）

我们在数学中也经常接触到“命题”这两个字，你知道新闻报道中的“命题”与数学中的“命题”有什么区别吗？

新闻报道中的“命题”往往是“命制的题目”的简写，常常指的是待研究的问题或需要完成的任务等．需要注意的是，一般来说，数学中的“命题”与新闻报道中的“命题”不一样．

我们在初中的时候就已经学习过数学中的命题，知道类似“对顶角相等”这样的可供真假判断的陈述语句就是**命题**，而且，判断为真的语句称为**真命题**，判断为假的语句称为**假命题**．数学中的命题，还经常借助符号和式子来表达．例如，命题“9的算术平方根是3”可表示为“$\sqrt{9}=3$”．

值得注意的是，一个命题，要么是真命题，要么是假命题，不能同时既是真命题又是假命题，也不能模棱两可、无法判断是真命题还是假命题．

尝试与发现

下列命题中，1 __________是真命题，2 __________是假命题：

（1）$10^2=100$；

(2) 所有无理数都大于零;

(3) 平面内垂直于同一条直线的两条直线互相平行;

(4) 一次函数 $y=2x+1$ 的图象经过点 $(0, 1)$;

(5) 设 a, b, c 是任意实数, 如果 $a>b$, 则 $ac>bc$;

(6) $\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}$.

为了方便叙述，命题可以用小写英文字母表示，如若记

$$p: A\subseteq(A\cup B),$$

则可知 p 是一个真命题.

拓展阅读

数学中的猜想

通过小学和初中的学习，大家可能已经感受到，对于包括数学在内的很多学科来说，最重要的就是得到各种各样的有价值的命题. 这些命题通常都是以结论、定理、推论、性质等形式表述的.

值得注意的是，对于命题，我们要求的是“可供”真假判断，至于怎样才能判断一个命题的真假以及谁能判断，是命题概念里没有涉及的内容.

例如，语句“367 895 326 013 217 是 6 的倍数”是可以判断真假的，所以它是一个命题. 要判断这个命题的真假，可以借助现代信息技术（如计算器、计算机等），也可以直接利用有关数学知识（例如，因为 6 是 2 的倍数，所以凡是 6 的倍数的数一定是偶数，但给定的数是奇数，所以原命题是假命题）. 总的来说，要判断一个命题的真假并不是一件容易的事，这也就是我们为什么要努力学习各种知识的原因之一.

实际上，数学界中，有一些命题至今还没有人能判断真假，比如“每一个不小于 6 的偶数都是两个奇素数的和”，到目前为止数学家们还不能肯定它是一个真命题还是一个假命题. 通常，未能得到真假判断的命题称为猜想. 前面提到的这个命题是数学家哥德巴赫提出来的，所以称为哥德巴赫猜想.

在数学和其他学科的研究中，如果有人能解决一个大家都认为很难的猜想，那是一件非常了不起的事情，解决猜想的人也会因此而享誉全球. 感兴趣的同学可以上网搜索“猜想”以了解更多的情况.

2. 量词

在数学中，有很多命题都是针对特定集合而言的，例如：

(1) 任意给定实数 x, $x^2\geqslant 0$;

(2) 存在有理数 x, 使得 $3x-2=0$;

(3) 每一个有理数都能写成分数的形式;

（4）所有的自然数都大于或等于零；

（5）实数范围内，至少有一个 x 使得 $\sqrt{-x^2}$ 有意义；

（6）方程 $x^2=2$ 在实数范围内有两个解；

（7）每一个直角三角形的三条边长都满足勾股定理.

不难看出，命题（1）（3）（4）（7）陈述的是指定集合中的所有元素都具有特定性质，命题（2）（5）（6）陈述的是指定集合中的某些元素具有特定性质.

一般地，“任意”“所有”“每一个”在陈述中表示所述事物的全体，称为**全称量词**，用符号“$\forall$”表示. 含有全称量词的命题，称为**全称量词命题**. 因此，全称量词命题就是形如“对集合 M 中的所有元素 x，$r(x)$”的命题，可简记为

$$\boxed{\forall x\in M,\ r(x).}$$

例如，“任意给定实数 x，$x^2\geqslant 0$”是一个全称量词命题，可简记为

$$\forall x\in \mathbf{R},\ x^2\geqslant 0.$$

“存在”“有”“至少有一个”在陈述中表示所述事物的个体或部分，称为**存在量词**，用符号“$\exists$”表示. 含有存在量词的命题，称为**存在量词命题**. 因此，存在量词命题就是形如“存在集合 M 中的元素 x，$s(x)$”的命题，可简记为

$$\boxed{\exists x\in M,\ s(x).}$$

例如，“存在有理数 x，使得 $3x-2=0$”是一个存在量词命题，可简记为

3 ________________.

如果记 $p(x)$：$x^2-1=0$，$q(x)$：$5x-1$ 是整数，则通过指定 x 所在的集合和添加量词，就可以构成命题. 例如：

p_1：$\forall x\in \mathbf{Z}$，$p(x)$；

q_1：$\forall x\in \mathbf{Z}$，$q(x)$；

p_2：$\exists x\in \mathbf{Z}$，$p(x)$；

q_2：$\exists x\in \mathbf{Z}$，$q(x)$.

尝试与发现

（1）上述 4 个命题 p_1，q_1，p_2，q_2 中，真命题是 4 ________________；

（2）总结出判断全称量词命题和存在量词命题真假的方法.

事实上，要判定全称量词命题$\forall x\in M$，$r(x)$是真命题，必须对限定集合M中的每个元素x，验证$r(x)$成立；但要判定其是假命题，却只需举出集合M中的一个元素x_0，使得$r(x_0)$不成立即可（这就是通常所说的“举出一个反例”）.

要判定存在量词命题$\exists x\in M$，$s(x)$是真命题，只要在限定集合M中，找到一个元素x_0，使得$s(x_0)$成立即可（这就是通常所说的“举例说明”）；但要判定其是假命题，却需要说明集合M中的每个元素x，都使得$s(x)$不成立.

例 判断下列命题的真假：

（1）$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+1>0$；（2）$\forall x\in \mathbf{N}$，$\sqrt{x}\geqslant 1$；

（3）$\exists x\in \mathbf{Z}$，$x^3<1$；（4）$\exists x\in \mathbf{Q}$，$x^2=3$.

解 （1）由于$\forall x\in \mathbf{R}$，都有$x^2\geqslant 0$，因而有

$$x^2+1\geqslant 1>0.$$

因此命题“$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+1>0$”是 5 ______命题.

（2）由于$0\in \mathbf{N}$，而且当$x=0$时，$\sqrt{0}\geqslant 1$不成立.

因此命题“$\forall x\in \mathbf{N}$，$\sqrt{x}\geqslant 1$”是 6 ______命题.

（3）由于$-1\in \mathbf{Z}$，而且当$x=-1$时，有$(-1)^3<1$.

因此命题“$\exists x\in \mathbf{Z}$，$x^3<1$”是 7 ______命题.

（4）由于使$x^2=3$成立的数只有$\sqrt{3}$和$-\sqrt{3}$，而它们都不是有理数，因而没有任何一个有理数的平方能等于3.

因此命题“$\exists x\in \mathbf{Q}$，$x^2=3$”是 8 ______命题.

值得注意的是，全称量词命题和存在量词命题，都可以包含多个变量，而且这样的情形前面我们已经接触过.

例如，以前学过的平方差公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

因为这个公式对所有实数a，b都成立，所以可以改写为全称量词命题

$$\forall a,\ b\in \mathbf{R},\ a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

又如，对于函数$y=x+1$来说，任意给定一个x值，都有唯一的y值与它对应. 因此如果把$y=x+1$看成含有两个未知数的方程，则这个方程有无数多个解，且任意给定一个x，都存在一个y使得等式成立，这可以改写为

$$\forall x\in \mathbf{R},\ \exists y\in \mathbf{R},\ y=x+1.$$

人民教育出版社

练习A

1. 判断下列命题的真假：

(1) $2+2\sqrt{2}$是有理数； (2) $1+1>2$；

(3) 奇数的平方仍是奇数； (4) 两个集合的交集还是一个集合；

(5) 每一个素数都是奇数； (6) 方程 $2x^2+1=0$ 有实数根；

(7) $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$； (8) 如果 $x>2$，那么 $x>3$.

2. 将下列命题用量词等符号表示，并判断命题的真假：

(1) 所有实数的平方都是正数；

(2) 任何一个实数除以 1，仍等于这个实数.

3. 判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2-3x-2=0$； (2) $\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2+1=0$；

(3) $\exists x\in \mathbf{Q}$，$|x|+x\geqslant 0$； (4) $\forall x\in \mathbf{R}$，$4x^2>2x-1+3x^2$；

(5) $\forall x\in(-7, 3)$，$x\in[-7, 3)$； (6) $\exists x\in(-\infty, 2]$，$x^2=1$.

练习B

1. 判断下列命题的真假：

(1) 存在两个无理数，它们的乘积是有理数；

(2) 如果实数集的非空子集 A 是有限集，则 A 中的元素一定有最大值；

(3) 没有一个无理数不是实数；

(4) 如果一个四边形的对角线相等，则这个四边形是矩形；

(5) 集合 A 是集合 $A\cup B$ 的子集；

(6) 集合 $A\cap B$ 是集合 A 的子集.

2. 判断下列命题的真假：

(1) $\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2+1<0$；

(2) $\forall x\in[0, +\infty)$，$\sqrt{x+1}=\sqrt{x}+1$；

(3) $\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2\leqslant 0$；

(4) $\forall x\in \mathbf{R}$，$\sqrt{x^2}$是有理数；

(5) $\exists x\in[0, +\infty)$，$\sqrt{x+1}=\sqrt{x}+1$.

3. 判断下列命题的真假：

(1) $\exists x, y\in \mathbf{Z}$，$3x-2y=10$；

(2) $\exists a, b\in \mathbf{R}$，$(a-b)^2=a^2-b^2$；

(3) $\forall a, b\in \mathbf{R}$，$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

4 分别求满足下列条件的实数 a 的取值范围：

（1）“$\forall x\in[a,\ +\infty)$，$x^2\geqslant 1$”是真命题；

（2）“$\exists x\in(-\infty,\ a]$，$x^2=1$”是假命题.

1 （1）（3）（4）（6）　2 （2）（5）　3 $\exists x\in\mathbf{Q}$，$3x-2=0$

4 q_1，p_2，q_2　5 真　6 假　7 真　8 假

1.2.2 全称量词命题与存在量词命题的否定

情境与问题

“否定”是我们日常生活中经常使用的一个词. 2009 年 11 月 23 日《人民日报》的《创新，从敢于否定开始》一文中有这样一段话：“培养一流创新人才，敢于否定的精神非常重要. 一旦下定决心进行研究，首先就要敢于否定别人的成果，并想一想：前人的成果有哪些是不对的，有什么方面可以改善，有什么地方可以加强.”

结合上述这段话，谈谈你对“否定”一词的认识，并由此猜想“命题的否定”是什么意思.

本小节我们要学习的是与命题的否定有关的知识.

1. 命题的否定

尝试与发现

你能说出命题 s：“3 的相反数是 -3”和 t：“3 的相反数不是 -3”这两个命题之间的关系吗？它们的真假性如何？

可以发现，命题 s 是对命题 t 的否定，命题 t 也是对命题 s 的否定. 而且，s 是真命题，t 是假命题. 一般地，对命题 p 加以否定，就得到一个新的命题，记作“$\neg p$”，读作“非 p”或“p 的否定”.

如果一个命题是真命题，那么这个命题的否定就是一个假命题；反之

亦然.

例如，$\sqrt{9}=3$ 是一个真命题，那么$\sqrt{9}\neq 3$ 就是一个 1 ________ 命题.

2. 全称量词命题与存在量词命题的否定

下面我们来探讨如何对全称量词命题与存在量词命题进行否定.

若记 s：“存在整数是自然数”，则不难看出，这个命题的否定是$\neg s$：“不存在整数是自然数”. 这里的命题 s 实际上是个存在量词命题，而且可以用符号表示为

$$s：\exists x\in \mathbf{Z}，x\in \mathbf{N}；$$

而命题$\neg s$ 可以表述为“每一个整数都不是自然数”，因此$\neg s$ 是一个全称量词命题，可以用符号表示为

$$\neg s：\forall x\in \mathbf{Z}，x\notin \mathbf{N}.$$

显然，这里的 s 是一个真命题，而$\neg s$ 是一个假命题.

若记 r：“存在实数的平方小于 0”，则不难看出，这个命题的否定是$\neg r$：“不存在实数的平方小于 0”. 这里的命题 r 也是一个存在量词命题，而且可以用符号表示为

r：2 ________________；

而命题$\neg r$ 可以表述为“每一个实数的平方都不小于 0”，因此$\neg r$ 是一个全称量词命题，可以用符号表示为

$\neg r$：3 ________________.

显然，这里的 r 是一个 4 ________ 命题，而$\neg r$ 是一个 5 ________ 命题.

一般地，存在量词命题“$\exists x\in M，p(x)$”的否定是全称量词命题

$$\boxed{\forall x\in M，\neg p(x).}$$

若记 s：“每一个有理数都是实数”，则不难看出，这个命题的否定是$\neg s$：“不是每一个有理数都是实数”. 这里的命题 s 实际上是一个全称量词命题，而且可以用符号表示为

$$s：\forall x\in \mathbf{Q}，x\in \mathbf{R}；$$

而命题$\neg s$ 可以表述为“存在一个有理数不是实数”，因此$\neg s$ 是一个存在量词命题，可以用符号表示为

$$\neg s：\exists x\in \mathbf{Q}，x\notin \mathbf{R}.$$

显然，这里的 s 是一个真命题，而$\neg s$ 是一个假命题.

人民教育出版社

尝试与发现

记 r："每一个素数都是奇数"，用类似的方法，研究 r 和 $\neg r$ 的关系、符号表示以及真假性.

若用 A 表示所有素数组成的集合，B 表示所有奇数组成的集合，则

$$r：\forall x\in A，x\in B，$$

$$\neg r：\exists x\in A，x\notin B.$$

因为 2 是素数且 2 不是奇数，所以 r 是假命题，$\neg r$ 是真命题.

一般地，全称量词命题"$\forall x\in M，q(x)$"的否定是存在量词命题

$$\boxed{\exists x\in M，\neg q(x).}$$

例 1 写出下列命题的否定，并判断所得命题的真假：

（1）p：$\forall x\in \mathbf{R}，x^2\geqslant -1$；

（2）q：$\forall x\in\{1，2，3，4，5\}，\dfrac{1}{x}<x$；

（3）s：至少有一个直角三角形不是等腰三角形.

解 （1）$\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R}，x^2<-1$，由 p 是真命题可知 $\neg p$ 是假命题.

（2）$\neg q$：$\exists x\in\{1，2，3，4，5\}，\dfrac{1}{x}\geqslant x$. 将集合中的元素逐个验证，当 $x=1$ 时不等式成立，因此 $\neg q$ 是真命题.

（3）$\neg s$：所有直角三角形都是等腰三角形. 因为有一个内角为 30°的直角三角形不是等腰三角形，所以 $\neg s$ 是假命题.

例 2 写出下列命题的否定，并判断所得命题的真假：

（1）p：$\exists a\in\mathbf{R}$，一次函数 $y=x+a$ 的图象经过原点；

（2）q：$\forall x\in(-3，+\infty)，x^2>9$.

解 （1）$\neg p$：$\forall a\in\mathbf{R}$，一次函数 $y=x+a$ 的图象不经过原点. 因为当 $a=0$ 时，一次函数 $y=x+a$ 的图象经过原点，所以 $\neg p$ 是 6 ______ 命题.

（2）$\neg q$：$\exists x\in(-3，+\infty)，x^2\leqslant 9$. 因为 $x=0$ 时，$x^2=0<9$，所以 $\neg q$ 是真命题.

练习A

1 （1）如果 p 是真命题，那么 $\neg p$ 是真命题还是假命题？

（2）如果 $\neg q$ 是真命题，那么 q 是真命题还是假命题？

2 写出下列命题的否定，并判断所得命题的真假：

（1）一切分数都是有理数；　　（2）有些三角形是锐角三角形.

3. 已知 q：$\forall x\in[-2, 3)$，$x^2<9$，写出$\neg q$，并判断$\neg q$ 的真假.

练习B

1. 写出下列命题的否定，并判断所得命题的真假：

(1) 二次函数 $y=(x-1)^2-1$ 的图象的顶点坐标是$(1, -1)$；

(2) 正数的立方根都是正数；

(3) 存在一个最大的内角小于 $60°$的三角形；

(4) 对任意实数 t，点(t, t)都在一次函数 $y=x$ 的图象上.

2. 写出下列命题的否定，并判断所得命题的真假：

(1) $\exists x\in\mathbf{R}$，$|x|+x=0$；　　(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|+1-x\neq0$.

3. 已知区间 $M=[a, a+1]$，且“$\forall x\in M$，$x+1>0$”是真命题，求实数 a 的取值范围.

1 假　2 $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2<0$　3 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\geqslant0$　4 假　5 真　6 假

1.2.3 充分条件、必要条件

情境与问题

“充分”“必要”是我们日常生活中经常使用的词语，你知道下列语句中的这两个词分别表达的是什么意思吗?

(1)“不断出现的数据让禁放派理由更加充分”(《中国青年报》2014 年 1 月 23 日)；

(2)“做到了目标明确、数据翔实、理由充分、逻辑严密”(《人民日报》2014 年 8 月 4 日)；

(3)“积极乐观的人，相信办法总比问题多，内心充满希望，当然，他们更懂得去寻求必要的帮助，给自己创造更多的机会”(《中国青年报》2015 年 6 月 22 日)；

(4)“文学不只是知识，同时也是一种能力，写作对于一个文学系的学生而言是一种必要的素质”(《人民日报》2015 年 7 月 28 日).

本小节我们要学习数学中的充分条件和必要条件.

1. 充分条件、必要条件

我们已经接触过很多形如“如果 p，那么 q”[①] 的命题，例如：

（1）如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行；

（2）在直角三角形中，如果一个锐角等于 $30°$，那么这个锐角所对的直角边等于斜边的一半；

（3）如果 $x>2$，那么 $x>3$；

（4）如果 $a>b$ 且 $c>0$，那么 $ac>bc$.

在“如果 p，那么 q”形式的命题中，p 称为命题的条件，q 称为命题的结论. 若“如果 p，那么 q”是一个真命题，则称由 p 可以推出 q，记作

$$p \Rightarrow q,$$

读作“p 推出 q”；否则，称由 p 推不出 q，记作 $p \nRightarrow q$，读作“p 推不出 q”.

例如，上述例子中，（1）是一个真命题，即“两条直线都与第三条直线平行”可以推出“这两条直线也互相平行”，这也可记作

两条直线都与第三条直线平行⇒这两条直线也互相平行；

而（3）是一个假命题，即 $x>2$ 推不出 $x>3$，这也可记作

$$x>2 \nRightarrow x>3.$$

尝试与发现

用类似的方法分析上述例子中的（2）（4），并将它们用符号表示出来.

当 $p \Rightarrow q$ 时，我们称 p 是 q 的**充分条件**，q 是 p 的**必要条件**；当 $p \nRightarrow q$ 时，我们称 p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件. 事实上，前述情境与问题中的“充分”“必要”与这里的充分条件、必要条件表示的是类似的意思.

因此，

“如果 p，那么 q”是真命题，

$p \Rightarrow q$，

p 是 q 的充分条件，

q 是 p 的必要条件，

想一想

有人说，充分条件就是“有之即可，无之也行”的条件，必要条件就是“有之未必即可，无之则必不行”的条件，你觉得有道理吗？

① “如果 p，那么 q”也常常记为“如果 p，则 q”或“若 p，则 q”.

这四种形式的表达，讲的是同一个逻辑关系，只是说法不同而已.

例如，因为“如果 $x=-y$，则 $x^2=y^2$”是真命题，所以

$$x=-y \Rightarrow x^2=y^2,$$

$x=-y$ 是 $x^2=y^2$ 的充分条件，

$x^2=y^2$ 是 $x=-y$ 的必要条件.

又如，因为命题“若 $A\cap B\neq\varnothing$，则 $A\neq\varnothing$”是真命题，所以

$A\cap B\neq\varnothing$ 1 ________ $A\neq\varnothing$，

$A\cap B\neq\varnothing$ 是 $A\neq\varnothing$ 的 2 ________ 条件，

$A\neq\varnothing$ 是 $A\cap B\neq\varnothing$ 的 3 ________ 条件.

例 1 判断下列各题中，p 是否是 q 的充分条件，q 是否是 p 的必要条件：

（1）p：$x\in\mathbf{Z}$，q：$x\in\mathbf{R}$；

（2）p：x 是矩形，q：x 是正方形.

解 （1）因为整数都是有理数，从而一定也是实数，即 $p\Rightarrow q$，因此 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

（2）因为矩形不一定是正方形，即 $p\nRightarrow q$，因此 p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件.

充分条件与必要条件也可用集合的知识来理解.

设 $A=\{x \mid x\geqslant 0\}$，$B=\{x \mid x>-1\}$，则不难看出，$A$ 是 B 的子集（如图 1-2-1 所示），即 $A\subseteq B$.

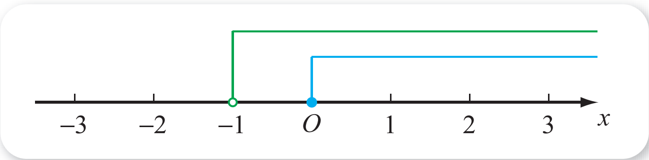


图 1-2-1

另外，“如果 $x\geqslant 0$，那么 $x>-1$”是真命题，也就是说

$$x\geqslant 0 \Rightarrow x>-1,$$

$x\geqslant 0$ 是 $x>-1$ 的充分条件，

$x>-1$ 是 $x\geqslant 0$ 的必要条件.

一般地，如果 $A=\{x \mid p(x)\}$，$B=\{x \mid q(x)\}$，且 $A\subseteq B$（如图 1-2-2 所示），那么 $p(x)\Rightarrow q(x)$，因此也就有 $p(x)$ 是 $q(x)$ 的充分条件，$q(x)$ 是 $p(x)$ 的必要条件.

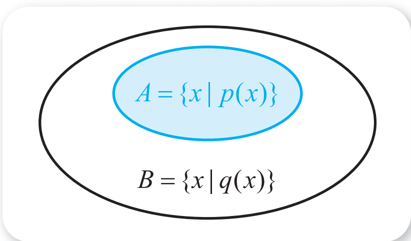


图 1-2-2

例如，设 $A=\{x \mid x$ 是在北京市出生

的人}，$B=\{x \mid x$ 是在中国出生的人}，则 $A\subseteq B$，所以“x 是在北京市出生的人”可以推出“x 是在中国出生的人”.

充分条件、必要条件还与数学中的判定定理、性质定理有关.

例如，“如果一个函数是正比例函数，那么这个函数是一次函数”可以看成一个判定定理. 这指的是，只要函数是正比例函数，那么就可以判定这个函数是一次函数. 不难看出，判定定理实际上是给出了一个充分条件，上例中，“函数是正比例函数”是“函数是一次函数”的充分条件.

而“矩形的对角线相等”可以看成一个性质定理. 这指的是，只要一个四边形是矩形，那么这个四边形的对角线一定相等. 不难看出，性质定理实际上给出了一个必要条件，上例中，“四边形的对角线相等”是“四边形是矩形”的必要条件.

例 2 说明下述命题是否可以看成判定定理或性质定理，如果可以，写出其中涉及的充分条件或必要条件：

(1) 形如 $y=ax^2$（a 是非零常数）的函数是二次函数；

(2) 菱形的对角线互相垂直.

解 (1) 这可以看成一个判定定理，因此“形如 $y=ax^2$（a 是非零常数）的函数”是“这个函数是二次函数”的 4 ______ 条件.

(2) 这可以看成菱形的一个性质定理，因此“四边形对角线互相垂直”是“四边形是菱形”的 5 ______ 条件.

拓展阅读

强基计划中的充分条件与必要条件

一所高校某年发布的强基计划招生简章中规定，参加当年普通高等学校招生全国统一考试的考生，符合第一类条件，即高考成绩优异，综合素质优秀，或第二类条件，即在相关学科领域具有突出才能和表现（在中学生奥林匹克竞赛中获得全国决赛一等奖、二等奖），均可申请报名.

根据这一信息，回答下列问题：

(1) 已知甲同学满足第二类条件，那么甲能申请报名该校强基计划吗?

(2) 已知乙同学有资格申请报名该校强基计划，那么乙一定满足第二类条件吗?

(3) 已知丙同学不满足第二类条件，那么丙一定没有资格申请报名该校强基计划吗?

对于问题 (1)，相信大家都能得到正确答案：能. 但问题 (2) (3) 的答案都是：不一定. 你能用本节学到的知识说明它的道理吗?

这是因为满足第二类条件只是申请报名该校强基计划的充分条件，而不是必要条件，但从该校招生简章可知，能申请报名强基计划的充分条件可以不止一个，高考成绩优异且综合素质优秀也可以申请报名该校强基计划.

生活中还有很多类似的情况. 你还能找出更多的例子吗?

2. 充要条件

我们已经知道，因为 $x>3 \Rightarrow x>2$，所以

$$x>3 \text{ 是 } x>2 \text{ 的} \boxed{6}\underline{\qquad\qquad}\text{条件，}$$

又因为 $x>2 \nRightarrow x>3$，所以

$$x>3 \text{ 不是 } x>2 \text{ 的必要条件，}$$

把这两方面综合起来，可以说成

$$x>3 \text{ 是 } x>2 \text{ 的充分不必要条件.}$$

一般地，如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，则称 p 是 q 的**充分不必要条件**.

尝试与发现

仿照上述做法，给出 p 是 q 的必要不充分条件的定义，并给出具体实例加以说明.

如果 $p \nRightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$，则称 p 是 q 的**必要不充分条件**. 例如，$x(x-1)=0$ 是 $x=0$ 的必要不充分条件.

如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$，则称 p 是 q 的**充分必要条件**（简称为**充要条件**），记作

$$p \Leftrightarrow q,$$

此时，也读作"p 与 q 等价""p 当且仅当 q".

当然，p 是 q 的充要条件时，q 也是 p 的充要条件.

例如，当 $x \geqslant 0$ 时，$\sqrt{x}$ 有意义；当 $\sqrt{x}$ 有意义时，$x \geqslant 0$. 因此"$x \geqslant 0$"是"$\sqrt{x}$ 有意义"的充要条件，即

$$x \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \text{ 有意义，}$$

也可以说成"$x \geqslant 0$ 与 $\sqrt{x}$ 有意义等价""$x \geqslant 0$ 当且仅当 $\sqrt{x}$ 有意义".

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，判断 $\angle B=\angle C$ 是否是 $AC=AB$ 的充要条件.

解 因为"在三角形中，等角对等边"，所以

$$\angle B=\angle C \Rightarrow AC=AB;$$

又因为"在三角形中，等边对等角"，所以

$$AC=AB \Rightarrow \angle B=\angle C.$$

从而 $\angle B=\angle C \Leftrightarrow AC=AB$，因此 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$ 是 $AC=AB$ 的充要条件.

从集合的观点来看，如果 $A=\{x \mid p(x)\}$，$B=\{x \mid q(x)\}$，且 $A=B$，则 $p(x) \Leftrightarrow q(x)$，因此也就有 $p(x)$ 是 $q(x)$ 的充要条件.

例如，当 $A=\{x \mid x \leqslant 0\}$，$B=\{x \mid |x|=-x\}$ 时，不难看出 $A=B$，因此 $x \leqslant 0 \Leftrightarrow |x|=-x$，也就是说 $x \leqslant 0$ 是 $|x|=-x$ 的 $\boxed{7}\underline{\qquad\qquad}$ 条件，

$x\leqslant 0$ 与 $|x|=-x$ 等价，$x\leqslant 0$ 当且仅当 $|x|=-x$.

另外，充要条件与数学中的定义有关．例如，“三条边都相等的三角形称为等边三角形”是等边三角形的定义，这就意味着，只要三角形的三条边都相等，那么这个三角形一定是等边三角形；反之，如果一个三角形是等边三角形，那么这个三角形的三条边都相等．不难看出，一个数学对象的定义实际上给出了这个对象的一个充要条件．上例中，“三角形的三条边都相等”是“三角形是等边三角形”的充要条件.

注意到“三角形的三个角相等”也是“三角形是等边三角形”的一个充要条件，因此我们也可以将等边三角形定义为：“三个角都相等的三角形称为等边三角形.”

需要补充的是，除了上面提到的充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件，还存在 p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件的情形，例如，当 p：$x>0$，q：$x^2>2$ 时就是如此.

想一想

结合这里的实例，说明为什么有些数学对象有多种定义.

练习A

1. 设区间 $A=(-\infty,\ -1]$，$B=(-\infty,\ -1)$，判断 $x\in A$ 是否是 $x\in B$ 的充分条件和必要条件.
2. 说明下述命题是否可以看成判定定理或性质定理，如果可以，写出其中涉及的充分条件或必要条件：
   (1) 形如 $y=x^2+bx$（b 是常数）的函数是二次函数；
   (2) 菱形的对角线互相平分.
3. 下列各题中，p 是 q 的什么条件（“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”“既不充分也不必要条件”，下同）？
   (1) p：$x<2$，q：$x<1$；　(2) p：$x\leqslant 0$，q：$\sqrt{-x}$ 有意义；
   (3) p：$x>0$，q：$|x|=x$.
4. “有两个角之和为 90° 的三角形称为直角三角形”是否可以作为直角三角形的定义？为什么？

练习B

1. 下列各题中，p 是 q 的什么条件？
   (1) p：$A=\varnothing$，q：$A\cup B=B$；　(2) p：$A\subseteq B$，q：$A\cap B=A$；
   (3) p：$x\in A$，q：$x\in A\cap B$.
2. 下列各题中，p 是 q 的什么条件？
   (1) p：$a^2=4$，q：$a=2$；　(2) p：$A\subseteq B$，q：$A\cup B=B$；

(3) p：两个三角形全等，q：两个三角形面积相等.

3 写出 $a>b$ 的一个充分不必要条件，以及一个必要不充分条件.

1 $\Rightarrow$　2 充分　3 必要　4 充分　5 必要　6 充分　7 充要

习题1-2A

1 设 $p(x)$：$2x>x^2$，则 $p(5)$是真命题吗？$p(-1)$呢？

2 用量词符号“$\forall$”“$\exists$”表示下列命题：

(1) 存在一个多边形，其内角和是 $360°$；

(2) 任何一个实数乘以 -1 后，都等于这个实数的相反数；

(3) 存在实数 x，$x^3\geqslant x^2$.

3 写出下列各题中的$\neg p$：

(1) p：$\exists x\in \mathbf{Z}$，$x-1>0$；　(2) p：$\forall x\in \mathbf{Q}$，$x-2\geqslant 0$；

(3) p：$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+1>0$；　(4) p：$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2-1<0$.

4 判断下列各题中，p 是否是 q 的充分条件，p 是否是 q 的必要条件：

(1) p：$x=y$，q：$x^2=y^2$；

(2) p：$\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，q：$\triangle ABC$ 中，$\angle C>\angle B$.

5 设集合 $M=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$，写出下列命题的否定，并判断所得命题的真假：

(1) $\forall x\in M$，$x>1$；　(2) $\exists x\in M$，x 不是素数.

习题1-2B

1 判断下列命题的真假：

(1) 一次函数 $y=kx+k+1$（k 是非零常数）的图象一定经过点$(-1, 1)$；

(2) 直角三角形的外心一定在斜边上；

(3) 已知 x，$y\in \mathbf{R}$，则 $xy=0$ 是 $x^2+y^2=0$ 的充要条件；

(4) 如果 x，y 都能被 5 整除，则 $x+y$ 也能被 5 整除.

2 判断下列命题的真假：

(1) 如果$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，则$\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$；　(2) 如果$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，则$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$；

(3) 如果$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\neq 1$，则$\dfrac{a}{b-a}=\dfrac{c}{d-c}$.

3. 下列各题中，p 是 q 的什么条件？

(1) p：$x>0$，q：$\sqrt{x^2}=x$； (2) p：$\sqrt{x^2}=-x$，q：$x=0$.

4. 举反例证明下列命题都是假命题：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|>0$；

(2) 一元三次方程都有三个不同的实数根.

5. 已知 $A=(-\infty, a]$，$B=(-\infty, 3)$，且 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件，求 a 的取值范围.

6. 判断下列命题的真假：

(1) $\exists x, y\in\mathbf{R}$，$(x+y)^2=x^2+y^2$；

(2) $\forall x, y\in\mathbf{Z}$，$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$.

习题1-2C

1. 判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$\dfrac{1}{x^2+1}<1$； (2) $\exists x\in\mathbf{R}$，$\dfrac{1}{x}<x+1$.

2. 判断下列命题的真假：

(1) $\forall a, b\in\mathbf{R}$，$(a+b)^3=a^3+a^2b+ab^2+b^3$；

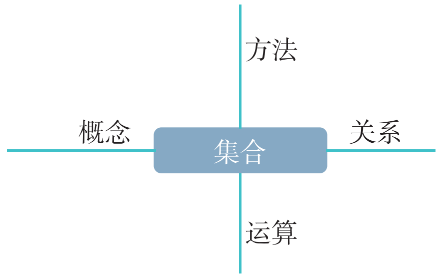
(2) $\forall a, b\in\mathbf{R}$，$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

本章小结

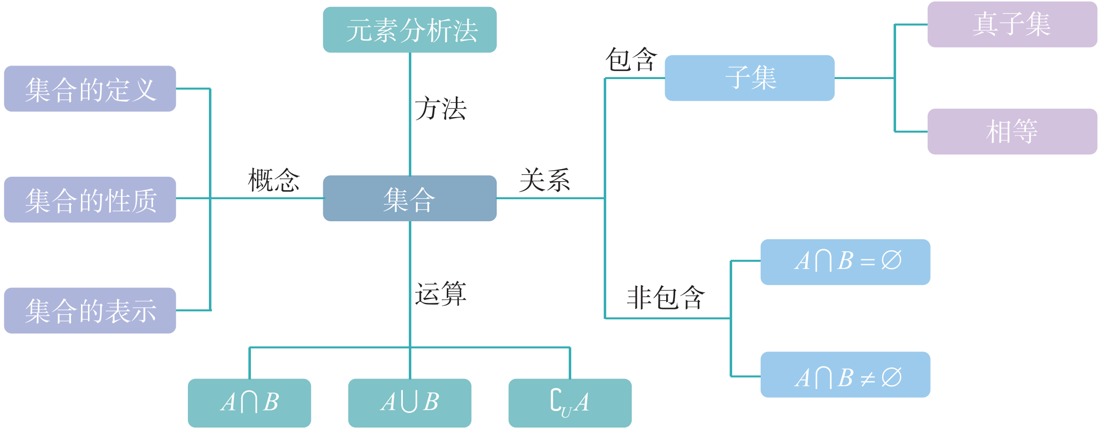
01 知识结构图设计与交流

为了更好地理解学过的知识，我们可以借助结构图来总结有关内容.

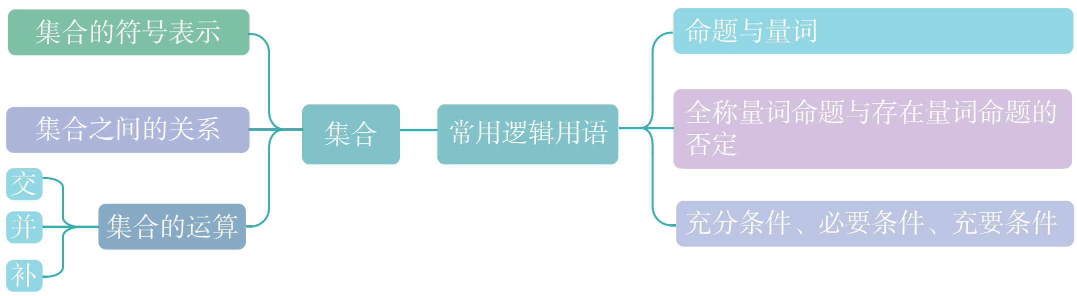
例如，本章我们首先学习了集合，内容可以归结为四个关键词：概念、关系、运算、方法. 这样一来，我们就可以先作出如下的知识结构框架.



根据每一个关键词，可以补充相关的内容. 例如，概念里可以包括集合的定义、集合的性质、集合的表示，关系可以分成包含关系和非包含关系，运算包括交、并、补等，而方法主要是元素分析法等. 依照这个思路，可以在上述框架的基础上补充集合的其他内容，如下图所示.



当然，设计知识结构图的方法不止一种. 例如，本章我们学习了集合与常用逻辑用语，而集合的知识包括集合的符号表示、集合之间的关系、集合的运算（交、并、补），常用逻辑用语的知识包括命题与量词、全称量词命题与存在量词命题的否定、充分条件、必要条件、充要条件等，而且集合与逻辑之间有着紧密的联系. 依照各知识之间的联系，我们可以作出如下的知识结构图.



另外，我们也可以按照其他思路来制作其他形式的知识结构图．而且，上述两个知识结构图也都可以进一步细化，例如增加集合元素的确定性、互异性、无序性，以及维恩图等内容．

发挥你的想象力和创造力，为本章的知识重新设计出一份独特的知识结构图，然后和同学交流制作的心得吧！

02 课题作业

理性思维（也称审辨式思维、批判性思维）是现代社会生活里非常重要的一种思维方式．

例如，理性思维要求我们能区分事实和观点．按照《现代汉语词典（第 7 版）》的解释，“事实”指的是事情的真实情况，而“观点”是观察事物时所处的位置或采取的态度．因此，“米饭和面食都是主食”是事实，但“面食比米饭好吃”就是观点．你觉得争论“面食好吃还是米饭好吃”这样的问题意义大吗？

理性思维也要求我们不能仅依靠直觉作出判断．2012 年，丹麦、法国、澳大利亚、比利时、挪威、美国、爱尔兰、韩国这 8 个国家中，哪个国家的癌症发病率最高？你猜得对吗①？是不是跟你的直觉不一样？

以小组合作的方式，查阅有关书籍或者网络，了解有关理性思维的更多知识，整理出理性思维中涉及的集合与逻辑知识，写成小论文，并与其他同学交流、分享．

03 复习题

A 组

1. 在下列集合中，哪些是非空的有限集合？哪些是无限集合？哪些是空集？

（1）小于 100 的全体素数组成的集合；

① 答案是丹麦．

人民教育出版社

(2) 线段 AB 内包含 AB 中点 M 的所有线段组成的集合;

(3) $A=\{x \mid |x|+1=0\}$;

(4) $A=\{(x, y) \mid y=2x+1\}$.

2. 用列举法写出下列集合:

(1) $A=\{x\in\mathbf{N} \mid |x-1|=3\}$; (2) $A=\left\{x\in\mathbf{N} \,\middle|\, \frac{1}{x}\geqslant 1\right\}$.

3. 若集合 $A=\{0, 1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, 求 $A\cap B$.

4. 已知区间 $M=(-1, 3)$, $N=(-2, 1)$, 求 $M\cup N$, $\complement_{\mathbf{R}}M$.

5. 设集合 $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{2, 3, 4\}$, 求 $(A\cap B)\cup C$.

6. 若 $\{1, 2\}\subseteq A\subseteq\{1, 2, 3, 4\}$, 求满足条件的集合 A 的个数.

7. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A, B, C 三个城市时, 甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过 B 城市; 乙说: 我没去过 C 城市; 丙说: 我们三人去过同一个城市. 判断乙一定去过哪个城市.

8. 判断下列命题的真假:

(1) $-x^2\leqslant 0$; (2) 0 是最小的自然数;

(3) 每个正方形都有 4 条对称轴; (4) $\sqrt{a^2+1}$ 一定是无理数.

9. 判断下列命题的真假:

(1) 如果 $A\cap B=A$, 那么 $A\subseteq B$; (2) 如果 $x\in A\cap B$, 那么 $x\in A$;

(3) $a\in\{a, b, c, d\}$; (4) $\{a, b\}\subseteq\{a, b, c, d\}$;

(5) $\pi\in\{x \mid x>3\}$.

10. 写出下列命题的否定, 并判断所得命题的真假:

(1) 任意实数都存在倒数;

(2) 存在一个平行四边形, 它的对角线不相等;

(3) $\forall x\in\{x \mid x$ 是三角形$\}$, x 的内角和是 180°.

11. 下列各题中, p 是 q 的什么条件?

(1) p: x 为自然数, q: x 为整数;

(2) p: $x>3$, q: $x>5$;

(3) p: $a=0$, q: $ab=0$;

(4) p: 四边形的一组对边相等, q: 四边形为平行四边形;

(5) p: 四边形的对角线互相垂直, q: 四边形为菱形.

B 组

1. 用列举法写出集合 $A=\{x\in\mathbf{N} \mid |x-1|+|x-2|=7\}$.

2. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-2x=0\}$，$B=\{0, 1, 2\}$，求 $A\cap B$.

3. 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{Z} \mid 0\leqslant x<3\}$，$M=\{x\in\mathbf{Z} \mid x^2<9\}$，求 $P\cup M$.

4. 设全集 $U=\{x\in\mathbf{N} \mid x\geqslant 2\}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{N} \mid x^2\geqslant 5\}$，求 $\complement_U A$.

5. 已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，集合 $P=\{1, 3, 5\}$，$Q=\{1, 2, 4\}$，求$(\complement_U P)\cup Q$.

6. 设集合 $A=\{1, 2\}$，写出所有满足 $A\cup B=\{1, 2, 3\}$ 的集合 B.

7. 已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，集合 $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x \mid x=2a, a\in A\}$，求集合 $\complement_U(A\cup B)$中包含的元素个数.

8. 已知集合 $A=[-2, 2]$，$B=\{x \mid x\geqslant a\}$，且 $A\subsetneqq B$，求 a 的取值范围.

9. 下列各题中，p 是 q 的什么条件？

（1）p：$a+b>4$，q：$a>2$ 且 $b>2$；

（2）p：$a>b$，q：$a^2>b^2$；

（3）已知 m，n 是整数，p：m，n 均为偶数，q：$m+n$ 是偶数.

10. 判断下列命题的真假：

（1）$a=b$ 是$|a|=|b|$的必要条件；

（2）$a>b$ 是$a^3>b^3$ 的充要条件；

（3）两个三角形的两组对应角相等是这两个三角形相似的充要条件；

（4）三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$ 是这个三角形为直角三角形的充要条件；

（5）在$\triangle ABC$ 中，重心和垂心重合是$\triangle ABC$ 为等边三角形的必要条件；

（6）如果点 P 到点 A，B 的距离相等，则点 P 一定在线段 AB 的垂直平分线上.

C 组

1. 已知 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{(x, y) \mid x\in A, y\in A, x-y\in A\}$，求 B 中所含元素的个数.

2. 已知集合 $A=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 1, x, y\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x, y) \mid |x|\leqslant 2, |y|\leqslant 2, x, y\in\mathbf{Z}\}$，定义集合

$$A\oplus B=\{(x_1+x_2, y_1+y_2) \mid (x_1, y_1)\in A, (x_2, y_2)\in B\},$$

求 $A\oplus B$ 中元素的个数.

3. 若$\{1, \sqrt{a}\}\subseteq\{1, 2, 4, a^2\}$，求 a 的值.

4. 若$\{0, -1, 2a\}=\{a-1, -|a|, a+1\}$，求 a 的值.

5. 设 U 为全集，A，B 是集合，判断“存在集合 C，使得 $A\subseteq C$，$B\subseteq\complement_U C$”是“$A\cap B=\varnothing$”的什么条件.

人民教育出版社

数学是自己思考的产物．首先要能够思考起来，用自己的见解和别人的见解交换，会有很好的效果．

——陈省身

第二章 等式与不等式

本章导语

数量关系是数学中重要的研究对象，相等关系与不等关系是数学中最基本的数量关系，等式与不等式是表示数量关系的基本工具．而且，等式与不等式的有关知识，在日常生活中也有着广泛的应用．

例如，北京南站到天津站的城际铁路全程为 120 km，城际列车 C2017 的行驶时间为 30 min$\left(\text{即}\dfrac{30}{60}=\dfrac{1}{2}\text{ h}\right)$①．如果路程是 s km，时间是 t h，平均速度是 v km/h，则由 $v=\dfrac{s}{t}$ 可以算出 C2017 的平均速度

$$v=\frac{120}{\frac{1}{2}}=240.$$

因此也就知道，行驶时间更长的列车（如 C2201 需要 37 min），其平均速度一定比 240 km/h 小，即当 $t>\dfrac{1}{2}$ 时，一定有

$$v<240.$$

当然，我们在小学和初中已经学习过很多等式和不等式的知识，包括它们的性质等．本章我们将在用集合和逻辑的语言复习以前所学内容的基础上，了解更多等式和不等式的知识，包括一元二次不等式的解法、均值不等式等，这些都是高中数学的基础内容．

① 2018 年 8 月 17 日的数据，下同．

2.1 等式

2.1.1 等式的性质与方程的解集

1. 等式的性质

我们已经学习过等式的性质：

(1) 等式的两边同时加上同一个数或代数式，等式仍成立；

(2) 等式的两边同时乘以同一个不为零的数或代数式，等式仍成立.

尝试与发现

用符号语言和量词表示上述等式的性质：

(1) 如果 $a=b$，则对任意 c，都有 1 ________；

(2) 如果 $a=b$，则对任意不为零的 c，都有 2 ________.

因为减去一个数等于加上这个数的相反数，除以一个不为零的数等于乘以这个数的倒数，所以上述等式性质中的“加上”与“乘以”，如果分别改为“减去”与“除以”，结论仍成立.

2. 恒等式

尝试与发现

补全下列 (1) (2) 中的两个公式，然后将下列含有字母的等式进行分类，并说出分类的标准：

(1) $a^2-b^2=$ 3 ________ (平方差公式)；

(2) $(x+y)^2=$ 4 ________ (两数和的平方公式)；

(3) $3x-6=0$；

(4) $(a+b)c=ac+bc$；

(5) $m(m-1)=0$;

(6) $t^3+1=(t+1)(t^2-t+1)$.

如果从量词的角度来对以上 6 个等式进行分类的话，可以知道，等式 5 ________ 对任意实数都成立，而等式 6 ________ 只是存在实数使其成立．例如 $3x-6=0$ 只有 $x=2$ 时成立，x 取其他数时都不成立．

一般地，含有字母的等式，如果其中的字母取任意实数时等式都成立，则称其为恒等式，也称等式两边恒等．

恒等式是进行代数变形的依据之一．例如，因为 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ 对任意 x，y 都成立，所以可用其他代数式去替换其中的 x，y，等式仍会成立，若用 $-z$ 替换其中的 y，则

$$\begin{aligned}(x-z)^2&=x^2+2x(-z)+(-z)^2\\&=x^2-2xz+z^2,\end{aligned}$$

由此就得到了以前学过的两数差的平方公式．

例 1 化简 $(2x+1)^2-(x-1)^2$．

解 （方法一）可以利用两数和的平方公式与两数差的平方公式展开，然后合并同类项，即

$$\begin{aligned}&(2x+1)^2-(x-1)^2\\=&4x^2+4x+1-(x^2-2x+1)\\=&3x^2+6x.\end{aligned}$$

（方法二）可以将 $2x+1$ 和 $x-1$ 分别看成一个整体，然后使用平方差公式，即

$$\begin{aligned}&(2x+1)^2-(x-1)^2\\=&[(2x+1)+(x-1)][(2x+1)-(x-1)]\\=&3x(x+2)\\=&3x^2+6x.\end{aligned}$$

下面我们介绍另外一个经常会用到的恒等式：对任意的 x，a，b，都有

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

这个恒等式的证明，只需将左边展开然后合并同类项即可，留作练习．

可以利用这个恒等式来进行因式分解．给定式子 x^2+Cx+D，如果能找到 a 和 b，使得 $D=ab$ 且 $C=a+b$，则

$$x^2+Cx+D=(x+a)(x+b).$$

为了方便记忆，已知 C 和 D，寻找满足条件的 a 和 b 的过程，通常用

图 2-1-1 来表示：其中两条交叉的线表示对应数相乘后相加要等于 C. 也正因为如此，这种因式分解的方法称为“十字相乘法”.

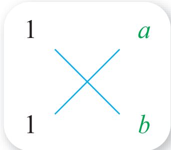


图 2-1-1

例如，对于式子 x^2+5x+6 来说，因为 $2\times3=6$ 且 $2+3=5$，所以

$$x^2+5x+6=\boxed{7}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

尝试与发现

证明恒等式

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd.$$

并由此探讨 Ex^2+Fx+G 的因式分解方法.

上述恒等式的证明，也只需将左边展开然后合并同类项即可. 据此也可进行因式分解. 例如，对于 $3x^2+11x+10$ 来说，因为 $1\times3=3$，$2\times5=10$，$1\times5+3\times2=11$，如图 2-1-2 所示，所以

$$3x^2+11x+10=(x+2)(3x+5).$$

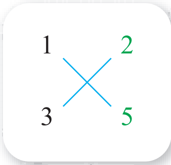


图 2-1-2

3. 方程的解集

我们知道，方程的**解**（或**根**）是指能使方程左右两边相等的未知数的值. 一般地，把一个方程所有解组成的集合称为这个方程的**解集**.

利用等式的性质和有关恒等式进行代数变形，可以得到一些方程的解集. 例如，对于方程 $3x+5=-1$ 来说，首先在等式两边同时加上 -5，可得

$$\boxed{8}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

然后在上述等式两边同时乘以 $\dfrac{1}{3}$，则得 $x=-2$，因此可知方程 $3x+5=-1$ 的解集为 $\{-2\}$.

不难知道，利用类似的方法可以得到所有一元一次方程的解集.

从小学开始我们就知道，任意两个非零的实数，它们的乘积不可能是零，因此：如果 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$.

利用这一结论，我们可以得到一些方程的解集. 例如，由方程 $(4x+1)(x-1)=0$ 可知 $4x+1=0$ 或 $x-1=0$，从而 $x=-\dfrac{1}{4}$ 或 $x=1$，因此方程 $(4x+1)(x-1)=0$ 的解集为 $\left\{-\dfrac{1}{4},\ 1\right\}$.

人民教育出版社

例 2 求方程 $x^2-5x+6=0$ 的解集.

解 因为 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，所以原方程可以化为

$$(x-2)(x-3)=0,$$

从而可知 $x-2=0$ 或 $x-3=0$，即 $x=2$ 或 $x=3$，因此所求解集为

$$\{2,\ 3\}.$$

想一想

一元二次方程的解集中一定有两个元素吗？

例 2 说明，如果一个一元二次方程可以通过因式分解化为

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

的形式，那么就能方便地得出原方程的解集了.

例 3 求关于 x 的方程 $ax=2$ 的解集，其中 a 是常数.

尝试与发现

能直接在等式 $ax=2$ 的两边同时除以 a，从而得到 $x=\dfrac{2}{a}$ 吗？为什么？

解 当 $a\neq0$ 时，在等式 $ax=2$ 的两边同时乘以 $\dfrac{1}{a}$，得 $x=\dfrac{2}{a}$，此时解集为 $\left\{\dfrac{2}{a}\right\}$.

当 $a=0$ 时，方程变为 $0x=2$，这个方程无解，此时解集为 $\varnothing$.

综上，当 $a\neq0$ 时，解集为 $\left\{\dfrac{2}{a}\right\}$；当 $a=0$ 时，解集为 $\varnothing$.

练习A

1. 求下列方程的解集：

   (1) $2-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{3}x+1$；　　(2) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3-x}{2}=\dfrac{1}{2}$；

   (3) $x^2+4x+4=0$；　　(4) $x^2+7x-8=0$.

2. 利用十字相乘法分解因式：

   (1) x^2+3x+2；　　(2) $x^2+2x-15$.

3. 求方程 $(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)=0$ 的解集.

4. 求证：对任意的 x，a，b，都有 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

5. 已知“任意 t 和 s，都有 $t^3+s^3=(t+s)(t^2-ts+s^2)$”是真命题，借助这个结论将 t^3-m^3 进行因式分解.

练习B

❶ 将 $(a+b)^3$ 展开，并由此得到 $(a-b)^3$ 的展开式.

❷ 将 $(a+b+c)^2$ 展开，并由此得到 $(a-b-c)^2$ 的展开式.

❸ 利用十字相乘法分解因式：

(1) $x^2+(a+2)x+2a$；　　(2) $x^2-(3+t)x+3t$.

❹ 求关于 x 的方程 $ax=x-1$ 的解集，其中 a 是常数.

❺ 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid ax=1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的值.

1 $a+c=b+c$　　2 $ac=bc$　　3 $(a+b)(a-b)$　　4 $x^2+2xy+y^2$

5 (1) (2) (4) (6)　　6 (3) (5)　　7 $(x+2)(x+3)$　　8 $3x=-6$

2.1.2 一元二次方程的解集及其根与系数的关系

1. 一元二次方程的解集

情境与问题

《九章算术》第九章“勾股”问题二十：今有邑方①不知大小，各中开门．出北门二十步有木，出南门一十四步，折而西行一千七百七十五步见木．问邑方几何．

根据题中的描述可作出示意图，如图 2-1-3 所示，其中 A 点代表北门，B 处是木，C 点代表南门，而且 $AB=20$，$CD=14$，$DE=$ 1 ________.

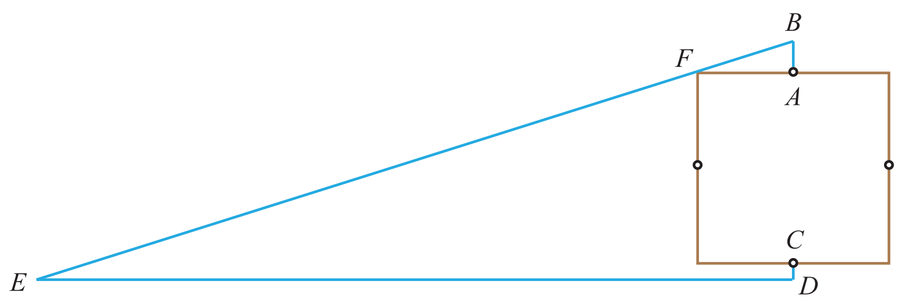


图 2-1-3

① 邑方：正方形小城.

如果设正方形的边长为 x 步，则有

$$AF=\frac{x}{2},$$

$$DB=20+x+14=x+34.$$

根据$\triangle ABF\backsim\triangle DBE$ 可知$\frac{AF}{DE}=\frac{AB}{DB}$，从而 $AF\cdot DB=AB\cdot DE$，因此

$$\frac{x}{2}(x+34)=20\times 1\ 775,$$

整理得 $x^2+34x-71\ 000=0$. 你会解这个方程吗?

我们知道，形如

$$ax^2+bx+c=0$$

的方程为一元二次方程，其中 a，b，c 是常数，且 $a\neq 0$.

从上一小节的内容可知，用因式分解法能得到一元二次方程的解集，但是用这种方法有时候并不容易，例如情境与问题中所得到的方程就是这种情形，此时该怎么办呢?

尝试与发现

你认为最简单的一元二次方程具有什么样的形式? 可以怎样得到这种方程的解集? 举例说明.

不难知道，如果一个一元二次方程可以化为

$$x^2=t$$

的形式，其中 t 为常数，那么这个方程的解集①是容易获得的.

例如，方程 $x^2=3$ 的解集为 $\{-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\}$，方程 $x^2=0$ 的解集为$\{0\}$，方程 $x^2=-2$ 的解集为$\varnothing$.

一般地，方程 $x^2=t$：

(1) 当 $t>0$ 时，解集为 2 ________________；

(2) 当 $t=0$ 时，解集为 3 ________________；

(3) 当 $t<0$ 时，解集为 4 ________________.

更进一步，形如 $(x-k)^2=t$（其中 k，t 是常数）的一元二次方程的解集也容易得到. 例如，由 $(x-1)^2=2$ 可知 $x-1=-\sqrt{2}$ 或 $x-1=\sqrt{2}$，从而

① 如不特别声明，本书中所说的一元二次方程的解均指的是实数解，下同.

人民教育出版社

$x=1-\sqrt{2}$ 或 $x=1+\sqrt{2}$，因此解集为 $\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$.

一般地，方程 $(x-k)^2=t$：

(1) 当 $t>0$ 时，解集为 5 ____________；

(2) 当 $t=0$ 时，解集为 6 ____________；

(3) 当 $t<0$ 时，解集为 7 ____________.

因此，对于一般的一元二次方程来说，只需要将其化为 $(x-k)^2=t$ 的形式，就可得到方程的解集.

尝试与发现

怎样将 $x^2+2x+3=0$ 化为 $(x-k)^2=t$ 的形式？动手试试看，并写出这个方程的解集.

我们知道，利用配方法可得

$$x^2+2x+3=x^2+2x+1+2=(x+1)^2+2,$$

因此，$x^2+2x+3=0$ 可以化为 $(x+1)^2=-2$，从而可知解集为 $\varnothing$.

事实上，利用配方法，总是可以将 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 化为 $(x-k)^2=t$ 的形式，过程如下：因为 $a\neq 0$，所以

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{\boxed{8}\ \_\_\_\_\_\_\_\_}{4a}, \end{aligned}$$

因此 $ax^2+bx+c=0$ 可以化为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\boxed{9}\ \_\_\_\_\_\_\_\_}{4a^2}.$$

从而可知，$\Delta=b^2-4ac$ 的符号情况决定了上述方程的解集情况：

(1) 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程的解集为

$$\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\};$$

(2) 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程的解集为 $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$；

(3) 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程的解集为 $\varnothing$.

一般地，$\Delta=b^2-4ac$ 称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 根的判

人民教育出版社

别式．由此可知，一元二次方程解集的情况完全由它的系数决定．

前述情境与问题中的方程可以化为 $(x+17)^2=71\ 289$，从而可解得 $x=250$ 或 $x=-284$（舍）．

例 1 求方程 $x-2\sqrt{x}-1=0$ 的解集．

分析 这不是一个一元二次方程，但是通过把 $\sqrt{x}$ 看成一个整体就可以转化为一个一元二次方程．

解 设 $\sqrt{x}=y$，则 $y\geqslant 0$，且原方程可变为

$$y^2-2y-1=0,$$

因此可知 $y=1+\sqrt{2}$ 或 $y=1-\sqrt{2}$（舍）．

从而 $\sqrt{x}=1+\sqrt{2}$，即 $x=3+2\sqrt{2}$，所以原方程的解集为 $\{3+2\sqrt{2}\}$．

2. 一元二次方程根与系数的关系

我们知道，当一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的解集不是空集时，这个方程的解可以记为

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{①}.$$

尝试与发现

计算 x_1+x_2 和 x_1x_2 的值，并填空：

$$\begin{cases} x_1+x_2=\underline{10\qquad\qquad}, \\ x_1x_2=\underline{11\qquad\qquad}. \end{cases}$$

这一结论通常称为一元二次方程根与系数的关系．

例 2 已知一元二次方程 $2x^2+3x-4=0$ 的两根为 x_1 与 x_2，求下列各式的值：

（1）$x_1^2+x_2^2$；（2）$|x_1-x_2|$．

尝试与发现

求出 x_1 和 x_2，并由此给出上述（1）和（2）的答案．

解 由一元二次方程根与系数的关系，得

① 当 $\Delta=0$ 时，$x_1=x_2$，按照初中的习惯，我们仍称方程有两个相等的实数根．

$$x_1+x_2=-\frac{3}{2},\ x_1x_2=-2.$$

（1）由上有

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\times(-2)=\frac{25}{4}.$$

（2）因为

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4\times(-2)=\frac{41}{4},$$

所以

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\frac{\sqrt{41}}{2}.$$

练习A

1. 已知 $A=\{x\,|\,x^2-16=0\}$，$B=\{x\,|\,x^2-x-12=0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
2. 已知关于 x 的方程 $x^2-3mx+1=0$ 有两个相等的实数根，求实数 m 的取值集合.
3. 求下列方程的解集：

（1）$2x^4-7x^2+3=0$；　　（2）$\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1=0$.

练习B

1. 已知关于 x 的方程 $mx^2-3x+1=0$ 的解集为空集，求实数 m 的取值范围.
2. 已知方程 $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ 的两根为 x_1 与 x_2，求下列各式的值：

（1）$x_1^2x_2+x_1x_2^2$；　　（2）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

3. 已知关于 x 的方程 $x^2-2x+m-1=0$ 的两根同号，求实数 m 的取值范围.
4. 求关于 x 的方程 $x^2+a=0$ 的解集.
5. 《九章算术》第九章“勾股”问题十二：今有户①不知高、广，竿不知长、短．横之不出四尺，从②之不出二尺，邪之适出．问户高、广、邪③各几何.

1 1 775	2 $\{-\sqrt{t},\ \sqrt{t}\}$	3 $\{0\}$	4 $\varnothing$	5 $\{k-\sqrt{t},\ k+\sqrt{t}\}$	
6 $\{k\}$	7 $\varnothing$	8 $4ac-b^2$	9 b^2-4ac	10 $-\dfrac{b}{a}$	11 $\dfrac{c}{a}$

① 户：门.　② 从：通“纵”.　③ 邪：指门的对角线长.

2.1.3 方程组的解集

1. 方程组的解集

尝试与发现

将 $x-y=1$ 看成含有两个未知数 x，y 的方程：

(1) 判断 $(x, y)=(3, 2)$（指的是 $\begin{cases}x=3,\\ y=2,\end{cases}$ 下同）是否是这个方程的解；

(2) 判断这个方程的解集是有限集还是无限集.

因为 $3-2=1$，所以 $(x, y)=(3, 2)$ 是方程 $x-y=1$ 的解，而且方程 $x-y=1$ 的解集是无限集.

我们知道，

$$\begin{cases}x-y=1, & ①\\ x+y=3 & ②\end{cases}$$

是一个方程组，而且通过①+②可以消去 y，得到 $x=2$；②−①可以消去 x，得到 $y=1$，从而得出这个方程组的解为 $(x, y)=(2, 1)$.

一般地，将多个方程联立，就能得到方程组. 方程组中，每个方程的解集的交集称为这个**方程组的解集**.

因此，方程组 $\begin{cases}x-y=1,\\ x+y=3\end{cases}$ 的解集是

$$\{(x, y) \mid x-y=1\} \cap \{(x, y) \mid x+y=3\}=\{(2, 1)\}.$$

由上可以看出，求方程组解集的过程要不断应用等式的性质，常用的方法是以前学过的消元法.

情境与问题

《九章算术》第八章“方程”问题一：今有上禾[①]三秉[②]，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗[③]；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗. 问上、中、下禾实一秉各几何.

请列方程组求解这个问题.

① 禾：粮食作物的总称.　② 秉：束.　③ 斗：计量单位，1 斗=10 升.

人民教育出版社

设上禾实一秉 x 斗，中禾实一秉 y 斗，下禾实一秉 z 斗，根据题意，可列方程组

$$\begin{cases}3x+2y+z=39,\\ \boxed{1}\ \underline{\qquad\qquad\qquad},\\ \boxed{2}\ \underline{\qquad\qquad\qquad}.\end{cases}$$

由此可解得这个方程组的解集为 $\boxed{3}$ ________.

拓展阅读

《九章算术》中的代数成就简介

《九章算术》是中国古典数学最重要的著作，全书分为九章，共 246 个问题，包含了算术、代数、几何等多方面的成就.

代数方面，《九章算术》的第八章为“方程”，但指的是一次方程组，情境与问题中的题是其中的第一个问题.《九章算术》给出了解这个问题的“方程术”，其实质是将方程中未知数的系数与最后的常数项排成长方形的形式，然后采用“遍乘直除”的算法来解，过程可表示如下.

$$\begin{matrix}3&2&1&39\\2&3&1&34\\1&2&3&26\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}3&2&1&39\\0&5&1&24\\0&4&8&39\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}3&2&1&39\\0&5&1&24\\0&0&4&11\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}4&0&0&37\\0&4&0&17\\0&0&4&11\end{matrix}$$

其中第一步是将第二行的数乘以 3，然后不断地减去第一行，直到第一个数变为 0 为止，然后对第三行做同样的操作，其余的步骤都类似.

不难看出，“遍乘直除”的目的在于消元. 按照我国著名数学史专家李文林先生的说法，《九章算术》的方程术，是世界数学史上的一颗明珠.

《九章算术》在代数方面的另一项成就是引进了负数，在用“方程术”解方程组时，可能出现减数大于被减数的情形，为此，《九章算术》给出了“正负术”，即正负数的加减运算法则.

另外，“开方术”也是《九章算术》的代数成就之一，其实质是给出了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的数值求解步骤. 而且，“开方术”中还提到：若开之不尽者，为不可开. 这是意识到了无理数的存在.

你知道其他地区类似的代数成就出现的时间吗？感兴趣的同学请查阅有关书籍或网络进行了解吧！

尝试与发现

设方程组 $\begin{cases}x-y+z=1,\\x+y-3z=5\end{cases}$ 的解集为 A. 判断 $(x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 0)$ 和 $(x,\ y,\ z)=(4,\ 4,\ 1)$ 是否是集合 A 中的元素；判断 A 是一个有限集还是一个无限集.

$(x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 0)$ 和 $(x,\ y,\ z)=(4,\ 4,\ 1)$ 均为上述方程组的解，而且，如果我们将 z 看成已知数，就可以解得

$$x=z+3,\ y=2z+2,$$

这样一来，方程组的解集可以写成

$$A=\{(x, y, z) \mid x=z+3, y=2z+2, z\in\mathbf{R}\}.$$

不难看出，这个集合含有无限多个元素，是一个无限集.

这说明，当方程组中未知数的个数大于方程的个数时，方程组的解集可能含有无穷多个元素. 此时，如果将其中一些未知数看成常数，那么其他未知数往往能用这些未知数表示出来.

例 1 求方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, & ③ \\ y=x+1 & ④ \end{cases}$$

的解集.

解 将④代入③，整理得 $x^2+x-2=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-2$.

利用④可知，$x=1$ 时，$y=2$；$x=-2$ 时，$y=-1$.

所以原方程组的解集为

$$\{(1, 2), (-2, -1)\}.$$

例 2 求方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=2, & ⑤ \\ (x-1)^2+(y-2)^2=1 & ⑥ \end{cases}$$

的解集.

尝试与发现

观察方程组中两个方程之间的联系，给出消元的方案.

解 由⑤－⑥，整理得

$$x+2y-3=0. \quad ⑦$$

由⑦解得 $x=3-2y$. 代入⑤，并整理，得 **4** ________________，解得

5 ________________.

利用⑦可知，**6** ________________________________.

因此，原方程组的解集为 $\left\{(1, 1), \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)\right\}$.

2. 用信息技术求方程和方程组的解集

利用计算机软件可以迅速求出方程和方程组的解集.

在 GeoGebra① 中的“运算区”用 solve 命令，就可以得到方程和方程组的解集信息.

图 2-1-4 所示是求解示例，其中第 2 个示例中的“{}”表示解集为空集，即不存在实数解；第 5 个示例表示将 x，y 看成未知数，求解方程组

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\ x+y-3z=5.\end{cases}$$

其他结果请读者自行尝试与解读.

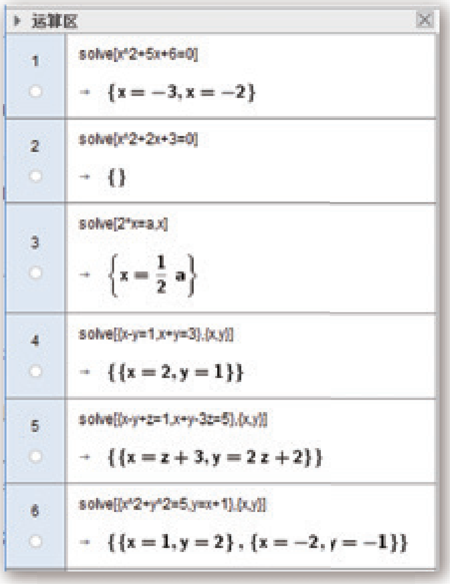


图 2-1-4

练习A

1. 求下列方程组的解集：

(1) $\begin{cases}2x+y=0,\\ 3x-2y=14;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2(x-3y)+1=0,\\ \dfrac{3x-1}{2}-5y=3.\end{cases}$

2. 已知 $A=\{(x,\ y)\mid x+y=6\}$，$B=\{(x,\ y)\mid x-2y=0\}$，求 $A\cap B$.

3. 求下列方程组的解集：

(1) $\begin{cases}x+y=3,\\ y+z=4,\\ z+x=5;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3x+y-2z=2,\\ 2y+3z=0,\\ 2x-y+z=11.\end{cases}$

4. 今有人合伙买羊，每人出 5 钱，差 45 钱；每人出 7 钱，差 3 钱. 问合伙人数、羊价各是多少（选自《九章算术》）.

5. 《毛诗》《春秋》《周易》书，九十四册共无余，《毛诗》一册三人读，《春秋》一册四人呼，《周易》五人读一本，要分每样几多书（选自《算法统宗》）？

练习B

1. 已知 $A=\{(x,\ y)\mid ax+y=2\}$，$B=\{(x,\ y)\mid x+by=3\}$，且 $A\cap B=\{(1,\ 1)\}$，求 a，b 的值.

① GeoGebra 是一个开源软件，可以免费下载、使用，软件的用法以及相关课件的下载，请参考本书的教师教学用书或本套教材的官方配套资源网站.

2 求下列方程组的解集：

(1) $\begin{cases} y^2+2x=0, \\ x-3y-\dfrac{5}{2}=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x-2y=1; \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=12, \\ x-2y+2=0. \end{cases}$

3 某校新成立 A，B 两个社团，第一年社团成员数相同，以后每年 A 社团以相同的增长率招收新成员，而 B 社团每年都招收第一年成员数的 80%．已知第二年 A，B 两个社团成员数之和为 310，第三年 A 社团成员数是 B 社团成员数的 0.65 倍．试求 A 社团成员数的增长率及 B 社团每年招收的成员数．

4 甲同学买 5 个练习本、2 个活页夹、8 支签字笔共用去 52 元，乙同学买同样的 3 个练习本、4 个活页夹、2 支签字笔共用去 48 元．求活页夹的单价与签字笔的单价之差．

5 你知道吗？配平化学方程式其实可以通过解方程组来完成．例如，Mg 在 O_2 中燃烧生成 MgO，可以设方程式为

$$x\mathrm{Mg}+y\mathrm{O_2} \xlongequal{\text{点燃}} z\mathrm{MgO},$$

其中 x，y，z 均为正整数，且它们的最大公约数为 1．由方程式两边的同种原子数目相等可得

$$\begin{cases} x=z, \\ 2y=z. \end{cases}$$

令 $y=1$，则 $z=2$，$x=2$．因此，配平后的化学方程式为

$$2\mathrm{Mg}+\mathrm{O_2} \xlongequal{\text{点燃}} 2\mathrm{MgO}.$$

用这种方法配平化学方程式

$$(\quad)\ \mathrm{Fe}+(\quad)\ \mathrm{H_2O(g)} \xlongequal{\text{高温}} (\quad)\ \mathrm{Fe_3O_4}+(\quad)\ \mathrm{H_2}.$$

1 $2x+3y+z=34$　　2 $x+2y+3z=26$　　3 $\left\{\left(\dfrac{37}{4},\ \dfrac{17}{4},\ \dfrac{11}{4}\right)\right\}$

4 $5y^2-12y+7=0$　　5 $y=1$ 或 $y=\dfrac{7}{5}$　　6 $y=1$ 时，$x=1$；$y=\dfrac{7}{5}$时，$x=\dfrac{1}{5}$

习题2-1A

1 下列等式中，哪些是恒等式？

(1) $a+b=b+a$；　　(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$；

(3) $(x+2y)^2=x^2+4y^2$；　　(4) $x^2-2y^2=(x-\sqrt{2}y)(x+\sqrt{2}y)$.

2 求方程$\dfrac{2(x-1)}{3}+\dfrac{1-3x}{2}=2$ 的解集.

3 求下列方程的解集：

(1) $2x^2-9=0$；　　(2) $(x+1)^2+2=0$；

(3) $(x+1)(x-2)=0$；　　(4) $x^2=2x$.

4 判定集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$ 和 $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 之间的关系.

5 已知关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根之和为 3，两根之积为 2，求 b，c 的值.

6 求下列方程组的解集：

(1) $\begin{cases} x+2y=4, \\ 2x-3y=5; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+2y=4, \\ 4x-3y=3. \end{cases}$

7 某店家经销甲、乙两件商品，国庆节期间，甲商品的利润率为 10%，乙商品的利润率为 8%，两件商品共可获利 150 元；国庆节后，甲商品的利润率为 15%，乙商品的利润率为 10%，两件商品共可获利 200 元. 问两件商品的进价分别是多少元.

8 现用一根铁丝恰好可做成一个高为 10 cm 的长方体框架，而且长方体的体积为 1 800 cm^3，表面积为 900 cm^2，求铁丝的长度.

习题2-1B

1 求方程 $(x+2)(x-3)(x^2-x+2)=0$ 的解集.

2 写出 $(a+2b)^3$ 和 $(a-2b)^3$ 的展开式.

3 求方程 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}$ 的解集.

4 已知集合 $A=\{-2\}$，$B=\{x\mid x^2+2x+a-1=0\}$，且 $A\cap B=B$，求所有满足条件的实数 a 组成的集合.

5 若关于 x 的方程 $\dfrac{1}{x-1}=1+\dfrac{k}{x-1}$ 的解集是空集，求 k 的值.

6 求下列方程的解集：

(1) $x^2+x-1=0$；　　(2) $-2x^2+2x-1=0$；

(3) $(x+1)^3-x^3=0$.

7 求下列方程的解集：

(1) $6x^4-17x^2+12=0$；　　(2) $2x^3-x^2-6x=0$.

8 甲、乙两位同学求方程组 $\begin{cases} mx+y=5, \\ 2x-ny=13 \end{cases}$ 的解集 A 时，甲因看错了 m 解得 $A=\left\{\left(\dfrac{7}{2}, -2\right)\right\}$，乙因看错了 n 解得 $A=\{(3, -7)\}$，求 m，n 的值.

⑨ 求下列方程组的解集：

(1) $\begin{cases} x^2+2y^2=3, \\ 2x-3y=5; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-4y^2=15, \\ x+2y=5. \end{cases}$

⑩ 已知 $ac\neq 0$，关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根之和为 2，两根之积为 $\frac{3}{4}$.

(1) 求关于 x 的方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两根之和与两根之积；

(2) 求关于 x 的方程 $cx^2-bx+a=0$ 的两根之和与两根之积.

⑪ 当 k 为何值时，关于 x 的方程 $\frac{x}{x-1}=\frac{k-2x}{x^2-x}$ 的解集中只含有一个元素?

⑫ 已知方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根为 x_1 与 x_2，求下列各式的值：

(1) $x_1^3+x_2^3$；　　(2) $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$.

⑬ 已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 有实数根，并且两根的平方和比两根之积大 21，求实数 m 的值.

习题2-1C

① 求方程 $(x^2+x)^2+x^2+x=30$ 的解集.

② 已知 $\begin{cases} 3x-y-z=0, \\ 2x+y-z=0, \end{cases}$ 求 $\frac{x^2+y^2}{(x+y)z}$ 的值.

③ 已知关于 x 的方程 $x^2-2(k+1)x+k^2-2=0$ 的两根为 x_1 与 x_2，若 $|x_1|=|x_2|$，求实数 k 的值.

④ 求关于 x 的方程 $ax=b$ 的解集，其中 a，b 是常数.

⑤ 求关于 x 的方程 $x^2+ax+1=0$ 的解集，其中 a 是常数.

人民教育出版社

2.2 不等式

2.2.1 不等式及其性质

情境与问题

你见过图 2-2-1 中的高速公路指示牌吗？左边的指示牌是指对应的车道只能供小客车行驶，而且小客车的速率 v_1（单位：km/h，下同）应该满足

$$100 \leqslant v_1 \leqslant 120;$$

右边的指示牌是指对应的车道可供客车和货车行驶，而且车的速率 v_2 应该满足

1 ________________.

图 2-2-1

在现实世界里，量与量之间的不等关系是普遍的，不等式是刻画不等关系的工具. 我们用数学符号“$\neq$”“$>$”“$<$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”连接两个数或代数式，以表示它们之间的不等关系，含有这些不等号的式子，称为不等式.

在上述不等式符号中，要特别注意“$\geqslant$”“$\leqslant$”. 事实上，任意给定两个实数 a，b，那么

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a > b \text{ 或 } a = b,$$

$a \leqslant b \Leftrightarrow$ 2 ________________.

想一想

$5 \geqslant 3$，$2 \geqslant 2$，$2 \leqslant 2$ 这三个命题都是真命题吗？

怎样理解两个实数之间的大小呢？

我们已经知道，实数与数轴上的点一一对应，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数. 一般地，如果点 P 对应的数为 x，则称 x 为点 P 的坐标，并记作 $P(x)$.

另外，数轴上的点往数轴的正方向运动时，它所对应的实数会变大，这就是说，两个数在数轴上对应的点的相对位置决定了这两个数的大小. 如图 2-2-2 所示的数轴中，$A(a)$，$B(b)$，不难看出

$$b > 1 > 0 > a.$$

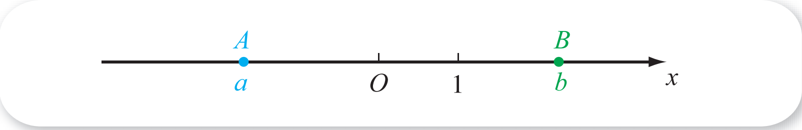


图 2-2-2

此外，我们也知道，一个数加上一个正数，相当于数轴上对应的点向正方向移动了一段距离；一个数减去一个正数（即加上一个负数），相当于数轴上对应的点向负方向移动了一段距离．由此可以看出，要比较两个实数 a，b 的大小，只要考察 $a-b$ 与 0 的相对大小就可以了，即

$$\boxed{\begin{aligned} &a-b<0\Leftrightarrow a<b,\\ &a-b=0\Leftrightarrow a=b,\\ &a-b>0\Leftrightarrow a>b. \end{aligned}}$$

初中的时候，我们就已经归纳出了不等式的三个性质：

性质 1　如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$．

性质 2　如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$．

性质 3　如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$．

尝试与发现

你能利用前面的知识，给出性质 1 的直观理解以及这三个性质的证明吗？

事实上，如图 2-2-3 所示，$a>b$ 是指点 A 在点 B 的右侧，$a+c$ 和 $b+c$ 表示点 A 和点 B 在数轴上做了相同的平移，平移后得到的点 A' 和 B' 的相对位置，与 A 和 B 的相对位置是一样的，因此 $a+c>b+c$．

图 2-2-3

性质 1 可以用如下方式证明：因为

$$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b,$$

又因为 $a>b$，所以 $a-b>0$，从而

$$(a+c)-(b+c)>0,$$

因此 $a+c>b+c$．

性质 2 可以用类似的方法证明：因为

$$ac-bc=(a-b)c,$$

又因为 $a>b$，所以 $a-b>0$，而 $c>0$，因此

$$(a-b)c>0,$$

因此 $ac-bc>0$，即 $ac>bc$.

性质 3 的证明留作练习.

尝试与发现

用“充分不必要”“必要不充分”“充要”填空：

（1）$a>b$ 是 $a+c>b+c$ 的 3 ________ 条件；

（2）如果 $c>0$，则 $a>b$ 是 $ac>bc$ 的 4 ________ 条件；

（3）如果 $c<0$，则 $a>b$ 是 $ac<bc$ 的 5 ________ 条件.

在不等式的证明与求解中，我们还经常用到以下不等式的性质.

性质 4 如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.

直观上，如图 2-2-4 所示，点 A 在点 B 的右侧，点 B 在点 C 的右侧，因此点 A 必定在点 C 的右侧.

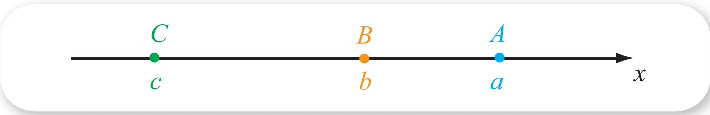


图 2-2-4

证明 因为

$$a-c=(a-b)+(b-c),$$

又因为 $a>b$，所以 $a-b>0$；且 $b>c$，所以 $b-c>0$，因此

$$(a-b)+(b-c)>0,$$

从而 $a-c>0$，即 $a>c$.

性质 4 通常称为不等关系的**传递性**. 我们前面在判断 $x^2>-1$ 等类似命题的真假时就用过不等关系的传递性.

性质 5 $a>b \Leftrightarrow b<a$.

这只要利用 $a-b=-(b-a)$ 就可以证明，请读者自行尝试.

另外，值得注意的是，上述不等式性质对任意满足条件的实数都成立，因此我们可以用任意满足条件的式子去代替其中的字母.

例 1 比较 x^2-x 和 $x-2$ 的大小.

解 因为

$$(x^2-x)-(x-2)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1,$$

又因为 $(x-1)^2\geqslant 0$，所以 $(x-1)^2+1\geqslant 1>0$，从而

$$(x^2-x)-(x-2)>0,$$

因此 $x^2-x>x-2$.

例 1 的证明中用了配方法，这种方法经常用于式子变形，大家应熟练掌握.

需要注意的是，前面我们证明不等式性质和解答例 1 的方法，其实质都是通过判断两式之差的符号来比较两式的大小，这种方法通常称为**作差法**. 在证明不等式时，当然也可直接利用已经证明过的不等式性质等. 从已知条件出发，综合利用各种结果，经过逐步推导最后得到结论的方法，在数学中通常称为**综合法**. 下面我们用综合法来得出几个常用的不等式性质的推论.

推论 1 如果 $a+b>c$，那么 $a>c-b$.

证明 $a+b>c \Rightarrow a+b+(-b)>c+(-b) \Rightarrow a>c-b$.

推论 1 表明，不等式中的任意一项都可以把它的符号变成相反的符号后，从不等式的一边移到另一边. 推论 1 通常称为不等式的**移项法则**.

推论 2 如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$.

证明 根据性质 1 有

$$a>b \Rightarrow a+c>b+c,$$

$$c>d \Rightarrow b+c>b+d,$$

再根据性质 4 可知

$$a+c>b+d.$$

我们把 $a>b$ 和 $c>d$（或 $a<b$ 和 $c<d$）这类不等号方向相同的不等式，称为同向不等式. 推论 2 说明，两个同向不等式的两边分别相加，所得到的不等式与原不等式同向. 很明显，推论 2 可以推广为更一般的结论：

几个同向不等式的两边分别相加，所得到的不等式与原不等式同向.

推论 3 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $ac>bd$.

证明 根据性质 2 有

$$a>b,\ c>0 \Rightarrow ac>bc,$$

$$c>d,\ b>0 \Rightarrow bc>bd,$$

再根据性质 4 可知

$$ac>bd.$$

很明显，这个推论也可以推广为更一般的结论：

几个两边都是正数的同向不等式的两边分别相乘，所得到的不等式与原不等式同向.

推论 4 如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n$（$n\in\mathbf{N}$，$n>1$）.

这个结论的证明只要多次使用推论 3 的结论即可.

推论 5 如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

证明 假设 $\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}$，即

$$\sqrt{a}<\sqrt{b}\text{或}\sqrt{a}=\sqrt{b},$$

根据推论 4 和二次根式的性质，得

$$a<b\text{ 或 }a=b.$$

这都与 $a>b$ 矛盾，因此假设不成立，从而$\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

尝试与发现

证明推论 5 中不等式的方法具有什么特征?

可以看出，推论 5 中证明方法的实质是：首先假设结论的否定成立，然后由此进行推理得到矛盾，最后得出假设不成立. 这种得到数学结论的方法通常称为**反证法**，反证法是一种间接证明的方法.

例 2 （1）已知 $a>b$，$c<d$，求证：$a-c>b-d$；

（2）已知 $a>b$，$ab>0$，求证：$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

（3）已知 $a>b>0$，$0<c<d$，求证：$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

证明 （1）因为 $a>b$，$c<d$，所以

$$a>b,\ -c>-d.$$

根据推论 2，得

$$a-c>b-d.$$

（2）因为 $ab>0$，所以$\frac{1}{ab}>0$.

又因为 $a>b$，所以

$$a\cdot\frac{1}{ab}>b\cdot\frac{1}{ab},$$

即$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，因此$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

（3）因为 $0<c<d$，根据（2）的结论，得

$$\frac{1}{c}>\frac{1}{d}>0.$$

又因为 $a>b>0$，所以根据推论 3 可知

$$a\cdot\frac{1}{c}>b\cdot\frac{1}{d},$$

即$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

可以看出，例 2 中所使用的方法是综合法. 综合法中，最重要的推理形式为 $p\Rightarrow q$，其中 p 是已知或者已经得出的结论，所以综合法的实质就是不

断寻找必然成立的结论.

尝试与发现

你能证明$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$吗？用综合法证明这个结论方便吗？你觉得可以怎样证明这个结论？

直接证明$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$并不容易，因此可以考虑用反证法，请同学们自行尝试．不过，为了方便起见，人们通常用下述方式来证明这个结论：

要证$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$，只需证明

$$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2,$$

展开得 $10+2\sqrt{21}<20$，即$\sqrt{21}<5$，这只需证明

$$(\sqrt{21})^2<5^2,$$

即 $21<25$．因为 $21<25$ 成立，所以$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$成立.

上述这种证明方法通常称为**分析法**．分析法中，最重要的推理形式是“要证 p，只需证明 q”，这可以表示为 $p\Leftarrow q$，其中 p 是需要证明的结论，所以分析法的实质就是不断寻找结论成立的充分条件．$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$的证明过程也可简写为：因为

$$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}\Leftarrow(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2\Leftarrow\sqrt{21}<5\Leftarrow 21<25,$$

又因为 $21<25$ 成立，所以结论成立.

例 3 已知 $m>0$，求证：$\dfrac{1+m}{3+m}>\dfrac{1}{3}$.

证明 因为 $m>0$，所以 $3+m>0$，从而

$$\frac{1+m}{3+m}>\frac{1}{3}\Leftarrow 3(1+m)>3+m\Leftarrow m>0,$$

又因为已知 $m>0$，所以结论成立.

练习A

1. 正文中不等式的性质和推论，如果都加上等号，结论仍然成立吗？把成立的结论重新叙述一遍.
2. 判断下列命题的真假：

   (1) 当 $x=3$ 时，$x\geqslant 3$；　　(2) 当 $x\geqslant 3$ 时，$x=3$；

   (3) 当 $x\geqslant 3$ 且 $x\leqslant 3$ 时，$x=3$.

3 用“>”或“<”填空：

(1) $x+5$____$x+2$；

(2) $a<b\Rightarrow 3a$____$3b$；

(3) $a<b\Rightarrow -5a$____$-5b$；

(4) 当 c____0 时，$a>b\Rightarrow ac<bc$；

(5) $a>b\Rightarrow a-1$____$b-2$；

(6) $a>b>0$，$c<d<0\Rightarrow ac$____bd.

4 求证：如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$.

5 用反证法证明 $\sqrt{6}-\sqrt{5}<2-\sqrt{3}$.

练习B

1 利用正比例函数给出不等式性质 2 和性质 3 的直观解释.

2 用“>”或“<”填空：

(1) $a>b>0\Rightarrow a^2$____b^2；

(2) $a<b<0\Rightarrow a^2$____b^2；

(3) $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$，$ac<0\Rightarrow ad$____bc；

(4) $a<b<0\Rightarrow \frac{b}{a}$____$1$；

(5) $a<b<0\Rightarrow \frac{1}{a}$____$\frac{1}{b}$；

(6) $a<0<b\Rightarrow \frac{1}{a}$____$\frac{1}{b}$.

3 证明 $a^2+9b^2\geqslant 6ab$，并说明等号成立的条件.

4 已知 a，b，m 都是正实数，$b>a$，求证：$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

1 $60\leqslant v_2\leqslant 100$　2 $a<b$ 或 $a=b$　3 充要　4 充要　5 充要

2.2.2 不等式的解集

1. 不等式的解集与不等式组的解集

从初中数学中我们已经知道，能够使不等式成立的未知数的值称为不等式的解，解不等式的过程中要不断地使用不等式的性质.

一般地，不等式的所有解组成的集合称为**不等式的解集**．对于由若干个不等式联立得到的不等式组来说，这些不等式的解集的交集称为**不等式组的解集**.

例 1 求不等式组

$$\begin{cases}2x+1\geqslant -9, & ①\\ \dfrac{x}{3}-2>2x+3 & ②\end{cases}$$

的解集.

解 ①式两边同时加上-1，得

$$2x\geqslant -10,$$

这个不等式两边同时乘以$\frac{1}{2}$，得 $x\geqslant -5$，因此①的解集为 $[-5,\ +\infty)$.

类似地，可得②的解集为 1 ____________.

又因为

$$[-5,\ +\infty)\cap(-\infty,\ -3)=[-5,\ -3),$$

所以原不等式组的解集为 $[-5,\ -3)$.

2. 绝对值不等式

我们知道，数轴上表示数 a 的点与原点的距离称为数 a 的绝对值，记作 $|a|$. 而且：一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，0 的绝对值是 0.

一般地，含有绝对值的不等式称为**绝对值不等式**. 例如，

$$|x|>3,\ |x-1|\leqslant 2$$

都是绝对值不等式.

尝试与发现

(1) 你能给出 $|x|>3$ 的解集吗？

(2) 试总结出 $m>0$ 时，关于 x 的不等式 $|x|>m$ 和 $|x|\leqslant m$ 的解集.

根据绝对值的定义可知，$|x|>3$ 等价于

$$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x>3\end{cases}\text{或}\begin{cases}x<0,\\ -x>3,\end{cases}$$

即 $x>3$ 或 $x<-3$，因此 $|x|>3$ 的解集为

$$(-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty).$$

不等式 $|x|>3$ 的解集也可由绝对值的几何意义得到：因为 $|x|$ 是数轴上表示数 x 的点与原点的距离，所以数轴上与原点的距离大于 3 的点对应的所有数组成的集合就是 $|x|>3$ 的解集，从而由图 2-2-5 可知所求解集为

$(-\infty, -3)\cup(3, +\infty)$.

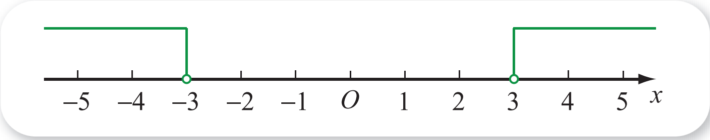


图 2-2-5

用类似方法可知，当 $m>0$ 时，关于 x 的不等式 $|x|>m$ 的解集为数轴上与原点的距离大于 m 的点对应的所有数组成的集合，因此解集为

$$(-\infty, -m)\cup(m, +\infty);$$

关于 x 的不等式 $|x|\leqslant m$ 的解集为

2 ________________.

尝试与发现

你能给出 $|a-1|\leqslant 2$ 的解集吗？

如果将 $a-1$ 当成一个整体，比如令 $x=a-1$，则

$$|a-1|\leqslant 2\Leftrightarrow|x|\leqslant 2,$$

因此 $|a-1|\leqslant 2$ 的解集可以通过求解 $|x|\leqslant 2$ 得到，请读者自行尝试.

下面我们来探讨 $|a-1|$ 的几何意义，并由此得出不等式 $|a-1|\leqslant 2$ 的解集.

尝试与发现

任意给出几个 a 的值，求出对应的 $|a-1|$ 的值，并借助数轴考虑 $|a-1|$ 的几何意义.

当 $a=-2$ 时，$|a-1|=|-2-1|=3$，而且在数轴上，表示 -2 的点与表示 1 的点的距离是 3；当 $a=3$ 时，$|a-1|=|3-1|=2$，而且在数轴上，表示 3 的点与表示 1 的点的距离是 2. 因此，如果数轴上表示 a 的点为 A，表示 1 的点为 B，则 A，B 之间的距离为 $|a-1|$，如图 2-2-6 所示.

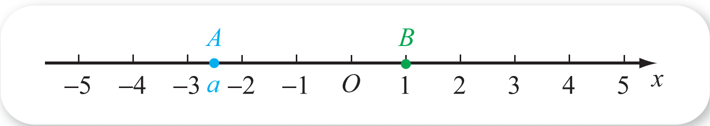


图 2-2-6

这样一来，数轴上与表示 1 的点的距离小于或等于 2 的点对应的所有数组成的集合就是 $|a-1|\leqslant 2$ 的解集，又因为数轴上与表示 1 的点的距离等于 2 的点对应的数分别为 -1 和 3，因此由图 2-2-6 可知 $|a-1|\leqslant 2$ 的解集为

$$[-1, 3].$$

一般地，如果实数 a，b 在数轴上对应的点分别为 A，B，即 $A(a)$，$B(b)$，则线段 AB 的长为

$$\boxed{AB=|a-b|,}$$

这就是数轴上两点之间的**距离公式**．更进一步，如果线段 AB 的中点 M 对应的数为 x，则由 $AM=MB$ 可知 $|a-x|=|x-b|$，因此：当 $a<b$ 时，有 $a<x<b$，从而

$$x-a=b-x,$$

所以

$$\boxed{x=\frac{a+b}{2};}$$

当 $a\geqslant b$ 时，类似可得上式仍成立．这就是数轴上的**中点坐标公式**.

例 2 设数轴上点 A 与数 3 对应，点 B 与数 x 对应，已知线段 AB 的中点到原点的距离不大于 5，求 x 的取值范围.

解 因为 AB 的中点对应的数为 $\frac{3+x}{2}$，所以由题意可知

$$\left|\frac{3+x}{2}\right|\leqslant 5,$$

即 $|3+x|\leqslant 10$，因此 $-10\leqslant 3+x\leqslant 10$，所以 $-13\leqslant x\leqslant 7$，因此 x 的取值范围是

3 ________________.

探索与研究

求下列不等式的解集：

(1) $|x-1|+|x-2|<5$；

(2) $|x-1|+|x-2|\geqslant 3$；

(3) $|x-1|+|x-2|>\frac{1}{2}$；

(4) $|x-1|+|x-2|<\frac{1}{3}$.

练习A

1. 求下列不等式的解集：

(1) $3x>2x-6$；

(2) $2x+1>\frac{x}{2}-3$.

② 求下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases}2x+1>0,\\3x-2\leqslant 0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}-2x-5\geqslant 0,\\\sqrt{2}x-3\sqrt{2}>0.\end{cases}$

③ 求下列绝对值不等式的解集：

(1) $|2x|-3\geqslant 0$；　　(2) $|1-2x|<2$.

④ 已知数轴上，$A(3)$，$B(-5)$，求线段 AB 的长以及线段 AB 的中点 M 的坐标.

练习B

① 求下列绝对值不等式的解集：

(1) $1+|x|<0$；　　(2) $|x+3|+2\leqslant 2$.

② 已知数轴上，$A(-1)$，$B(x)$，$C(6)$.

(1) 若 A 与 C 关于点 B 对称，求 x 的值；

(2) 若线段 AB 的中点到 C 的距离小于 5，求 x 的取值范围.

③ 求关于 x 的不等式的解集：

(1) $2x+a>0$；　　(2) $ax>1$.

1 $(-\infty,\ -3)$　　2 $[-m,\ m]$　　3 $[-13,\ 7]$

2.2.3 一元二次不等式的解法

情境与问题

汽车在行驶中，由于惯性，刹车后还要继续向前滑行一段距离才能停止，一般称这段距离为“刹车距离”. 刹车距离是分析交通事故的一个重要依据.

在一个限速为 40 km/h 的弯道上，甲、乙两辆汽车相向而行，发现情况不对，同时刹车，但还是相碰了. 事后现场勘查，测得甲车的刹车距离略超过 6 m，乙车的刹车距离略超过 10 m. 已知甲、乙两种车型的刹车距离 s m 与车速 v km/h 之间的关系分别为

$$s_{甲}=\frac{1}{100}v^2-\frac{1}{10}v,\quad s_{乙}=\frac{1}{200}v^2-\frac{1}{20}v.$$

试判断甲、乙两车有无超速现象.

不难看出，要判断甲、乙两车是否超速，就是要得到它们车速的取值范围，也就是要解不等式

$$\frac{1}{100}v^2-\frac{1}{10}v>6 \text{ 和 } \boxed{1}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

即 $v^2-10v-600>0$ 和 $\boxed{2}$____________.

一般地，形如

$$ax^2+bx+c>0$$

的不等式称为**一元二次不等式**，其中 a，b，c 是常数，而且 $a\neq 0$. 一元二次不等式中的不等号也可以是“$<$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”等.

如何求一个一元二次不等式的解集呢？

让我们从简单的一元二次不等式开始探讨. 首先来看一元二次不等式

$$x(x-1)>0. \qquad ①$$

尝试与发现

任意选定一些数，看它们是否是不等式①的解，由此给出解这个不等式的方法.

注意到只有两个同号的数相乘，结果才能是正数，也就是说，$ab>0$ 当且仅当

$$\begin{cases}a>0,\\ b>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}a<0,\\ b<0.\end{cases}$$

因此，不等式①可以转化为两个不等式组

$$\begin{cases}x>0,\\ x-1>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x<0,\\ x-1<0.\end{cases}$$

解得 $x>1$ 或 $x<0$，因此，不等式①的解集为

$$(-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty).$$

用类似的方法可以求得不等式

$$(x+1)(x-1)<0 \qquad ②$$

的解集，但此时的依据是：$ab<0$ 当且仅当

$$\begin{cases}a<0,\\ b>0\end{cases} \text{或} \boxed{3}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

因为不等式②可以转化为两个不等式组

$$\begin{cases}x+1<0,\\ x-1>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x+1>0,\\ x-1<0.\end{cases}$$

不难解得 $x\in\varnothing$或 $\boxed{4}$____________，因此不等式②的解集为

$\boxed{5}$____________.

人民教育出版社

一般地，如果 $x_1<x_2$，则不等式 $(x-x_1)(x-x_2)<0$ 的解集是

$$(x_1,\ x_2),$$

不等式 $(x-x_1)(x-x_2)>0$ 的解集是

$$(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty).$$

例 1 求不等式 $x^2-x-2>0$ 的解集.

解 因为

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2),$$

所以原不等式等价于 $(x+1)(x-2)>0$，因此所求解集为

$$(-\infty,\ -1)\cup(2,\ +\infty).$$

回到情境与问题中的不等式，$v^2-10v-600>0$ 可以化为

$$(v+20)(v-30)>0,$$

因此甲车的车速 $v>30$；而 $v^2-10v-2\ 000>0$ 可以化为

6 ________________，

因此乙车的车速 7 ________________. 由此可见，乙车肯定超速了.

上述我们介绍的一元二次不等式的解法，使用的主要工具是因式分解. 当然，这种方法只有在一元二次不等式是特殊类型时才比较方便，那么一般情况该怎么办呢?

尝试与发现

通过代入数值验证的方法，猜测以下一元二次不等式的解集，由此总结求一元二次不等式解集的一般方法：

(1) $x^2<-1$；　　(2) $x^2>-2$；　　(3) $x^2<9$.

因为任何一个实数的平方一定是一个非负数，因此上述尝试与发现中 (1) 的解集为 8 ________________，(2) 的解集为 9 ________________.

对于 $x^2<9$ 来说，两边同时开根号可得 $\sqrt{x^2}<\sqrt{9}$，即

$$|x|<3,$$

因此 $-3<x<3$，从而得到 (3) 的解集为 $(-3,\ 3)$.

这就是说，一般的一元二次不等式可以通过配方法来求得解集.

例 2 求下列不等式的解集：

(1) $x^2+4x+1\geqslant0$；　　(2) $x^2-6x-1\leqslant0$；

(3) $-x^2+2x-1<0$；　　(4) $2x^2+4x+5>0$.

解 (1) 因为

$$x^2+4x+1=x^2+4x+4-4+1=(x+2)^2-3,$$

所以原不等式可化为 $(x+2)^2-3\geqslant0$，即

$$(x+2)^2 \geqslant 3,$$

两边开平方得 $|x+2| \geqslant \sqrt{3}$，从而可知

$$x+2 \leqslant -\sqrt{3} \text{ 或 } x+2 \geqslant \sqrt{3},$$

因此 $x \leqslant -2-\sqrt{3}$ 或 $x \geqslant -2+\sqrt{3}$，所以原不等式的解集为

$$(-\infty,\ -2-\sqrt{3}] \cup [-2+\sqrt{3},\ +\infty).$$

（2）因为

$$x^2-6x-1=x^2-6x+9-9-1=(x-3)^2-10,$$

所以原不等式可化为 $(x-3)^2-10 \leqslant 0$，即

$$(x-3)^2 \leqslant 10,$$

两边开平方得 $|x-3| \leqslant \sqrt{10}$，从而可知

$$-\sqrt{10} \leqslant x-3 \leqslant \sqrt{10},$$

因此 $3-\sqrt{10} \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{10}$，所以原不等式的解集为

$$[3-\sqrt{10},\ 3+\sqrt{10}].$$

（3）原不等式可化为

$$x^2-2x+1>0,$$

又因为 $x^2-2x+1=(x-1)^2$，所以上述不等式可化为

$$(x-1)^2>0.$$

注意到只要 $x \neq 1$，上述不等式就成立，所以原不等式的解集为

$$(-\infty,\ 1) \cup (1,\ +\infty).$$

（4）原不等式可以化为

$$x^2+2x+\frac{5}{2}>0.$$

因为

$$x^2+2x+\frac{5}{2}=(x+1)^2+\frac{3}{2},$$

所以原不等式可以化为 $(x+1)^2+\dfrac{3}{2}>0$，即

$$(x+1)^2>-\frac{3}{2},$$

不难看出，这个不等式恒成立，即原不等式的解集为 **R**.

由上可知，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a \neq 0$）通过配方总是可以化为

$$(x-h)^2>k \text{ 或 } (x-h)^2<k$$

的形式，然后根据 k 的正负等知识，就可以得到原不等式的解集.

例 3 求不等式$\dfrac{2x+1}{x-2}\geqslant 1$的解集.

解 由题意知 $x-2\neq 0$，因此 $(x-2)^2>0$，原不等式两边同时乘以 $(x-2)^2$ 可得

$$(2x+1)(x-2)\geqslant(x-2)^2 \text{ 且 } x-2\neq 0,$$

即 $(x+3)(x-2)\geqslant 0$ 且 $x\neq 2$，因此所求不等式的解集为

$$(-\infty,\ -3]\cup(2,\ +\infty).$$

例 3 说明，有些不等式通过变形之后，可以借助于一元二次不等式的解法来解，请读者自行总结其中的规律.

练习A

1. 求下列不等式的解集：

   (1) $x(x-3)<0$；　　(2) $(x+1)(1-x)\geqslant 0$；

   (3) $x^2+6x-7\leqslant 0$；　　(4) $x^2-8x+16<0$.

2. 求下列不等式的解集：

   (1) $x^2+2x-5<0$；　　(2) $x^2-4x-2\geqslant 0$；

   (3) $x^2+6x+10\leqslant 0$；　　(4) $x^2-8x+16\leqslant 0$；

   (5) $-x^2+8x-1\leqslant 0$；　　(6) $2x^2-4x+3<0$.

3. 求下列不等式的解集：

   (1) $\dfrac{x+1}{x-1}>0$；　　(2) $\dfrac{1}{x-1}>1$.

练习B

1. 已知 $A=\{x\mid 4-3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid x^2+2x>0\}$，求 $A\cap B$.

2. 求下列不等式的解集：

   (1) $\dfrac{1}{2}x^2-4x+6<0$；　　(2) $4x^2-4x+1\geqslant 0$.

3. 写出 3 个一元二次不等式，使它们的解集都是集合 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ 的子集.

4. 求不等式$\dfrac{x+1}{(x-1)^2}>1$的解集.

5. 求关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a\leqslant 0$ 的解集.

1 $\dfrac{1}{200}v^2-\dfrac{1}{20}v>10$　2 $v^2-10v-2\ 000>0$　3 $\begin{cases}a>0,\\ b<0\end{cases}$　4 $-1<x<1$

5 $(-1,\ 1)$　6 $(v+40)(v-50)>0$　7 $v>50$　8 $\varnothing$　9 $\mathbf{R}$

2.2.4 均值不等式及其应用

给定两个正数 a，b，数$\frac{a+b}{2}$称为 a，b 的**算术平均值**；数$\sqrt{ab}$称为 a，b 的**几何平均值**[①]．两个数的算术平均值，实质上是这两个数在数轴上对应的点的中点坐标，那么几何平均值有什么几何意义呢？两个数的算术平均值和几何平均值之间有什么相对大小关系呢？

尝试与发现

（1）假设一个矩形的长和宽分别为 a 和 b，求与这个矩形周长相等的正方形的边长，以及与这个矩形面积相等的正方形的边长，并比较这两个边长的大小；

（2）如下表所示，再任意取几组正数，算出它们的算术平均值和几何平均值，猜测一般情况下两个数的算术平均值与几何平均值的相对大小，并根据（1）说出结论的几何意义．

a	1	2				
b	1	4				
$\frac{a+b}{2}$	1	3				
$\sqrt{ab}$	1	$2\sqrt{2}$				

从具体实例中可以看出，两个正数的算术平均值大于或等于它们的几何平均值．一般地，我们有如下结论．

均值不等式　如果 a，b 都是正数，那么

$$\boxed{\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},}$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立．

证明　因为 a，b 都是正数，所以

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0,$$

① 多个正数的算术平均值和几何平均值可以类似地定义．例如，a，b，c 的算术平均值为$\frac{a+b+c}{3}$，几何平均值为$\sqrt[3]{abc}$．

人民教育出版社

即 $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

而且，等号成立时，当且仅当 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0$，即 $a=b$.

值得注意的是，均值不等式中的 a，b 可以是任意正实数，因此我们可以代入任意满足条件的数或式子，比如

$$\frac{6+7}{2} \geqslant \boxed{1}\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

一定是正确的.

均值不等式也称为基本不等式（基本不等式中的 a，b 还可以为零），其实质是：两个正实数的算术平均值不小于它们的几何平均值. 那么，均值不等式有什么几何意义呢?

将均值不等式两边平方可得

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab,$$

如果矩形的长和宽分别为 a 和 b，那么矩形的面积为 $\boxed{2}\underline{\qquad\qquad}$，$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ 可以看成与矩形周长相等的正方形的面积，因此均值不等式的一个几何意义为：所有周长一定的矩形中，正方形的面积最大.

想一想

你能推广这个结论吗? 比如所有周长相等的三角形中，什么样的三角形面积最大? 平面上，周长相等的所有封闭图形中，什么样的图形面积最大?

探索与研究

如图 2-2-7 所示的半圆中，AB 为直径，O 为圆心. 已知 $AC=a$，$BC=b$，D 为半圆上一点，且 $DC \perp AB$，算出 OD 和 CD，给出均值不等式的另一个几何意义.

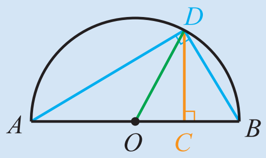


图 2-2-7

例 1 已知 $x>0$，求 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的最小值，并说明 x 为何值时 y 取得最小值.

解 因为 $x>0$，所以根据均值不等式有

$$x+\frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}=2,$$

其中等号成立当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$，即 $x^2=1$，解得 $x=1$ 或 $x=-1$（舍）.

因此 $x=1$ 时，y 取得最小值 2.

例 2 已知 $ab>0$，求证：$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqslant 2$，并推导出等号成立的条件.

证明 因为 $ab>0$，所以 $\dfrac{b}{a}>0$，$\dfrac{a}{b}>0$.

根据均值不等式，得

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}}=2,$$

即$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2$.

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a^2=b^2$ 时，等号成立．因为 $ab>0$，所以等号成立的条件是 $a=b$.

例 3　（1）已知矩形的面积为 100，则这个矩形的长、宽各为多少时，矩形的周长最短？最短周长是多少？

（2）已知矩形的周长为 36，则这个矩形的长、宽各为多少时，它的面积最大？最大面积是多少？

分析　在（1）中，矩形的长与宽的积是一个常数，要求长与宽之和的两倍的最小值；在（2）中，矩形的长与宽之和的两倍是一个常数，要求长与宽之积的最大值.

解　（1）设矩形的长与宽分别为 x 与 y，依题意得 $xy=100$.

因为 $x>0$，$y>0$，所以

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}=\sqrt{100}=10,$$

所以 $2(x+y) \geqslant 40$.

当且仅当 $x=y$ 时，等号成立，由$\begin{cases} x=y, \\ xy=100 \end{cases}$可知此时 $x=y=10$.

因此，当矩形的长和宽都是 10 时，它的周长最短，最短周长为 40.

（2）设矩形的长与宽分别为 x 与 y，依题意得 $2(x+y)=36$，即

$$x+y=18.$$

因为 $x>0$，$y>0$，所以

$$\frac{18}{2}=\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$

因此$\sqrt{xy} \leqslant 9$，即 $xy \leqslant 81$．当且仅当 $x=y$ 时，等号成立，由

$\begin{cases} x=y, \\ x+y=18 \end{cases}$可知此时 3 ____________.

因此，当矩形的长和宽都是 9 时，它的面积最大，最大面积为 81.

例 3 的结论可以表述为：

当两个正数的积为常数时，它们的和有最小值；

当两个正数的和为常数时，它们的积有最大值.

例 4　已知 $x \in (-1, 3)$，求 $y=(1+x)(3-x)$ 的最大值，以及 y 取得最大值时 x 的值.

解 当 $x\in(-1,3)$ 时，$-1<x<3$，因此 $1+x>0$，$3-x>0$.

由均值不等式可得

$$\sqrt{(1+x)(3-x)}\leqslant\frac{1+x+3-x}{2}=2,$$

从而 $(1+x)(3-x)\leqslant 4$，即 $y\leqslant 4$.

当且仅当 $1+x=3-x$，即 $x=1$ 时，等号成立.

从而当 $x=1$ 时，y 取得最大值 4.

例 5 已知 a，b 是实数，求证：

$$a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

并说明等号成立的条件.

证明 因为

$$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0,$$

所以 $a^2+b^2-2ab\geqslant 0$，即

$$a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

等号成立时，当且仅当 $(a-b)^2=0$，即 $a=b$.

例 5 的结论也是经常要用的. 不难看出，均值不等式与例 5 的结论既有联系，又有区别. 区别在于例 5 中去掉了 a，b 是正数的条件，联系在于均值不等式可以看成例 5 结论的一种特殊情况.

例 6 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，求证：

(1) $(a+b)^2\geqslant 4ab$；

(2) $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$.

证明 (1) 因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，两边同时加上 $2ab$，得

$$a^2+b^2+2ab\geqslant 4ab,$$

即

$$(a+b)^2\geqslant 4ab.$$

(2) 因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，两边同时加上 a^2+b^2，得

$$2(a^2+b^2)\geqslant a^2+b^2+2ab,$$

即

$$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2.$$

探索与研究

用 Excel 或其他计算机软件，完成下列数学实验：

(1) 任取多组三个正数 a，b，c，计算 $\frac{a+b+c}{3}$ 和 $\sqrt[3]{abc}$，比较它们的大小，总结出一般规律；

(2) 对四个正数、五个正数做类似的实验，总结出普遍规律.

练习A

1. 已知 $x>0$，求 $y=x+\frac{3}{x}$ 的最小值，并说明 x 为何值时 y 取得最小值.
2. 已知 $ab>0$，求证：$\frac{b}{3a}+\frac{3a}{b}\geqslant 2$，并推导出等号成立的条件.
3. （1）把 49 写成两个正数的积，当这两个正数各取何值时，它们的和最小？
   （2）把 12 写成两个正数的和，当这两个正数各取何值时，它们的积最大？

练习B

1. 已知 $x\in(-2, 5)$，求 $y=(2+x)(5-x)$ 的最大值，以及 y 取得最大值时 x 的值.
2. 已知 $x<0$，求 $y=x+\frac{1}{x}$ 的最大值，以及 y 取得最大值时 x 的值.
3. 已知 a，b 都是正数，求证：$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$.
4. 用一段长为 l m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜地（墙的长大于 l m），矩形的长、宽各为多少时，菜地的面积最大？并求出这个最大值.

1 $\sqrt{42}$　　2 ab　　3 $x=y=9$

习题2-2A

1. 求不等式 $3x-1>-\frac{x}{2}+2$ 的解集.
2. 已知 $a\neq b$，比较 a^2+ab 与 $3ab-b^2$ 的大小，并证明.
3. 判断 $\frac{a}{b}>0$ 是 $ab>0$ 的什么条件.
4. 求不等式组 $\begin{cases}x+1>0,\\ 2x+1\geqslant 0,\\ -x+3>0\end{cases}$ 的解集.
5. 求下列不等式的解集：
   （1）$(x-1)(x+8)\leqslant 0$；　　（2）$x^2+5x+4>0$；
   （3）$x^2-4x-7>0$；　　（4）$2x^2-8x+16<0$.
6. 求下列绝对值不等式的解集：
   （1）$|1-2x|\geqslant 3$；　　（2）$2-|1-x|\leqslant 0$.
7. 求 $y=4x^2+\frac{1}{x^2}$ 的最小值，以及 y 取得最小值时 x 的值.

人民教育出版社

8 已知 $x\in(0,+\infty)$，求 $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x}$ 的最小值，以及 y 取得最小值时 x 的值.

习题2-2B

1 比较 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ 与 $2\sqrt{3}-1$ 的大小.

2 已知不等式 $ax-1>x+2$ 的解集为 $(2,+\infty)$，求 a 的值.

3 已知 $a\in(1,3)$，$b\in(2,3)$，分别求 $a+b$，$a-b$，$a-2b$，ab，$\dfrac{a}{b}$ 的取值范围.

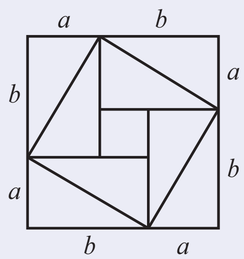
4 已知 $A=\{x\mid x<3\}$，$B=\{x\mid 2x+1<a\}$，$A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

5 求证：$a^2+3b^2\geqslant 2b(a+b)$.

6 已知 $x^2-2mx+m\geqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，求 m 的取值范围.

7 已知 $-x^2+ax+b\geqslant 0$ 的解集是 $[-2,3]$，求 $x^2-5ax+b<0$ 的解集.

8 利用图示说明不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 成立，并作出不等式中等号成立时相应的图示.



（第 8 题）

9 已知 $a>0$，$b>0$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$，求 ab 的最小值.

10 已知关于 x 的不等式 $\dfrac{2x-a}{x-2}\leqslant -1$ 的解集是 $\left[\dfrac{5}{3},2\right)$，求 a 的值.

11 已知 $x\in(0,+\infty)$，求 $y=1-2x-\dfrac{4}{x}$ 的最大值.

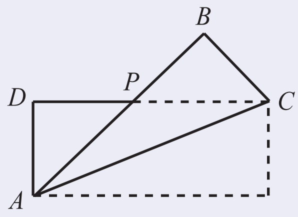
习题2-2C

1 已知 a，b，c 都是正实数，求证：$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

2 已知使不等式 $x^2+(a-1)x-a\leqslant 0$ 成立的任意一个 x，都满足不等式 $3x+1>0$，求实数 a 的取值范围.

3 已知 $x\in(1,+\infty)$，求 $y=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$ 的最小值，以及 y 取得最小值时 x 的值.

4 设矩形 $ABCD$（其中 $AB>BC$）的周长为 24，如图所示，把它沿对角线 AC 对折后，AB 交 DC 于点 P. 设 $AB=x$，求$\triangle ADP$ 的最大面积.



（第 4 题）

5 已知 a，b 都是正数，且 $a+b=1$，求$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值.

6 设桌面上有一个由铁丝围成的封闭曲线，周长是 $2L$. 回答下面的问题：

（1）当封闭曲线为平行四边形时，用直径为 L 的圆形纸片是否能完全覆盖这个平行四边形？请说明理由.

（2）求证：当封闭曲线是四边形时，正方形的面积最大.

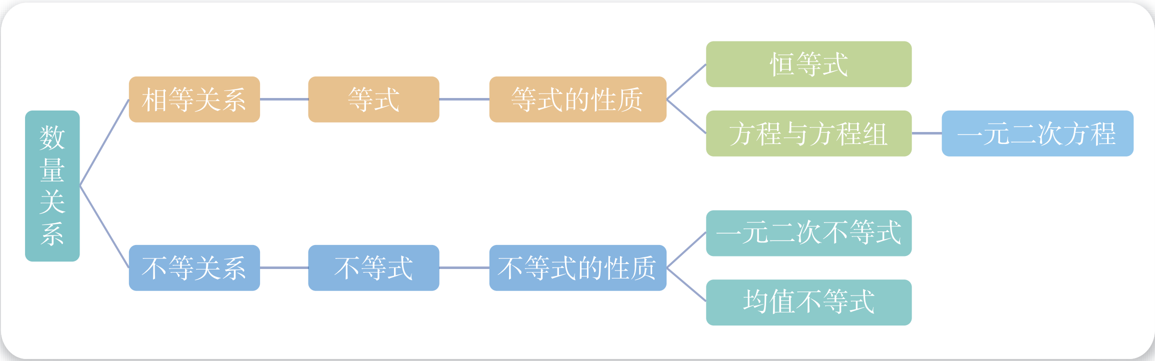
人民教育出版社

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们学习了描述数量关系的等式和不等式的有关内容，等式中学习了等式的性质，以及恒等式、方程与方程组、一元二次方程等；不等式中学习了不等式的性质，以及一元二次不等式、均值不等式等.

依照知识之间的联系，我们可以作出如下的知识结构图.



上述知识结构图还可以进一步细化.

结合自己的学习心得，发挥你的想象力和创造力，为本章的知识重新设计出一份独特的知识结构图，然后和同学交流制作的心得吧！

02 课题作业

（1）从学过的内容可以看出，等式与不等式之间有着密切的联系，等式的性质与不等式的性质也有类似之处. 查阅有关资料，按照自己的理解，以报告的形式，整理出等式与不等式之间的联系，为后续学习函数、方程和不等式之间的联系做好准备.

（2）我们知道，一元一次方程 $ax+b=0$（$a\neq 0$）的解为 $x=-\dfrac{b}{a}$，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）有实数解时，其解为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 一个自然的问题是：一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$（$a\neq 0$）有解时，是否也有类似的求根公式呢？更高次数的多项式方程呢？

人民教育出版社

类似的内容曾经引发了许多数学家的兴趣，也正是得益于广大数学工作者的努力，这一方面的研究取得了丰硕的成果．查阅有关书籍或者网络，与同学一起分工合作，了解有关知识，并将知识整理成演讲材料，与其他同学交流、分享．

03 复习题

A 组

1. 求下列方程的解集：

（1）$3(x-2)^2=x(x-2)$；　　（2）$x^2-2x+\dfrac{7}{x^2-2x}=8$.

2. 已知 $a\neq0$，方程 $x^2+bx+a=0$ 有一个根是 $-a$，求 $a-b$ 的值.

3. 已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}y^2-4x=0,\\ y-kx-1=0\end{cases}$ 的解集中只有一个元素，求实数 k 的值.

4. 已知 $\left(3,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 和 $(4,\ \sqrt{3})$ 都是集合 $A=\{(x,\ y)\mid ax^2-by^2=1\}$ 中的元素，求实数 a，b 的值.

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $|m|x^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围.

6. 已知 $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y=4$，求 $3x+2y$ 的值.

7. 下述不等式中，解集为 $\{x\mid 10<x<50\}$ 的是（　　）.

（A）$|x+10|<50$　　（B）$|x-10|<50$

（C）$|x+30|<20$　　（D）$|x-30|<20$

8. 已知 $a>b>0$，下列不等式中正确的是（　　）.

（A）$\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$　　（B）$ab<b^2$

（C）$-a^2<-ab$　　（D）$\dfrac{1}{a-1}<\dfrac{1}{b-1}$

9. （1）比较 $\dfrac{2x}{x^2+1}$ 与 1 的大小，并证明；

（2）已知 a，b 都是正实数，且 $a\neq b$，试比较 a^3+b^3 与 ab^2+a^2b 的大小，并证明.

10. 求下列不等式的解集：

（1）$\dfrac{2x-3}{x+5}>0$；　　（2）$\dfrac{5}{x+5}\leqslant 1$.

11. 已知数轴上，$A(x)$，$B(2)$，且 $AB=\dfrac{7}{2}$，求 x 的值.

12. 已知数轴上，$A(x)$，$B(-1)$，且线段 AB 的中点到原点的距离大于 5，求 x 的取值范围.

13. 求 $y=\dfrac{x^2}{x^4+2}$的最大值，以及 y 取得最大值时 x^2 的值.

14. 已知 $x\in(-2,+\infty)$，求 $y=x+\dfrac{16}{x+2}$的最小值.

15. 如图，要在长 25 m 的墙 EF 的一边，通过砌墙来围一个矩形花园 $ABCD$，与围墙平行的一边 BC 上要预留 3 m宽的入口（如图中 MN 所示，入口不用砌墙），用能砌 46 m 长墙的材料砌墙，当矩形的长 BC 为多少时，矩形花园的面积为 299 m^2？

（第 15 题）

B 组

1. 已知 a，b，c 是△ABC 的三边长，关于 x 的方程$\dfrac{1}{2}x^2+\sqrt{b}\,x+c-\dfrac{1}{2}a=0$ 的解集中只有一个元素，方程 $3cx+2b=2a$ 的根为 $x=0$.

（1）判断△ABC 的形状；

（2）若 a，b 为关于 x 的方程 $x^2+mx-3m=0$ 的两个实数根，求实数 m 的值.

2. 已知关于 x 的方程 $x^2-mx+2m-1=0$ 的两个实数根的平方和为 7，求 m 的值.

3. 已知 α 和 β 是方程 $x^2+2x-5=0$ 的两根，求 $\alpha^2+\alpha\beta+2\alpha$ 的值.

4. 求下列方程组的解集：

（1）$\begin{cases}4x^2-9y^2=15,\\2x-3y=5;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x^2+4y^2=5,\\xy=2.\end{cases}$

5. 判断 $a>b$ 是 $ac^2>bc^2$ 的什么条件.

6. 已知 $x\in(0,+\infty)$，求 $y=\dfrac{-2x^2+x-3}{x}$的最大值，以及 y 取得最大值时 x 的值.

7. 已知点 P 是以 AB 为直径的圆上任意一点，求 $PA+PB$ 的最大值.

8. 求下列不等式的解集：

（1）$\dfrac{1-x}{x+2}\geqslant 0$；　　（2）$(x+3)(x^2-4)\leqslant 0$.

人民教育出版社

9. 已知集合 $A=\{x \mid a<x<a^2-2\}$，$B=(1,\ 5)$.

（1）若 $A \subseteq B$，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $B \subsetneqq A$，求实数 a 的取值范围.

10. 为净化水质，向一个游泳池加入某种化学药品，加药后池水中该药品的浓度 C（单位：mg/L）随时间 t（单位：h）的变化关系为 $C=\dfrac{20t}{t^2+4}$，则经过多少小时后池水中药品浓度达到最大？

11. 已知点 $P(x,\ y)$ 在一次函数 $y=-2x+4$ 的图象上运动，求它的横、纵坐标之积的最大值，以及此时点 P 的坐标.

12. 已知 $x \in [0,\ 1]$，求 $y=x\sqrt{1-x^2}$ 的最大值.

13. 某工厂准备建造一个长方体无盖蓄水池，其容积为 4 800 m^3，深度为 3 m. 如果池底造价为 150 元/m^2，池壁造价为 120 元/m^2，怎样设计水池能使总造价最低？最低造价是多少元？

14. 有一支队伍长 L m，以速率 v m/h 匀速前进. 排尾的传令兵因传达命令赶赴排头，到达排头后立即返回，往返速率不变. 回答下列问题：

（1）如果传令兵行进的速率为整个队伍行进速率的 2 倍，求传令兵回到排尾时所走的路程；

（2）如果传令兵回到排尾时，全队正好前进了 L m，求传令兵行走的路程.

C 组

1. 已知 $a>b>c$，$a+b+c=0$，求证：$\dfrac{c}{a-c}>\dfrac{c}{b-c}$.

2. 求证：$x_1>x_2$ 是 $x_1^3>x_2^3$ 的充要条件.

3. 某电话号码可以看成一个八位数，将前四位数组成的数与后四位数组成的数相加得 14 741，将前三位数组成的数与后五位数组成的数相加得 59 453，求此电话号码对应的八位数.

4. 求关于 x 的不等式组的解集：

（1）$\begin{cases} x+1>0, \\ x-a \leqslant 0; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{4} \geqslant \dfrac{1}{6}, \\ 2x<b. \end{cases}$

5. 求下列关于 x 的不等式的解集：

（1）$ax>b$；　　（2）$ax \leqslant b$.

在中学的数学课本里，一些基本的概念是逐步地被引导进来的，要把基本的概念了解清楚，可以说是学好数学的第一个步骤．如果概念还没有理解清楚，就急急忙忙地去证明定理、做习题，那是没有不碰壁的．

——苏步青

第三章

函　数

人民教育出版社

本章导语

我们在初中已经学习过一些函数的知识，比如一次函数、二次函数、反比例函数等，并了解了函数的一些简单应用.

但是，仅以初中的函数知识解决不了比较复杂的函数问题.

例如，如果向如图 1 所示的容器中倒水，且任意相等的时间间隔内所倒的水体积相等，则容器内水面的高度 y 是时间 t 的函数. 而且，也容易看出 y 随着 t 的增大而增大. 那么，这个函数的图象到底是什么样子的呢？是如图 2 所示还是如图 3 所示？

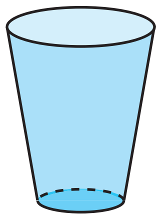


图 1

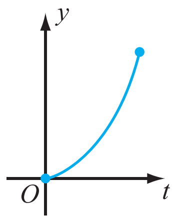


图 2

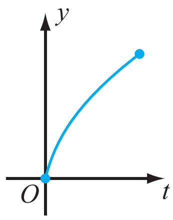


图 3

再例如，在政府文件中，我们经常可以看到有关经济增长与投资、消费的内容. 比如，《国务院关于促进创业投资持续健康发展的若干意见》（国发〔2016〕53 号）指出：“近年来，我国创业投资快速发展，不仅拓宽了创业企业投融资渠道、促进了经济结构调整和产业转型升级，增强了经济发展新动能，也提高了直接融资比重、拉动了民间投资服务实体经济，激发了创业创新、促进了就业增长.”

从这个文件中可以看出，投资能够促进经济的发展，那么能否用函数来描述两者之间的关系呢？

这一章我们将用前面的集合、逻辑等知识来进一步学习函数，掌握更多的函数实例与应用，理解研究一般函数的方法，了解数学建模的一般步骤等.

人民教育出版社

3.1　函数的概念与性质

3.1.1　函数及其表示方法

1. 函数的概念

我们已经学习过一些函数的知识，例如已经总结出：在一个变化过程中，数值发生变化的量称为变量；在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么就称 y 是 x 的函数.

再例如，我们知道 $y=2x$ 是正比例函数，$y=-3x-1$ 是一次函数，$y=-\dfrac{2}{x}$ 是反比例函数，$y=x^2+2x-3$ 是二次函数，等等.

情境与问题

（1）国家统计局的课题组公布，如果将 2015 年中国创新指数记为 100，近些年来中国创新指数的情况如下表所示.

年度	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
中国创新指数	105.3	112.3	123.8	131.3	138.9	147.0	155.7	165.3

以 y 表示年度值，i 表示中国创新指数的取值，则 i 是 y 的函数吗？如果是，这个函数用数学符号可以怎样表示？

（2）利用医疗仪器可以方便地测量出心脏在各时刻的指标值，据此可以描绘出心电图，如图 3-1-1 所示. 医生在看心电图时，会根据图形的整体形态来给出诊断结果（如根据两个峰值的间距来得出心率等）.

图 3-1-1

如果用 t 表示测量的时间，v 表示测量的指标值，则 v 是 t 的函数吗？如果是，这个函数用数学符号可以怎样表示？

初中实际上是用变量的观点和解析式来描述函数的，但从情境与问题中的两个实例可知，初中的方法有一定的局限性：情境与问题中的 i 是 y 的函数，v 是 t 的函数，但是这两个函数与初中的函数有所不同，比如都很难用一个解析式表示，而且每个变量的取值范围也有了限制，等等.

一般地，给定两个非空实数集 A 与 B，以及对应关系 f，如果对于集合 A 中的每一个实数 x，在集合 B 中都有唯一确定的实数 y 与 x 对应，则称 f 为定义在集合 A 上的一个**函数**，记作

$$y=f(x),\ x\in A,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，自变量取值的范围（即数集 A）称为这个函数的**定义域**.

如果自变量取值 a，则由对应关系 f 确定的值 y 称为函数在 a 处的函数值，记作

$$y=f(a)\ \text{或}\ y|_{x=a}.$$

所有函数值组成的集合

$$\{y \mid y=f(x),\ x\in A\}$$

称为函数的**值域**.

函数的这种定义强调的是“对应关系”，对应关系也可用其他小写英文字母如 g，h 等表示.

一般地，如果两个函数表达式表示的函数定义域相同，对应关系也相同（即对自变量的每一个值，两个函数表达式得到的函数值都相等），则称这两个函数表达式表示的就是同一个函数. 例如

$$y=\sqrt{x^2},\ x\in\mathbf{R}\ \text{与}\ g(x)=|x|,\ x\in\mathbf{R}$$

表示同一个函数.

拓展阅读

函数定义的演变过程简介

在现代数学以及其他相关学科中，函数都是非常重要甚至是不可或缺的. 与其他重要数学概念一样，函数定义的发展与完善也经历了比较长的一段时间.

“函数”一词是莱布尼茨创造的，他用这个词表示与曲线上的点有关的线段长度，并使用这个词表示变量之间的依赖关系.

欧拉于 1734 年首先使用字母 f 表示函数，欧拉在他的著作《微分学》中给出的函数定义是：如果某变量，以如下的方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前者也随之变化，则称前面的变量是后面变量的函数.

1851 年，德国数学家黎曼给出的函数定义是：假定 z 是一个变量，它可以逐次取所有可能的实数值. 如果对它的每一个值，都有未知量 w 的唯一的一个值与之对应，则 w 称为 z 的函数. 人们通常称这样的定义为函数的“对应说”，因为定义中采用了“唯一的一个值与之对应”的说法.

1939 年，法国布尔巴基学派在集合论的基础上给出了如下函数的定义：设 E 和 F 是两个集合，它们可以不同，也可以相同. E 中的变元 x 和 F 中的变元 y 之间的一个关系称为一个函数关系，如果对于每一个 $x\in E$，都存在唯一的 $y\in F$，它满足与 x 给定的关系. 称这样的运算为函数，它以上述方式将与 x 有给定关系的元素 $y\in F$ 与每一个元素 $x\in E$ 相联系. 称 y 是函数在元素 x 处的值，函数值由给定的关系所确定. 两个等价的函数关系确定同一个函数. 人们通常称这样的定义为“关系说”.

后来，有些学者把布尔巴基学派的定义进一步符号化：设 F 是定义在集合 X 和 Y 上的一个二元关系，称这个关系为函数，如果对于每一个 $x\in X$，都存在唯一的 $y\in Y$，使得 $(x, y)\in F$. 这样，函数的定义就完全用数学的符号形式化了.

可以看出，上述函数的定义越来越严格，抽象程度越来越强，数学直观则越来越弱.

在数学学习过程中，如果我们能借助直观来理解有关概念和结论，可能会有事半功倍的效果. 为了形象地理解函数的概念，有人提议将函数类比成对每一个允许的输入指定唯一确定的输出的机器，所有输入的集合是函数的定义域，所有输出的集合是函数的值域，如下图所示.

你觉得这种提议有助于进一步理解函数的概念吗？如果条件容许的话，去查阅更多的有关资料吧！

在表示函数时，如果不会产生歧义，函数的定义域通常省略不写，此时就约定：函数的定义域就是使得这个函数有意义的所有实数组成的集合.

在上述约定下，以下表达式都可以表示函数 $f(x)=2x+1$，$x\in\mathbf{R}$：

$$f(x)=2x+1,$$

$$y=2x+1.$$

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$；　　(2) $g(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}$.

解 (1) 因为函数有意义当且仅当

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ \sqrt{x+1}\neq 0, \end{cases}$$

解得 $x>-1$，所以函数的定义域为

$$(-1,\ +\infty).$$

(2) 因为函数有意义当且仅当

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ x+2\neq 0, \end{cases}$$

解得 $x\neq 0$ 且 $x\neq -2$，因此函数的定义域为

$$(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 0)\cup(0,\ +\infty).$$

以下都是求函数定义域常用的依据：

(1) 分式中分母不能为零；

(2) 二次根式中的被开方数要大于或等于零.

例 2 设函数 $g(x)=\sqrt{x+1}$ 的值域为 S，分别判断 $-\sqrt{2}$ 和 3 是否是 S 中的元素.

解 由于 $\sqrt{x+1}\geqslant 0$ 恒成立，所以 $\sqrt{x+1}=-\sqrt{2}$ 无解，因此 $-\sqrt{2}\notin S$.

当 $\sqrt{x+1}=3$ 时，可解得 $x=8$，即 $g(8)=3$，所以 $3\in S$.

例 2 的解法，实质上是在用方程判断一个数是否属于函数的值域.

例 3 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$：

(1) 求 $f(-1)$，$f(0)$ 和 $f(2)$；

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域.

尝试与发现

判断方程 $\dfrac{1}{x^2+1}=3$ 是否有解，由此给出求函数 $f(x)$ 值域的一种方法.

解 (1) 由已知可得

$$f(-1)=\frac{1}{(-1)^2+1}=\frac{1}{2},$$

$$f(0)=\frac{1}{0^2+1}=1,$$

$$f(2)=\frac{1}{2^2+1}=\frac{1}{5}.$$

(2) (方法一) 因为 $x^2\geqslant 0$，所以 $x^2+1\geqslant 1$ 恒成立，从而可知

$$\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1.$$

又因为当 x 的绝对值逐渐变大时，函数值会逐渐接近于 0，但不会等于 0，因此所求函数的值域为 $(0,\ 1]$.

（方法二）假设 t 是所求值域中的元素，则关于 x 的方程 $\frac{1}{x^2+1}=t$ 应该有解，即 $x^2=\frac{1}{t}-1$ 应该有解，从而

$$\frac{1}{t}-1\geqslant 0,$$

即 $\frac{1-t}{t}\geqslant 0$，解得 $0<t\leqslant 1$. 因此所求值域为 $(0,\ 1]$.

例 3（2）中的方法一实质上用的是不等式的性质.

2. 函数的表示方法

前面我们所接触到的函数 $y=f(x)$ 中，绝大多数 $f(x)$ 都是用代数式（或解析式）来表示的，例如 $f(x)=2x+1$，这种表示函数的方法称为解析法.

前面给出的关于中国创新指数的函数，实际上是用列表的形式给出了函数的对应关系，这种表示函数的方法称为列表法. 如果将这个函数记为 $i=f(y)$，则从表格中可以看出

$$f(2\ 021)=147.0,\ f(2\ 023)=\boxed{1}\_\_\_\_\_\_.$$

另外，如果将这个函数的定义域记为 D，值域记为 S，则有

$$D=\{2016,\ 2017,\ 2018,\ 2019,\ 2020,\ 2021,\ 2022,\ 2023\},$$

$$S=\boxed{2}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

前面给出的与心电图有关的函数，实际上是用图的形式给出了函数的对应关系.

一般地，将函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 中的自变量 x 和对应的函数值 y，分别看成平面直角坐标系中点的横坐标与纵坐标，则满足条件的点 $(x,\ y)$ 组成的集合 F 称为函数的图象，即

$$F=\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in A\}.$$

这就是说，如果 F 是函数 $y=f(x)$ 的图象，则图象上任意一点的坐标 $(x,\ y)$ 都满足函数关系 $y=f(x)$；反之，满足函数关系 $y=f(x)$ 的点 $(x,\ y)$ 都在函数的图象 F 上.

用函数的图象表示函数的方法称为图象法.

从理论上来说，要作出一个函数的图象，只需描出所有点即可. 但是，很多函数的图象都由无穷多个点组成，描出所有点并不现实. 因此，实际作图时，经常先描出函数图象上一些有代表性的点，然后根据有关性质作出函数图象，这称为描点作图法.

例如，我们知道，一次函数 $y=-x+1$ 的图象是一条直线，又易知图象过点（0，1）和（1，0），所以容易作出其图象，如图 3-1-2 所示.

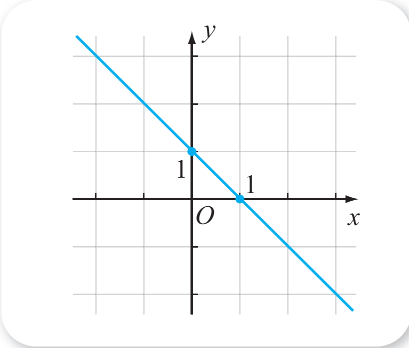


图 3-1-2

例 4 北京市自 2014 年 5 月 1 日起，居民用水实行阶梯水价. 其中年用水量不超过 180 m^3 的部分，综合用水单价为 5 元/m^3；超过 180 m^3 但不超过 260 m^3 的部分，综合用水单价为 7 元/m^3. 如果北京市一居民年用水量为 x m^3，其要缴纳的水费为 $f(x)$ 元. 假设 $0\leqslant x\leqslant 260$，试写出 $f(x)$ 的解析式，并作出 $f(x)$ 的图象.

解 如果 $x\in[0,180]$，则 $f(x)=5x$；

如果 $x\in(180,260]$，按照题意有

$$f(x)=5\times 180+7(x-180)=7x-360.$$

因此

$$f(x)=\begin{cases}5x, & x\in[0,180],\\ 7x-360, & x\in(180,260].\end{cases}$$

注意到 $f(x)$ 在不同的区间上，解析式都是一次函数的形式，因此 $y=f(x)$ 在每个区间上的图象都是直线的一部分，又因为

$f(180)=5\times 180=900$，

$f(260)=7\times 260-360=1\ 460$，

由此可作出函数的图象，如图 3-1-3 所示.

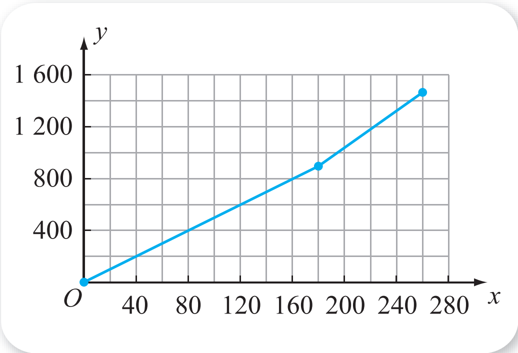


图 3-1-3

如果一个函数，在其定义域内，对于自变量的不同取值区间，有不同的对应方式，则称其为分段函数.

尝试与发现

函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$ 称为狄利克雷函数，你能说出这个函数的定义域、值域吗？你能作出这个函数的图象吗？

可以看出，狄利克雷函数的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\{0,1\}$，但它的图象不能形象地展示出来.

例 5 设 x 为任意一个实数，y 是不超过 x 的最大整数，判断这种对应关系是否是函数．如果是，作出这个函数的图象；如果不是，说明理由．

尝试与发现

依照题意填写下表，然后判断对应关系是否是函数．

x	6.89	5	π	-1.5	-2
y	6				

解 因为当 $n\in\mathbf{Z}$ 且 $x\in[n, n+1)$ 时，有

$$y=n,$$

又因为任何一个实数 x，都必定在某个形如 $[n, n+1)$ 的区间内．因此，给定一个 x，有唯一的 y 与之对应，所以这种对应关系是函数．

由上可看出，在每一个区间 $[n, n+1)$ 内，函数的图象是直线的一部分，由此可作出这个函数的图象，如图 3-1-4 所示．

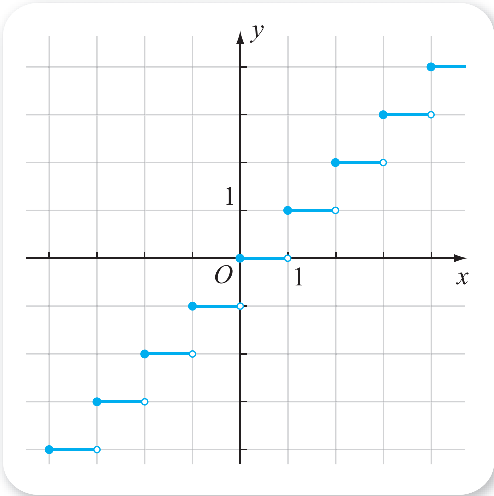


图 3-1-4

例 5 中的函数通常称为取整函数，记作

$$y=[x],$$

其定义域是 3______，值域是 4______．这个函数早在 18 世纪就被“数学王子”高斯提出，因此也被称为高斯取整函数．

在以后的学习中，我们还会碰到值域只有一个元素的函数，这类函数通常称为常数函数．也就是说，常数函数中所有自变量对应的函数值都相等．例如 $f(x)=7$，$x\in\mathbf{R}$ 是一个常数函数，它的值域是 5______，图象是一条垂直于 y 轴的直线．

例 6 已知函数 $y=\sqrt{x}$，指出这个函数的定义域、值域，并作出这个函数的图象．

解 函数的定义域为 $[0, +\infty)$．由 $y=\sqrt{x}$ 在 $y\geqslant 0$ 时有解可知，函数的值域为 $[0, +\infty)$．

通过描点作图法，可以作出这个函数的图象，如图 3-1-5 所示．

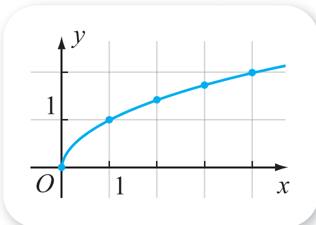


图 3-1-5

由上可以看出，函数可以通过多种方式表示，而且函数的解析式也具有

多种形式. 在确定函数的解析式时，可以借助方程或方程组的知识，使用待定系数法完成，如例 7 所示.

例 7 已知二次函数的图象过点 $(-1, 4)$，$(0, 1)$，$(1, 2)$，求这个二次函数的解析式.

解 设函数解析式为 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，则

$$\begin{cases} a-b+c=4, \\ c=1, \\ a+b+c=2. \end{cases}$$

由此可解得 $a=2$，$b=-1$，$c=1$，因此所求函数解析式为

$$y=2x^2-x+1.$$

例 8 已知 $f(x)=x^2$，求 $f(x-1)$.

尝试与发现

求出 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ 的值，再求出 $f(a)$，$f(a-1)$.

解 由已知可得

$$f(x-1)=(x-1)^2=x^2-2x+1.$$

例 8 中，如果设 $g(x)=f(x-1)$，则有 $g(x)=x^2-2x+1$，因此 $g(x)$ 与 $f(x)$ 是不同的函数.

探索与研究

已知 $f(x-1)=x^2$，你能求出 $f(x)$ 的解析式吗？试总结 $f(x)$ 与 $f(x-1)$ 的关系.

3. 用信息技术作函数图象

利用计算机软件可以迅速作出函数的图象，从而可以观察函数的性质等.

在 GeoGebra 中，只要输入函数的表达式，就可以得到对应的图象. 例如，依次输入以下各行内容（每输完一行之后按回车键）：

```
f(x)=1/(x^2+1)
g(x)=sqrt(x)
h(x)=x^2
i(x)=h(x-1)
j(x)=if[0<=x<=1, x, if[1<x<=2, 2-x]]
```

即可得到如图 3-1-6 所示的函数解析式和函数图象（最后的命令实际上是作出了分段函数的图象）.

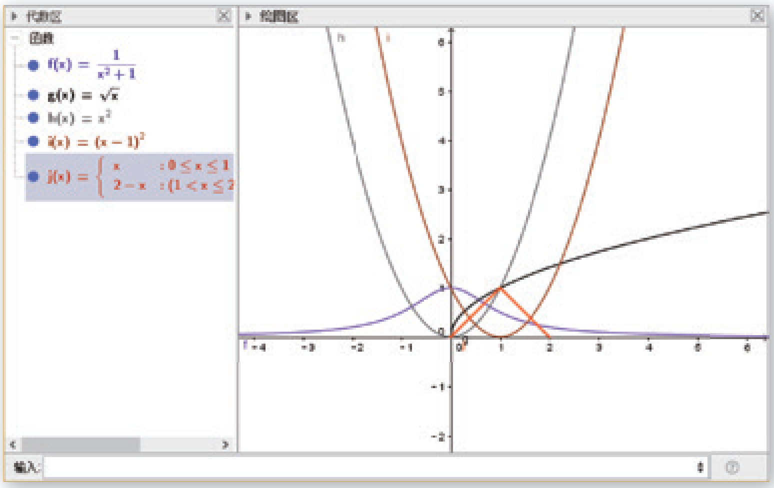


图 3-1-6

练习A

❶ 已知集合 $A=[0,+\infty)$，$B=[0,+\infty)$，对应关系 f 为“求倒数”，判断 f 是否为 A 上的一个函数.

❷ 以下是中国人民银行 2015 年 10 月 24 日公布的部分人民币定期存款基准年利率表①，设银行定期存款的年利率为 $r\%$，存期为 t 年，判断 r 是否为 t 的函数. 如果是，写出这个函数的定义域和值域；如果不是，说明理由.

t	0.5	1	2	3
r	1.3	1.5	2.1	2.75

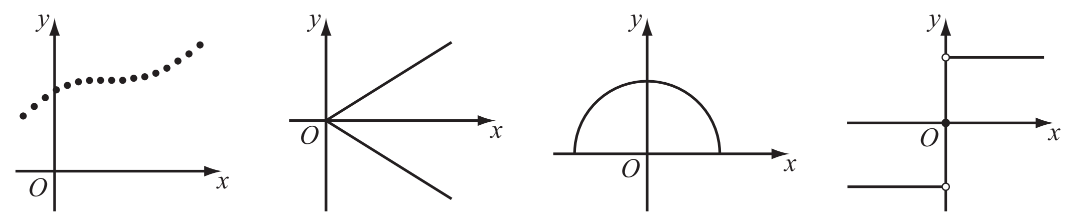
❸ 已知 $f(x)=x^2+x$，$x\in\mathbf{R}$，求 $f(-1)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(3)$.

❹ 设函数 $g(x)=x^2-2$ 的值域为 A，判断 -5 和 7 是否为 A 中的元素.

❺ 求下列各函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$；　(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$；　(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$.

❻ 下列各图中，哪些可能是函数的图象？哪些一定不是函数的图象？为什么？



① 数据来自中国人民银行网站.

7. 写出常数函数 $f(x)=-1$ 的定义域、值域，并作出它的图象.

8. 把下列函数写成分段函数的形式，求出定义域和值域，并作出函数图象：

(1) 当 $x<0$ 时，$f(x)=1$；当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2$.

(2) 当 $x<0$ 时，$f(x)=-1$；当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；当 $x>0$ 时，$f(x)=1$.

练习B

1. 分别判断 f 是否为 A 上的一个函数（函数值均为 $\mathbf{R}$ 中的元素）：

(1) $A=\mathbf{R}$，f 为“加 1”；　(2) $A=[0,+\infty)$，f 为“求非负平方根”；

(3) $A=\mathbf{R}$，f 为“求倒数”；　(4) $A=[0,+\infty)$，f 为“求平方根”.

2. 已知下列表格表示的是函数 $w=g(u)$，写出 $g(-1)$，$g(0)$，$g(2)$，并判断 2 是否为这个函数值域中的元素.

u	-2	-1	0	1	2
w	3	4	5	6	7

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<2,\\ x, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 求这个函数的定义域与值域.

4. 判断下列各组函数是否为同一个函数：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$，$g(x)=x$；　(2) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$，$g(x)=x^2-1$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=x$.

5. 求下列函数的值域：

(1) $f(x)=\dfrac{8}{x^2}$，$1\leqslant x\leqslant 2$；　(2) $f(x)=-\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$.

6. 已知 $g(x)=x-[x]$，$x\in\mathbf{R}$，求 $g(-5.3)$，$g(-2.3)$，$g(2.1)$，$g(\sqrt{3})$.

7. 已知函数 $f(x)=-2x^2+x$，求 $f(-x)$，$f(x+1)$.

8. 已知函数 $f(x+1)=2x-3$，求 $f(4)$，$f(x)$.

9. 作出函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -1<x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 的图象.

10. 学校宿舍与办公室相距 a m. 某同学有重要材料要送交给老师，从宿舍出发，先匀速跑步 3 min 来到办公室，停留 2 min，然后匀速步行 10 min 返回宿舍. 在这个过程中，这位同学行进的速率和行走的路程都是时间的函数，作出速率函数和路程函数的示意图.

计算机上的练习

❶ 在 GeoGebra 中，任意作出一个函数 $f(x)$ 的图象：

(1) 作出函数 $h(x)=f(x-1)$ 的图象，观察 $f(x)$ 与 $h(x)$ 图象之间的关系；

(2) 新建一个参数 $a\in[-5, 5]$，作出函数 $g(x)=f(x-a)$ 的图象，启动动画，观察 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象之间的关系；

(3) 总结出一般情况下，函数 $f(x)$ 与 $f(x-a)$ 的图象之间的关系.

❷ 在 GeoGebra 中，任意作出一个函数 $f(x)$ 的图象：

(1) 作出函数 $h(x)=f(2x)$ 的图象，观察 $f(x)$ 与 $h(x)$ 图象之间的关系；

(2) 新建一个参数 $a\in[-5, 5]$，作出函数 $g(x)=f(ax)$ 的图象，启动动画，观察 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象之间的关系；

(3) 总结出一般情况下，函数 $f(x)$ 与 $f(ax)$ 的图象之间的关系.

1 165.3　　2 {105.3，112.3，123.8，131.3，138.9，147.0，155.7，165.3}

3 **R**　　4 **Z**　　5 {7}

3.1.2 函数的单调性

1. 单调性的定义与证明

情境与问题

我们知道，“记忆”在我们的学习过程中扮演着非常重要的角色，因此有关记忆的规律一直都是人们研究的课题. 德国心理学家艾宾浩斯曾经对记忆保持量进行了系统的实验研究，并给出了类似图 3-1-7 所示的记忆规律.

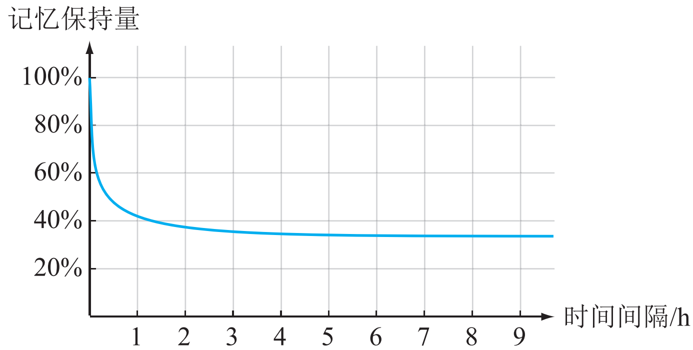


图 3-1-7

如果我们以 x 表示时间间隔（单位：h），y 表示记忆保持量，则不难看出，图 3-1-7 中，y 是 x 的函数，记这个函数为 $y=f(x)$.

这个函数反映出记忆具有什么规律？你能从中得到什么启发？

情境与问题中的函数 $y=f(x)$ 反映出记忆的如下规律：随着时间间隔 x 的增大，记忆保持量 y 将减小.

给定一个函数，人们有时候关心的是，函数值会随着自变量增大而怎样变化，类似的内容我们在初中曾经接触过.

如图 3-1-8，从正比例函数 $y=2x$ 的图象可以看出，当自变量由小变大时，函数值逐渐变大，即 y 随着 x 的增大而增大；从反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象可以看出，在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内，函数值 y 都随着 x 的增大而减小.

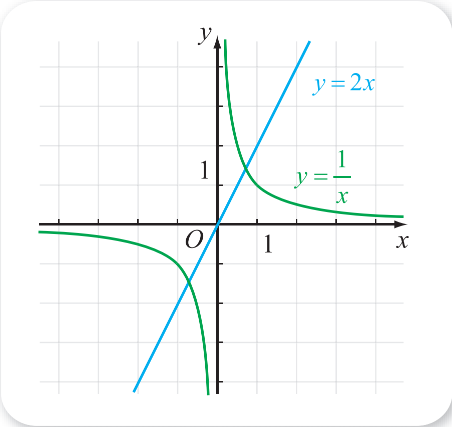


图 3-1-8

尝试与发现

怎样用不等式符号表示"y 随着 x 的增大而增大""y 随着 x 的增大而减小"？

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，且区间 $I\subseteq D$：

(1) 如果对任意 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**增函数**（也称在区间 I 上单调递增），如图 3-1-9 (1) 所示；

(2) 如果对任意 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**减函数**（也称在区间 I 上单调递减），如图 3-1-9 (2) 所示.

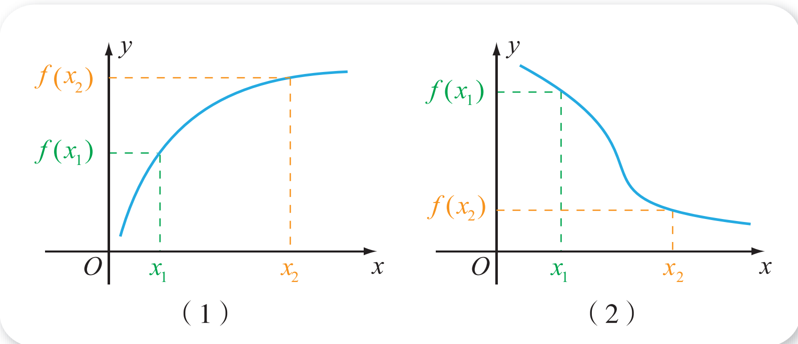


图 3-1-9

两种情况下，都称函数在区间 I 上具有单调性（区间 I 称为函数的单调区间，也可分别称为单调递增区间或单调递减区间）.

由增函数和减函数的定义可知，前面给出的例子中，$y=2x$ 在 **R** 上是增函数；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数，在 $(0, +\infty)$ 上也是减函数.

想一想

能否说 $y=\dfrac{1}{x}$ 在定义域内是减函数？为什么？

尝试与发现

如图 3-1-10 所示的函数 $y=f(x)$，在 $[-6, -4]$ 上是增函数，在 $[-4, -2]$ 上是减函数，在 $[-2, 1]$ 上是 1 ________ 函数，在 $[1, 3]$ 上是 2 ________ 函数，在 $[3, 6]$ 上是 3 ________ 函数.

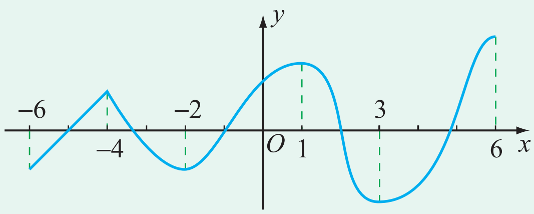


图 3-1-10

由尝试与发现可知，从函数的图象能方便地看出函数的单调性. 但一般情况下，得到函数的图象并不容易，而且手工作出的图象往往都不精确，因此我们要探讨怎样从函数的解析式来证明函数的单调性. 这可以利用函数单调性的定义和不等式的证明方法.

例 1 求证：函数 $f(x)=-2x$ 在 **R** 上是减函数.

证明 任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，那么

$$f(x_1)-f(x_2)=(-2x_1)-(-2x_2)=2(x_2-x_1)>0,$$

从而 $f(x_1)>f(x_2)$.

因此，函数 $f(x)=-2x$ 在 **R** 上是减函数.

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且 $x_0\in D$：如果对任意 $x\in D$，都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则称 $f(x)$ 的**最大值**为 $f(x_0)$，而 x_0 称为 $f(x)$ 的**最大值点**；如果对任意 $x\in D$，都有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，则称 $f(x)$ 的**最小值**为 $f(x_0)$，而 x_0 称为 $f(x)$ 的**最小值点**. 最大值和最小值统称为最值，最大值点和最小值点统称为最值点.

不难看出，如果函数有最值而且函数的单调性容易求出，则可利用函数的单调性求出函数的最值点和最值.

例 2 判断函数 $f(x)=3x+5$，$x\in[-1, 6]$ 的单调性，并求这个函数的最值.

解 任取 x_1，$x_2\in[-1,6]$ 且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，那么

$$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1+5)-(3x_2+5)=3(x_1-x_2)<0,$$

所以这个函数是 4 ______ 函数.

因此，当 $-1\leqslant x\leqslant 6$ 时，有

$$f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(6),$$

从而这个函数的最小值为 $f(-1)=$ 5 ______，最大值为 $f(6)=$ 6 ______.

例 2 的结论也可由不等式的知识得到：因为 $-1\leqslant x\leqslant 6$，所以

$$-3\leqslant 3x\leqslant 18,\ 2\leqslant 3x+5\leqslant 23,$$

即 $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(6)$，其余同上.

2. 函数的平均变化率

我们已经知道，两点确定一条直线，在平面直角坐标系中，这一结论当然也成立. 一般地，给定平面直角坐标系中的任意两点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，称

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

为直线 AB 的斜率；当 $x_1=x_2$ 时，称直线 AB 的斜率不存在.

直线 AB 的斜率反映了直线相对于 x 轴的倾斜程度.

若记 $\Delta x=x_2-x_1$，相应的 $\Delta y=y_2-y_1$，则当 $\Delta x\neq 0$ 时，斜率可记为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

如图 3-1-11 所示，直线 AB 的斜率即为 Rt$\triangle ACB$ 中 BC 与 AC 的比. 另外，图 3-1-11 中，直线 AB 的斜率大于零，而直线 AD 的斜率小于零.

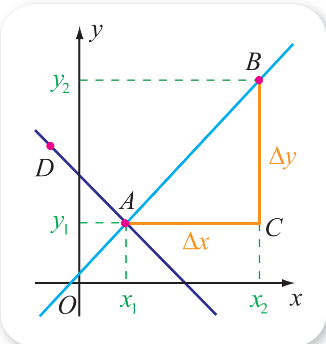


图 3-1-11

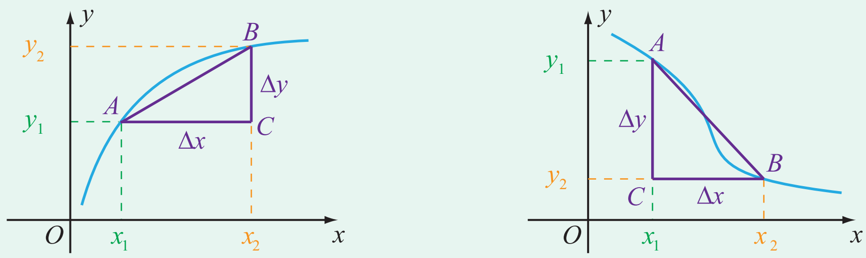
不难看出，平面直角坐标系中的三个点共线，当且仅当其中任意两点确定的直线的斜率都相等或都不存在. 下面我们用直线的斜率来研究函数的单调性.

由函数的定义可知，任何一个函数图象上的两个点，它们所确定的直线的斜率一定存在.

人民教育出版社

尝试与发现

如图 3-1-12 所示，观察函数图象上任意两点连线的斜率的符号与函数单调性之间的关系，并总结出一般规律.



（1）　　　　（2）

图 3-1-12

可以看出，函数递增的充要条件是其图象上任意两点连线的斜率都大于 0，函数递减的充要条件是其图象上任意两点连线的斜率都小于 0.

一般地，若区间 I 是函数 $y=f(x)$的定义域的子集，对任意 x_1，$x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$，记 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(\text{即}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right)$，则：

（1）$y=f(x)$ 在区间 I 上是增函数的充要条件是$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$ 在区间 I 上恒成立；

（2）$y=f(x)$ 在区间 I 上是减函数的充要条件是$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$ 在区间 I 上恒成立.

一般地，当 $x_1\neq x_2$ 时，称

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

为函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$（$x_1<x_2$ 时）或 $[x_2, x_1]$（$x_1>x_2$ 时）上的平均变化率.

利用上述结论，我们可以证明一个函数的单调性.

例如，对于函数 $y=-2x$ 来说，对任意 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1\neq x_2$，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(-2x_2)-(-2x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-2x_2+2x_1}{x_2-x_1}=-2<0,$$

因此 $y=-2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是 7______ 函数.

拓展阅读

物理中的变化率

我们在物理中已经学习过：变化率是描述变化快慢的量.

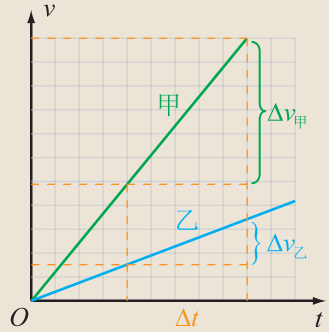
例如，速度是用来衡量物体运动快慢的，速度等于位移的变化量与发生这一变化所用时间的比值，即

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t};$$

加速度是用来衡量速度变化快慢的，加速度等于速度的变化量与发生这一变化所用时间的比值，即

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

而且，从物理中我们还知道，由物体的速度-时间图象，可看出加速度的有关信息. 如图所示，如果甲、乙两物体的速度-时间图象都是直线，则由图中的信息可以看出，Δt 相等时，$\Delta v_{甲}>\Delta v_{乙}$，从而甲的速度变化更快，即变化率更大，因此甲的加速度更大.



你注意到了吗？物理中的这个变化率与我们所说的函数的平均变化率其实是一回事.

例 3 求证：函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上都是减函数.

证明 设 $x_1\neq x_2$，那么

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}{x_2-x_1}=-\frac{1}{x_1x_2}.$$

如果 x_1，$x_2\in(-\infty, 0)$，则 $x_1x_2>0$，此时 $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$，所以函数在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数. 同理，函数在 $(0, +\infty)$ 上也是减函数.

例 4 判断一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 的单调性.

解 设 $x_1\neq x_2$，那么

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{kx_2+b-(kx_1+b)}{x_2-x_1}=k.$$

因此，一次函数的单调性取决于 k 的符号：当 $k>0$ 时，一次函数在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；当 $k<0$ 时，一次函数在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

例 4 说明，一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 的图象上任意两点确定的直线斜率均为 k，这实际上也说明了一次函数的图象一定是直线. 不仅如此，此时从 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=k$ 还可以看出，$\Delta y=k\Delta x$，这就意味着在一次函数中，Δy 与 Δx

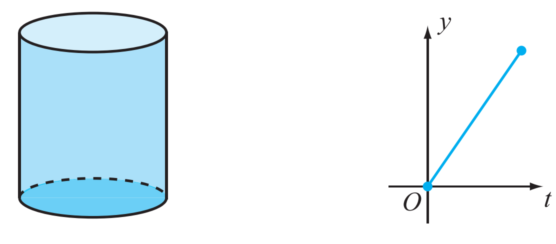
成正比，且比例系数为 k．特别地，当自变量每增大一个单位时，因变量增大 k 个单位，而且可以证明，只有一次函数才具有这个性质．事实上，如果 $\Delta y=k\Delta x$，设 $x=0$ 时函数值为 y_0，则

$$y-y_0=k(x-0),$$

即 $y=kx+y_0$，因此一定是一次函数．正因为如此，一次函数也经常被称为线性函数．

例如，如果向给定的容器中倒水，且任意相等的时间间隔内所倒的水体积相等，那么容器内水面的高度 y 是时间 t 的函数．

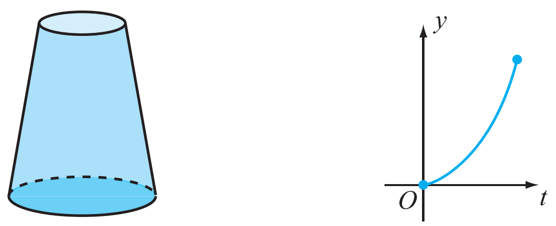
当容器是如图 3-1-13（1）所示的圆柱时，在固定的 Δt 时间内，Δy 应该是常数，因此函数的图象是如图 3-1-13（2）所示的一条线段．



（1）　（2）

图 3-1-13

当容器是如图 3-1-14（1）所示的圆台时，由容器的形状可知，在固定的 Δt 时间内，随着 t 的增加，Δy 应该越大，因此函数的图象如图 3-1-14（2）所示．



（1）　（2）

图 3-1-14

例 5　证明函数 $f(x)=x^2+2x$ 在 $(-\infty,\ -1]$ 上是减函数，在 $[-1,\ +\infty)$ 上是增函数，并求这个函数的最值．

证明　设 $x_1\neq x_2$，则

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^2+2x_2)-(x_1^2+2x_1)}{x_2-x_1}=x_1+x_2+2.$$

因此：

当 $x_1,\ x_2\in(-\infty,\ -1]$ 时，有 $x_1+x_2<-2$，从而 $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$，因此

$f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上是减函数；

当 $x_1, x_2 \in [-1, +\infty)$ 时，有 $x_1+x_2>-2$，从而 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$，因此 $f(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上是增函数.

由函数的单调性可知，函数没有最大值；而且，当 $x \in (-\infty, -1]$ 时，有

$$f(x) \geqslant f(-1),$$

当 $x \in [-1, +\infty)$ 时，不等式也成立，因此 $f(-1)=-1$ 是函数的最小值.

用类似的方法可以证明，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a \neq 0)$ 的单调性为：

(1) 当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ 上单调递减，在 $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递增，函数没有最大值，但有最小值 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

(2) 当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ 上单调递 8 ________，在 $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递 9 ________，函数没有最 10 ________ 值，但有最 11 ________ 值 12 ________________.

当然，这一结论也可以从二次函数的图象是关于 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称的抛物线与开口方向看出来.

拓展阅读

付出与收获的关系

俗话说，“一分耕耘，一分收获”．那么，在实际生活中，如果把收获看成付出的函数，它们之间的关系可以怎样描述呢？

如果同样多的付出所得到的收获总是相等，那么收获是付出的线性函数，其图象可以用图 1 表示．例如，当以匀速的方式驾驶汽车时，行驶的里程与所用的时间之间的关系就是如此.

如果随着付出的增长，同样多的付出所得到的收获不一定相等，那么收获就是付出的非线性函数．例如，在我们学习新的知识时，可能一开始效率会比较高，单位时间的付出得到的收获会比较大，但随着付出的时间越来越多，单位时间的付出得到的收获会变少，如图 2 所示.

有时还有可能付出增加会导致收获减少，想想家长过分宠爱孩子的后果吧！这种情况可用图 3 表示.

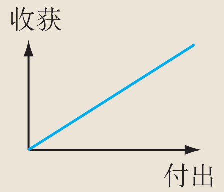


图 1

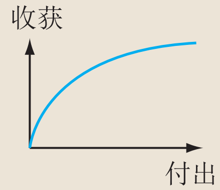


图 2

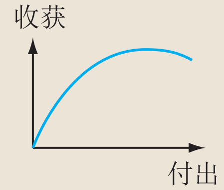


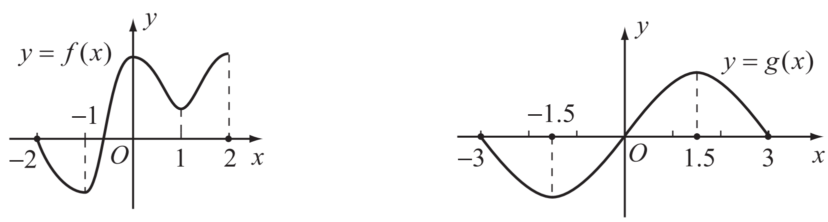
图 3

你能说出收获与付出的其他关系吗？

另外，从这里也可看出，利用图形的形象与直观，能够帮助我们更好地描述和理解有关原理，你体会到了吗？日常生活中这样的例子还有很多，尝试去发现一下吧！

练习A

1. 判断下列命题的真假：
   （1）如果 $y=f(x)$ 在区间 I 上是增函数，那么在该区间上，自变量减小时，函数值也减小；
   （2）如果 $y=f(x)$ 在区间 I 上，随着自变量的减小，函数值反而增大，那么 $y=f(x)$ 在 I 上是减函数.
2. 如图，已知函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的图象（包括端点），根据图象写出函数的单调区间，以及在每一个区间上，函数是增函数还是减函数.



（1） （2）

（第 2 题）

3. 判断函数 $f(x)=5x+1$，$x\in[-2,7]$ 的单调性，并求这个函数的最值.
4. 依据函数单调性的定义，证明函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，$x\in[2,+\infty)$是递增的.
5. 判断函数 $y=\sqrt{x}$ 的单调性，并证明.
6. 证明函数 $f(x)=-x^2+2x$ 在 $(-\infty,1]$ 上是增函数，在 $[1,+\infty)$ 上是减函数，并求这个函数的最值.

练习B

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,5]$，且在区间 $[-1,2]$ 上单调递增，在区间 $[2,5]$ 上单调递减，那么下列说法中，一定正确的是________________.

人民教育出版社

(1) $f(0)<f(2)$;

(2) $f(3)>f(2)$;

(3) $f(x)$ 在区间 $[-1, 5]$ 上有最大值，而且 $f(2)$ 是最大值；

(4) $f(0)$ 与 $f(3)$ 的大小关系不确定；

(5) $f(x)$ 在区间 $[-1, 5]$ 上有最小值；

(6) $f(x)$ 在区间 $[-1, 5]$ 上的最小值是 $f(5)$.

2 判断下列命题的真假：

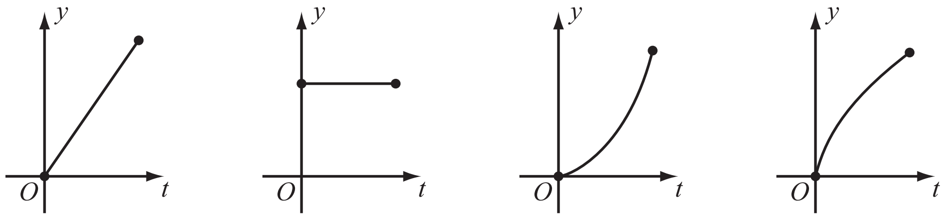
(1) 如果 $y=f(x)$ 在 I 上是增函数，且 x_1，$x_2\in I$，那么当 $f(x_1)>f(x_2)$ 时，$x_1<x_2$；

(2) 如果 $y=f(x)$ 在 I 上具有单调性，且 x_1，$x_2\in I$，那么当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，$x_1=x_2$.

3 已知函数 $f(x)=-x-1$ 的定义域为 D，值域为 $[-6, 2]$，求 D.

（第 4 题）

4 向一个圆台形的容器（如图所示）中倒水，且任意相等的时间间隔内所倒的水体积相等，记容器内水面的高度 y 随时间 t 变化的函数为 $y=f(t)$，则以下函数图象中，可能是 $y=f(t)$ 的图象的是（　　）①.



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

5 求 $f(x)=2x^2+6x$，$x\in[-5, 3]$ 的单调区间，并求这个函数的最值.

6 求证：$(-\infty, 2)$ 不是函数 $f(x)=x^2$ 的单调区间.

7 已知函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$k>0$，且 $g(x)=kf(x)$，求证：$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上也是增函数.

8 是否存在函数 $f(x)$，其在定义域上既不是增函数，也不是减函数？如果不存在，说明理由；如果存在，举出实例.

1 增　2 减　3 增　4 增　5 2　6 23　7 减　8 增　9 减

10 小　11 大　12 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

① 本章导语中向容器中倒水的问题的答案与此题的答案类似.

3.1.3 函数的奇偶性

1. 函数的奇偶性

初中时我们学习过有关轴对称和中心对称的知识，而且已经知道，在平面直角坐标系中，点（x，y）关于 y 轴的对称点为（$-x$，y），关于原点的对称点为（$-x$，$-y$）. 例如，（-2，3）关于 y 轴的对称点为 1 ________，关于原点的对称点为 2 ________.

尝试与发现

填写下表，观察指定函数的自变量 x 互为相反数时，函数值之间具有什么关系，并分别说出函数图象应具有的特征.

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)=x^2$						
$g(x)=\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$						

不难发现，上述两个函数，当自变量取互为相反数的两个值 x 和 $-x$ 时，对应的函数值相等，即

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x),$$

$$g(-x)=\frac{1}{|-x|}=\frac{1}{|x|}=g(x).$$

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对 D 内的任意一个 x，都有 $-x\in D$，且

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**.

如果 $y=f(x)$ 是偶函数，其图象具有什么特征呢?

我们知道，点 $P(x, f(x))$ 与 $Q(-x, f(-x))$ 都是函数 $y=f(x)$ 图象上的点，按照偶函数的定义，点 Q 又可以写成 $Q(-x, f(x))$，因此点 P 和点 Q 关于 y 轴对称，所以偶函数的图象关于 y 轴对称；反之，结论也成立，即图象关于 y 轴对称的函数一定是偶函数. 如图 3-1-15 所示是尝

人民教育出版社

试与发现中两个函数的图象.

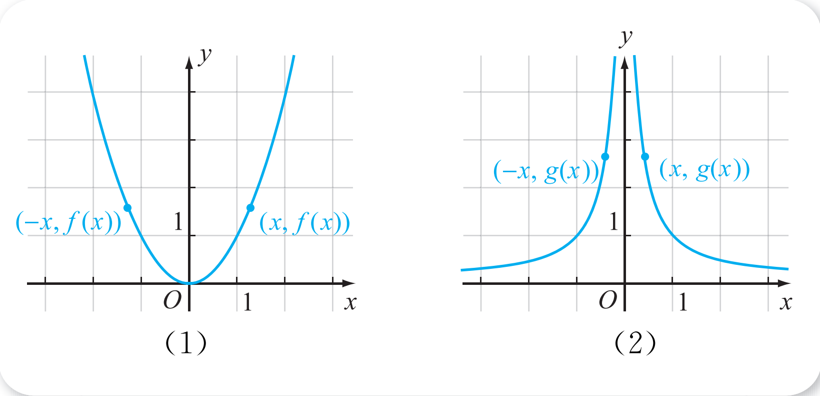


图 3-1-15

尝试与发现

按照类似的方式得到奇函数的定义，以及奇函数图象的特征：

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对 D 内的任意一个 x，都有 **3**________，且

4________________，

则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

奇函数的图象关于**5**________对称.

奇函数的图象特征也可按照下述方式得到：点 $P(x, f(x))$ 与 $Q(-x, f(-x))$ 都是函数 $y=f(x)$ 图象上的点，如果 $y=f(x)$ 是奇函数，则点 Q 又可以写成 $Q(-x, -f(x))$，因此点 P 和点 Q 关于原点对称，所以奇函数的图象关于原点对称；反之，结论也成立，即图象关于原点对称的函数一定是奇函数. 如图 3-1-16 所示是奇函数 $f(x)=x^3$ 和 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图象.

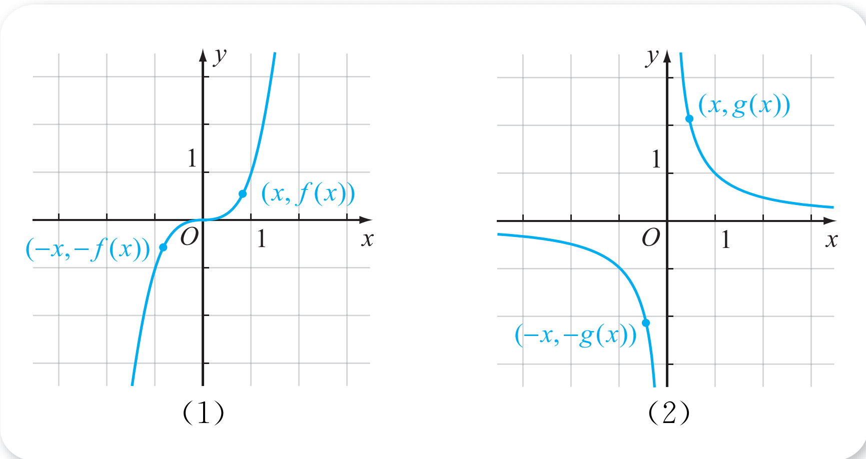


图 3-1-16

如果一个函数是偶函数或是奇函数，则称这个函数具有奇偶性. 可以看

出，当 n 是正整数时，函数 $f(x)=x^{2n}$ 是偶函数，函数 $g(x)=x^{2n-1}$ 是奇函数.

例 1 判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=x+x^3+x^5$；　　(2) $f(x)=x^2+1$；

(3) $f(x)=x+1$；　　(4) $f(x)=x^2$，$x\in[-1,3]$.

解 (1) 因为函数的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$.

又因为

$$f(-x)=(-x)+(-x)^3+(-x)^5=-(x+x^3+x^5)=-f(x),$$

所以函数 $f(x)=x+x^3+x^5$ 是 6 ________ 函数.

(2) 因为函数的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$.

又因为

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x),$$

所以函数 $f(x)=x^2+1$ 是 7 ________ 函数.

(3) 因为函数的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$.

又因为 $f(-1)=0$，$f(1)=2$，所以

$$f(-1)\neq-f(1) \text{ 且 } f(-1)\neq f(1),$$

因此函数 $f(x)=x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数（也可说成 $f(x)$ 是非奇非偶函数）.

(4) 因为函数的定义域为 $[-1,3]$，而 $3\in[-1,3]$，但 $-3\notin[-1,3]$，所以函数 $f(x)=x^2$，$x\in[-1,3]$ 是非奇非偶函数.

例 1 (4) 说明，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在 $x_0\in D$，但 $-x_0\notin D$，即函数 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称，则 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

例 2 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且 $0\in D$，求证：$f(0)=0$.

证明 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以

$$f(-0)=-f(0),$$

即 $f(0)=-f(0)$，所以 $2f(0)=0$，因此 $f(0)=0$.

2. 函数奇偶性的应用

因为函数的奇偶性描述了函数图象具有的对称性，所以利用函数的奇偶性能简化函数性质的研究. 如果知道一个函数是奇函数或是偶函数，那么其定义域能分成关于原点对称的两部分，得出函数在其中一部分上的性质和图象，就可得出这个函数在另一部分上的性质和图象.

尝试与发现

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(5)=-3$，分别在条件“$f(x)$ 是偶函数”与“$f(x)$ 是奇函数”下求出 $f(-5)$ 的值.

显然，如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-5)=f(5)=-3$；如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-5)=-f(5)=3$.

例 3 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(5)<f(3)$，分别在下列各条件下比较 $f(-5)$ 与 $f(-3)$ 的大小：

(1) $f(x)$ 是偶函数；　　　　(2) $f(x)$ 是奇函数.

解 (1) 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，因此

$$f(-5)=f(5),\ f(-3)=f(3),$$

从而由条件可知 $f(-5)<f(-3)$.

(2) 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，因此

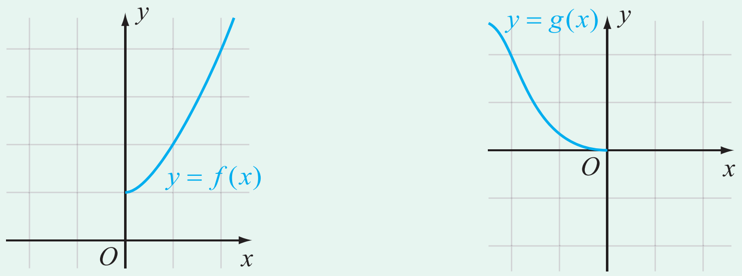
$$f(-5)=-f(5),\ f(-3)=-f(3),$$

又由条件可知 $-f(5)>-f(3)$，从而 $f(-5)>f(-3)$.

例 3 说明，当 $f(x)$ 具有奇偶性时，函数的单调性会有一定规律.

尝试与发现

已知函数 $y=f(x)$ 是偶函数，$y=g(x)$ 是奇函数，且它们的部分图象如图 3-1-17 所示，补全函数图象，并总结出当函数具有奇偶性时，函数单调性的规律.



(1)　　　　(2)

图 3-1-17

不难看出，如果 $y=f(x)$ 是偶函数，那么其在 $x>0$ 与 $x<0$ 时的单调性相反；如果 $y=f(x)$ 是奇函数，那么其在 $x>0$ 与 $x<0$ 时的单调性相同.

例 4 研究函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 的性质，并作出函数图象.

解 要使函数表达式有意义，需有 $x\neq 0$，因此函数的定义域为

$$D=\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq 0\},$$

从而可知函数的图象有左右两部分.

设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，则对任意 $x\in D$，都有 $-x\in D$，而且

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x),$$

所以函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 是偶函数，函数的两部分图象关于 y 轴对称.

下面研究函数在区间（0，$+\infty$）上的性质及图象.

因为 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$ 时，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{1}{x_2^2}-\dfrac{1}{x_1^2}}{x_2-x_1}=-\frac{x_1+x_2}{x_1^2x_2^2}<0,$$

所以 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在（0，$+\infty$）上是减函数.

又因为 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y=\dfrac{1}{x^2}>0$，所以函数图象在右边的部分一定在第一象限内. 列出部分函数值如下表所示，然后可以描点作图.

x	$\dfrac{1}{2}$	1	2	3
$y=\dfrac{1}{x^2}$	4	1	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{9}$

再根据函数是偶函数，可以得出函数的图象，如图 3-1-18 所示，而且函数的定义域为 $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq 0\}$，函数是偶函数，在（$-\infty$，0）上单调递增，在（0，$+\infty$）上单调递减，函数的值域是（0，$+\infty$）.

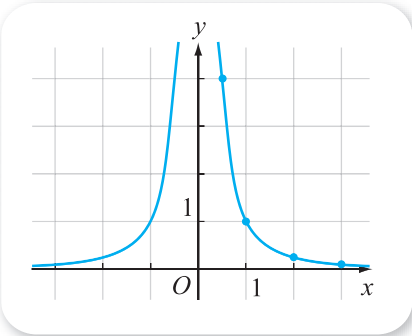


图 3-1-18

利用研究奇偶函数的类似方法还可以研究更一般的函数图象的对称性.

例 5 求证：二次函数 $f(x)=x^2+4x+6$ 的图象关于 $x=-2$ 对称.

尝试与发现

初中时，我们就在观察图象的基础上总结出过这个结论，但当时并没有给出严格的证明. 为了证明函数的图象关于 $x=0$（即 y 轴）对称，只需证明 x 轴上关于

原点对称的两点对应的函数值相等，那么该怎样证明函数的图象关于 $x=-2$ 对称呢？

如图 3-1-19 所示，已知数轴上的 A，B 两点关于 -2 对应的点对称，而且点 A 的坐标是 $-2+h$，则点 B 的坐标是 8 ________.

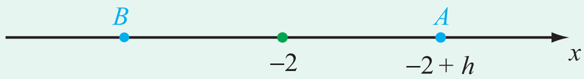


图 3-1-19

证明 任取 $h\in\mathbf{R}$，因为

$$f(-2+h)=(-2+h)^2+4(-2+h)+6$$
$$=h^2+2,$$
$$f(-2-h)=(-2-h)^2+4(-2-h)+6$$
$$=h^2+2,$$

所以 $f(-2+h)=f(-2-h)$，这就说明函数的图象关于 $x=-2$ 对称.

由例 5 可知，要证明函数图象关于垂直于 x 轴的直线对称并不难，但怎样才能找到对应的对称轴呢？以例 5 所示的二次函数为例，注意到

$$f(x)=x^2+4x+6=(x+2)^2+2,$$

由此就容易得到 $f(-2+h)=f(-2-h)$，从而可知 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x=-2$.

探索与研究

（1）如果一个函数是奇函数，那么其值域具有什么特点？

（2）怎样才能证明函数的图象关于点 $(3,\ 0)$ 对称？一般地，怎样证明函数的图象关于点 $(a,\ b)$ 对称？

练习A

1 判断下列命题的真假：

（1）如果一个函数的定义域关于坐标原点对称，则这个函数为奇函数；

（2）如果一个函数为奇函数，则它的定义域关于坐标原点对称；

（3）如果一个函数的图象关于 y 轴对称，则这个函数为偶函数.

2 判断下列函数是否具有奇偶性：

（1）$f(x)=x+x^3$；　　　　（2）$f(x)=-x^2$；

(3) $f(x)=x^3+1$；　　(4) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$，$x\in[-1, 2]$.

3 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-3)>f(-1)$，分别在下列各条件下比较 $f(3)$ 与 $f(1)$ 的大小.

(1) $f(x)$ 是偶函数；　　(2) $f(x)$ 是奇函数.

4 如果定义域为 **R** 的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)\neq 0$，函数 $f(x)$ 可能是奇函数吗？可能是偶函数吗？说明理由.

练习B

1 求证：二次函数 $f(x)=x^2-6x$ 的图象关于 $x=3$ 对称.

2 已知函数 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且 $f(-2)=10$，求 $f(2)$ 的值.

3 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，判断下列函数的奇偶性：

(1) $h(x)=f(x)+f(-x)$；　　(2) $h(x)=f(x)-f(-x)$；

(3) $h(x)=f(x)f(-x)$.

4 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域相同，且 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，判断下列函数的奇偶性，并说明理由：

(1) $h(x)=f(x)g(x)$；　　(2) $h(x)=f(x)+g(x)$.

5 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，且函数图象关于 $x=3$ 对称，$f(x)$ 在区间 $(-\infty, 3]$ 上是增函数，判断 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上的单调性.

6 是否存在函数 $f(x)$，其既是奇函数，又是偶函数？如果不存在，说明理由；如果存在，举出实例.

7 研究函数 $f(x)=x+\frac{9}{x}$ 的性质，并作出函数图象.

1 (2，3)　2 (2，−3)　3 $-x\in D$　4 $f(-x)=-f(x)$　5 原点　6 奇　7 偶　8 $-2-h$

习题3-1A

1 已知下列表格表示的是函数 $s=g(t)$，写出 $g(-2)$，$g(0)$，$g(\sqrt{3})$.

t	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
s	−1	0	1

2. 已知函数 $f(x)=x^3+2x$，求 $f(0)$ 与 $f(-3)$.

3. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+1}$ 的定义域.

4. 已知 $f(x)=1-x^2$，求 $f(-2)$，$f(0)$ 和 $f(15)$，并求函数 $f(x)$ 的值域.

5. 函数的图象与 y 轴的公共点个数有多少种不同的情况？举例说明.

6. 已知函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，求证：$f(x)+g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上也是增函数.

7. 已知奇函数 $f(x)$ 在区间 $[1,6]$ 上是增函数，且最大值为 10，最小值为 4，判断 $f(x)$ 在 $[-6,-1]$ 上的单调性，并求 $f(x)$ 在 $[-6,-1]$ 上的最值.

8. 分别求函数 $f(x)=x^2+6x$ 的定义域为下列区间时的最值：

(1) $[-6,7]$； (2) $[1,3]$； (3) $[-6,-4]$.

9. 判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=(x+1)(x-1)$； (2) $f(x)=x(x+1)$；

(3) $f(x)=x+\sqrt[3]{x}$； (4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

习题3-1B

1. 已知集合 $A=[a,+\infty)$，对应关系 f 为“求倒数”，而且 f 为 A 上的函数，求实数 a 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 8x, & x>1,\end{cases}$ 若 $f(x)=\dfrac{1}{4}$，求 x 的值.

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$，求这个函数的定义域与值域.

4. 已知函数 $f(x)=3x-4$ 的定义域为 D，值域为 $[-10,5]$，求 D.

5. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in(-\infty,0],\\ 2x-3, & x\in(0,+\infty).\end{cases}$$

作出函数的图象，并求不等式 $f(x)>0$ 的解集.

6. 写出下列函数的单调性，并证明：

(1) $y=\dfrac{1}{x-2}$； (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

7. 已知函数 $f(x)=ax^2-2ax-3$，其中 $a>0$，运用函数的性质，比较 $f(-2)$ 与 $f(4)$，$f(-3)$ 与 $f(3)$ 的大小.

8. 已知函数 $f(x)=(x-1)^2+ax+2$ 是偶函数，求实数 a 的值.

9. 求证：$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\geqslant 0, \\ -x-1, & x<0 \end{cases}$ 是偶函数.

10. 研究函数 $f(x)=x^2-2|x|-1$ 的性质，并作出函数图象.

习题3-1C

1. 对于每个实数 x，设 $f(x)$ 取 $y=4x+1$，$y=x+2$，$y=-2x+4$ 三个函数值中的最小值，用分段函数的形式写出 $f(x)$ 的解析式，并求 $f(x)$ 的最大值.

2. 若函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数，$f(2)=0$，求不等式 $f(x)<0$ 的解集.

3. 求证：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称.

4. 求函数 $f(x)=x^2+2ax$，$x\in[1, 3]$ 的最值.

人民教育出版社

3.2 函数与方程、不等式之间的关系

1. 函数的零点

尝试与发现

已知函数 $f(x)=x-1$，我们知道，这个函数的定义域为 1______，而且可以求出，方程 $f(x)=0$ 的解集为 2______，不等式 $f(x)>0$ 的解集为 3______，不等式 $f(x)<0$ 的解集为 4______.

在图 3-2-1 中作出函数 $f(x)=x-1$ 的图象，总结上述方程、不等式的解集与函数定义域、函数图象之间的关系.

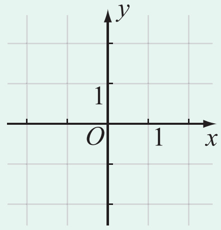


图 3-2-1

由尝试与发现可以看出，根据函数值的符号能够把函数的定义域分为几个不相交的集合. 具体来说，假设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若

$$A=\{x\in D \mid f(x)<0\},$$
$$B=\{x\in D \mid f(x)=0\},$$
$$C=\{x\in D \mid f(x)>0\},$$

显然，A，B，C 两两的交集都为空集，且 $D=A\cup B\cup C$.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 在实数 α 处的函数值等于零，即 $f(\alpha)=0$，则称 α 为函数 $y=f(x)$ 的**零点**. 上述集合 B 就是函数所有零点组成的集合.

不难看出，α 是函数 $f(x)$ 零点的充分必要条件是，$(\alpha, 0)$ 是函数图象与 x 轴的公共点. 因此，由函数的图象可以方便地看出函数值等于 0 的方程的解集，以及函数值与 0 比较相对大小的不等式的解集.

例 1 如图 3-2-2 所示是函数 $y=f(x)$ 的图象，分别写出 $f(x)=0$，$f(x)>0$，$f(x)\leqslant 0$ 的解集.

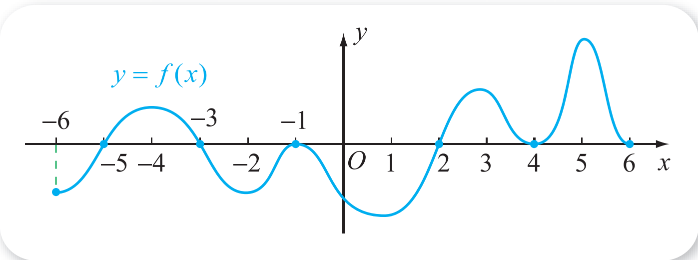


图 3-2-2

解 由图可知，$f(x)=0$ 的解集为

$$\{-5,\ -3,\ -1,\ 2,\ 4,\ 6\}.$$

$f(x)>0$ 的解集为

$$(-5,\ -3)\cup(2,\ 4)\cup(4,\ 6).$$

$f(x)\leqslant 0$ 的解集为

5 ______________________.

依照零点的定义可知，求函数 $y=f(x)$ 的零点，实质上就是要解方程 $f(x)=0$，而且只要得到了这个方程的解集，就可以知道函数图象与 x 轴的交点，再根据函数的性质等，就能得到类似 $f(x)>0$ 等不等式的解集.

2. 二次函数的零点及其与对应方程、不等式解集之间的关系

我们已经知道怎样求解一元二次方程，而且也知道二次函数的图象是抛物线，因此可以借助二次函数的图象得到一元二次不等式的解集.

例 2 利用函数求下列不等式的解集：

(1) $x^2-x-6<0$；　　(2) $x^2-x-6\geqslant 0$.

解 设 $f(x)=x^2-x-6$，令 $f(x)=0$，得

$$x^2-x-6=0,$$

即 $(x-3)(x+2)=0$，从而 $x=3$ 或 $x=-2$.

因此，3 和 -2 都是函数 $f(x)$ 的零点，从而 $f(x)$ 的图象与 x 轴相交于 $(3,\ 0)$ 和 $(-2,\ 0)$，又因为函数图象是开口向上的抛物线，所以可以作出函数图象的示意图，如图 3-2-3 所示.

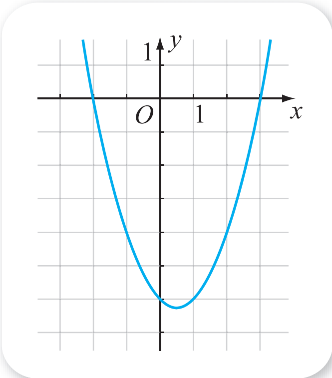


图 3-2-3

由图可知：

(1) 所求解集为 $(-2,\ 3)$；

(2) 所求解集为 $(-\infty,\ -2]\cup[3,\ +\infty)$.

例 3 利用函数求下列不等式的解集：

(1) $-x^2-2x-3\geqslant 0$；

(2) $-x^2-2x-3<0$.

解 设 $f(x)=-x^2-2x-3$，令 $f(x)=0$，得

$$x^2+2x+3=0,$$

即 $(x+1)^2=-2$，该方程无解.

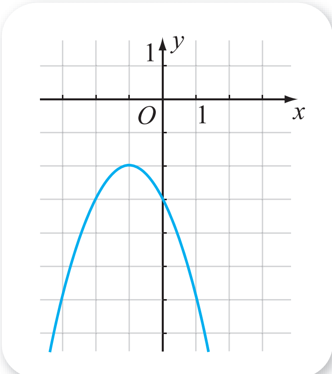


图 3-2-4

因此函数 $f(x)$ 无零点，从而 $f(x)$ 的图象与 x 轴没有交点，又因为函数图象是开口向下的抛物线，所以可以作出函数图象的示意图，如图 3-2-4 所示.

由图可知：

（1）所求解集为$\varnothing$；

（2）所求解集为 **R**.

例 4 利用函数求下列不等式的解集：

（1）$x^2-4x+4>0$； （2）$x^2-4x+4\leqslant 0$.

解 设 $f(x)=x^2-4x+4$，令 $f(x)=0$，得

$$x^2-4x+4=0,$$

即 $(x-2)^2=0$，从而 $x=2$.

因此，函数 $f(x)$ 的零点为 2，从而 $f(x)$ 的图象与 x 轴相交于 $(2,0)$，又因为函数图象是开口向上的抛物线，所以可知：

（1）所求解集为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$；

（2）所求解集为 $\{2\}$.

一般地，由一元二次方程解集的情况可知，对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$：

（1）当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解集中有两个元素 x_1，x_2，且 x_1，x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，$f(x)$ 的图象与 x 轴有两个公共点 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$；

（2）当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解集中只有一个元素 x_0，且 x_0 是 $f(x)$ 唯一的零点，$f(x)$ 的图象与 x 轴有一个公共点 $(x_0,0)$；

（3）当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根，此时 $f(x)$ 无零点，$f(x)$ 的图象与 x 轴没有公共点.

更进一步，可以由二次函数的图象得到对应的不等式的解集，有关内容留作练习.

例 5 求函数 $f(x)=(x+2)(x+1)(x-1)$ 的零点，并作出函数图象的示意图，写出不等式 $f(x)>0$ 和 $f(x)\leqslant 0$ 的解集.

解 函数零点为 -2，-1，1.

函数的定义域被这三个点划分了四个区间，每个区间函数值的符号如下表所示.

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

人民教育出版社

由此可以作出函数图象的示意图，如图 3-2-5 所示.

由图可知 $f(x)>0$ 的解集为

$(-2,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$；

$f(x)\leqslant 0$ 的解集为

$(-\infty,\ -2]\cup[-1,\ 1]$.

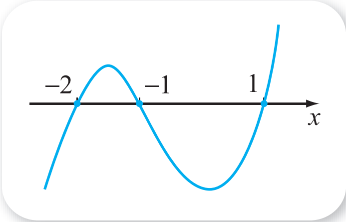


图 3-2-5

3. 零点的存在性及其近似值的求法

尝试与发现

关于 x 的一元一次方程 $kx+b=0$（$k\neq 0$）的求根公式为 6 ______.

一次函数、二次函数的零点是否存在，并不难判别，这是因为一元一次方程、一元二次方程实数解的情况，都可以根据它们的系数判别出来，而且有实数根的时候，都能够写出求根公式.

但是，对于次数大于或等于 3 的多项式函数（例如 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其中 $a\neq 0$），以及其他表达式更复杂的函数来说，判断零点是否存在以及求零点，都不是容易的事（事实上，数学家们已经证明：次数大于 4 的多项式方程，不存在通用的求根公式）. 因此，我们有必要探讨什么情况下一个函数一定存在零点.

尝试与发现

如图 3-2-6 所示，已知 A，B 都是函数 $y=f(x)$ 图象上的点，而且函数图象是连接 A，B 两点的连续不断的线，作出 3 种 $y=f(x)$ 的可能的图象.

判断 $f(x)$ 是否一定存在零点，总结出一般规律.

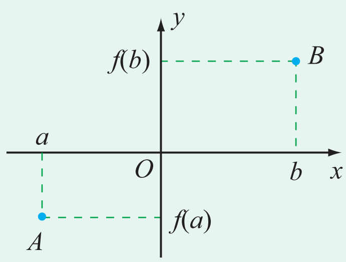


图 3-2-6

可以看出，尝试与发现中的函数 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 中一定存在零点.

函数零点存在定理　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的图象是连续不断的，并且 $f(a)f(b)<0$（即在区间两个端点处的函数值异号），则函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 中至少有一个零点，即 $\exists x_0\in(a,\ b)$，$f(x_0)=0$.

一般地，解析式是多项式的函数的图象都是连续不断的．需要注意的是，反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象不是连续不断的．

例 6 求证：函数 $f(x)=x^3-2x+2$ 至少有一个零点．

证明 因为

$$f(0)=2>0，f(-2)=-8+4+2=-2<0，$$

所以 $f(-2)f(0)<0$，因此 $\exists x_0\in(-2，0)$，$f(x_0)=0$，即结论成立．

例 6 中的函数在区间 $(-2，0)$ 中存在零点 x_0，但是不难看出，求出 x_0 的精确值并不容易，那么，能不能想办法得到这个零点的近似值呢？比如，能否求出一个 x_1，使得 $|x_1-x_0|<\frac{1}{8}$？

尝试与发现

如果在区间 $(-2，0)$ 中任取一个数作为 x_0 的近似值，那么误差小于多少？如果取区间 $(-2，0)$ 的中点作为 x_0 的近似值，那么误差小于多少？怎样才能不断缩小误差？

如果在区间 $(-2，0)$ 中任取一个数作为 x_0 的近似值，误差小于 2；如果取区间 $(-2，0)$ 的中点作为 x_0 的近似值，误差小于 1.

一般地，求 x_0 的近似值，可以通过计算区间中点函数值，从而不断缩小零点所在的区间来实现，具体计算过程可用如下表格表示.

零点所在区间	区间中点	中点对应的函数值	取中点作为近似值时误差小于的值
$(-2，0)$	$\frac{-2+0}{2}=-1$	$f(-1)=-1+2+2=3>0$	1
$(-2，-1)$	$\frac{-2-1}{2}=-\frac{3}{2}$	$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{8}+3+2=\frac{13}{8}>0$	$\frac{1}{2}$
$\left(-2，-\frac{3}{2}\right)$	$\frac{-2-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{7}{4}$	$f\left(-\frac{7}{4}\right)=-\frac{343}{64}+\frac{7}{2}+2=\frac{9}{64}>0$	$\frac{1}{4}$
$\left(-2，-\frac{7}{4}\right)$	$\frac{-2-\frac{7}{4}}{2}=-\frac{15}{8}$		$\frac{1}{8}$

其中第 2 行的区间是 $(-2，-1)$，这是因为 $f(-2)f(-1)<0$，其他区间都是用类似方式得到的．最后一行的函数值没有计算，是因为不管 $x_0\in\left(-2，-\frac{15}{8}\right]$，还是 $x_0\in\left[-\frac{15}{8}，-\frac{7}{4}\right)$，我们都可以将 $-\frac{15}{8}$ 看成 x_0 的

近似值，而且误差小于$\frac{1}{8}$.

当然，按照类似的方式继续算下去，可以得到精确度更高的近似值.

上述这种求函数零点近似值的方法称为**二分法**.

在函数零点存在定理的条件满足时（即 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的，且 $f(a)f(b)<0$），给定近似的精确度 ε，用二分法求零点 x_0 的近似值 x_1，使得 $|x_1-x_0|<\varepsilon$ 的一般步骤如下：

第一步　检查 $|b-a|\leqslant 2\varepsilon$ 是否成立，如果成立，取 $x_1=\frac{a+b}{2}$，计算结束；如果不成立，转到第二步.

第二步　计算区间 (a, b) 的中点$\frac{a+b}{2}$对应的函数值，若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，取 $x_1=\frac{a+b}{2}$，计算结束；若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$，转到第三步.

第三步　若 $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，将$\frac{a+b}{2}$的值赋给 b（用$\frac{a+b}{2}\to b$ 表示，下同），回到第一步；否则必有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b)<0$，将$\frac{a+b}{2}$的值赋给 a，回到第一步.

这些步骤可用如图 3-2-7 所示的框图表示.

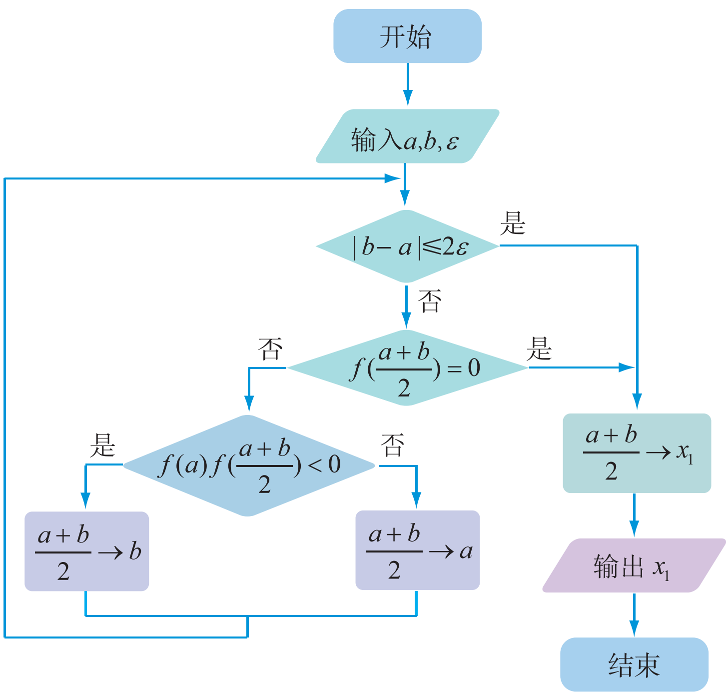


图 3-2-7

例 7　已知函数 $f(x)=x^2+ax+1$ 有两个零点，在区间 $(-1, 1)$ 上是单调的，且在该区间中有且只有一个零点，求实数 a 的取值范围.

解 因为函数 $f(x)$ 的图象是开口向上的抛物线，因此满足条件的函数图象的示意图如图 3-2-8（1）（2）所示.

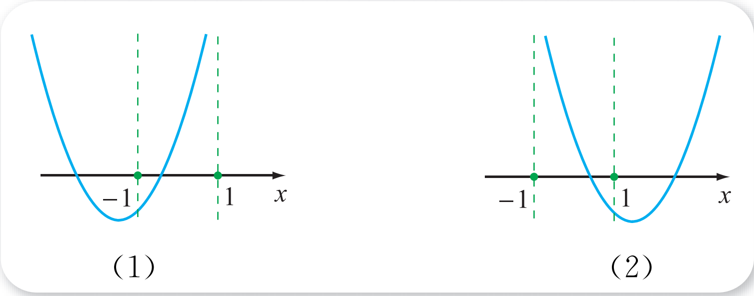


图 3-2-8

不管哪种情况，都可以归结为 $f(-1)f(1)<0$ 且 $\left|-\dfrac{a}{2}\right|\geqslant 1$，因此

$$(2-a)(a+2)<0 \text{ 且 } |a|\geqslant 2,$$

解得 $a<-2$ 或 $a>2$.

拓展阅读

二分法在搜索中的应用

日常生活中，我们经常要利用计算机、网络来搜索信息. 你知道吗？二分法在搜索的过程中扮演着非常重要的角色.

下图中的 15 个数是按从小到大排列的.

2	5	8	11	12	16	23	27	29	35	51	53	69	75	77

如果随机给出一个不大于 100 的自然数 x，要让计算机查找 x 是否在上面这列数中，设计怎样的查找方法，才能保证不管给出的是什么数，都能在指定的步骤内查到结果呢？

如果让计算机将 x 逐一与图中的数去比较，那么在有些情况下，只要比较 1 次就可以了（例如 $x=1$），但在有些情况下，却要比较 15 次才能完成任务（例如 $x=80$）.

如果我们用二分法的思想来查找，情况就不一样了：每一次都让 x 与序列中正中间的数进行大小比较，通过这种方式缩小其可能的位置范围. 例如，$x=13$ 时的查找过程可用下图表示.

2	5	8	11	12	16	23	27	29	35	51	53	69	75	77

↓

2	5	8	11	12	16	23	27	29	35	51	53	69	75	77

↓

2	5	8	11	12	16	23	27	29	35	51	53	69	75	77

↓

2	5	8	11	12	16	23	27	29	35	51	53	69	75	77

由此不难看出，不管给出的是什么数，最多 4 次就能完成任务.

计算机中的很多搜索程序都是用类似方法编写的，而且二分法在故障排除、实验设计方面都有应用，感兴趣的同学去查阅有关书籍和网站吧！

4. 用信息技术求函数零点

用 GeoGebra 中的 root 命令，可以方便地求得多项式函数的图象与 x 轴的交点坐标，从而得到对应函数的零点信息.

例如，在“输入”对话框中输入“root[x^2−x−6]”后按回车键，将得到函数 $f(x)=x^2-x-6$ 的图象与 x 轴的两个交点 A，B 的坐标；

输入“root[x^3−2x+2]”后按回车键，将得到函数 $f(x)=x^3-2x+2$ 的图象与 x 轴的交点 C 的坐标；

输入“root[x^3−2x+2，1，2]”后按回车键，将得到函数 $f(x)=x^3-2x+2$，$x\in[1,2]$ 的图象与 x 轴的交点的信息.

显示结果如图 3-2-9 所示，其中的“未定义”表示没有交点.

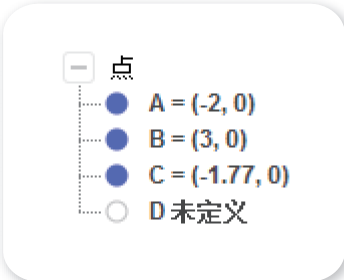


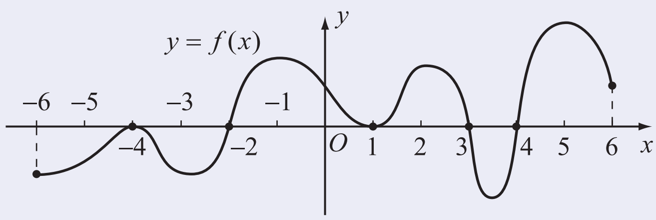
图 3-2-9

习题3-2A

1. 求下列函数的零点：

(1) $f(x)=-3x+2$；　(2) $f(x)=(x-1)^2(x^2-2)$.

2. 如图所示是函数 $y=f(x)$ 的图象，分别写出 $f(x)=0$，$f(x)>0$，$f(x)\leqslant 0$ 的解集.



（第 2 题）

3. 利用函数求下列不等式的解集：

(1) $x^2-2x-3>0$；　(2) $x^2-8x+16\geqslant 0$；　(3) $x^2+4x+5>0$.

4. 判断下列命题的真假：

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的，且在区间 $[1,4]$ 上有 $f(1)f(4)<0$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,4)$ 中至少有一个零点；

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的，且在区间 $[1,4]$ 上有 $f(1)f(4)>0$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,4)$ 中一定没有零点.

5 判断一次函数 $f(x)=kx+b$ $(k\neq 0)$ 是否一定存在零点，并说明理由.

6 已知 $f(x)=x^2+ax+b$，且 $f(x)<0$ 的解集是 $(-3,-1)$，求实数 a，b 的值.

7 当 m 是什么实数时，函数 $f(x)=mx^2-(1-m)x+m$ 没有零点?

8 写出一个同时满足下列两个条件的函数 $f(x)$：

(1) $f(1)f(-1)<0$；　　(2) $f(x)$ 无零点.

9 定义域为 **R** 的奇函数可能没有零点吗？为什么?

10 已知函数 $y=f(x)$ 是偶函数，其图象与 x 轴有四个交点，试求方程 $f(x)=0$ 的所有实根的和.

习题3-2B

1 求下列函数的零点：

(1) $f(x)=x^3-8x$；　　(2) $f(x)=-x^4+2x^2$；

(3) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1,\\ x^2-4x+1, & x>1.\end{cases}$

2 已知 $f(x)=mx^2-(m+3)x-1$，且 $f(x)<0$ 对任意实数 x 均成立，求实数 m 取值的集合.

3 若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个零点 -1，1，x_0，且 $x_0\in(2,3)$，求实数 c 的取值范围.

4 判断命题“已知函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的，且函数 $f(x)$ 的两个相邻的零点是 1，2，若 $\exists x_0\in(1,2)$，$f(x_0)>0$，则 $\forall x\in(1,2)$，$f(x)>0$”的真假.

5 已知函数 $f(x)=\dfrac{6}{x}-x^2$，在下列区间中，一定包含 $f(x)$ 零点的区间是（　　）.

(A) $(-2,-1)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,+\infty)$

6 求证：函数 $f(x)=x^3+x-1$ 只有一个零点 x_0，且 $x_0\in(0,1)$.

7 证明函数 $f(x)=x^3-x^2+5$，$x\in[-2,-1]$ 有零点，并指出用二分法求零点的近似值（精确度小于 0.1）时，至少需要进行多少次函数值的计算.

8 求下列函数的零点，并作出函数图象的示意图，写出不等式 $f(x)\geqslant 0$ 和 $f(x)<0$ 的解集：

(1) $f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$； (2) $f(x)=(x+2)x^2$.

9 作出二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象的示意图，并得出各种情况下不等式 $ax^2+bx+c>0$ 和 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集.

习题3-2C

1 求证：方程 $x^4-4x-2=0$ 在 $[-1,\ 2]$ 上至少有两个实根.

2 已知 $f(x)=(x-1)(x-m)$，不等式 $f(x)<0$ 的解集是 A，且 $(1,\ 2)\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

3 设函数 $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}$，已知 $f(x)\geqslant m$ 恒成立，求自然数 m 的值.

4 已知关于 x 的方程 $x^2-(m+3)x+m+3=0$ 有两个不相等的正实数根，求实数 m 的取值组成的集合.

5 已知函数 $f(x)=2(m+1)x^2+4mx+2m-1$ 有一个零点在区间 $(0,\ 1)$ 内，求实数 m 的取值范围.

1 $\mathbf{R}$ 2 $\{1\}$ 3 $(1,\ +\infty)$ 4 $(-\infty,\ 1)$

5 $[-6,\ -5]\cup[-3,\ 2]\cup\{4,\ 6\}$ 6 $x=-\dfrac{b}{k}$

人民教育出版社

3.3 函数的应用（一）

因为函数可以描述一个量依赖于另外一个量变化而变化的情况，所以函数的知识在实际生活中有着广泛的应用，下面我们通过例子来说明.

例 1 为了鼓励大家节约用水，自 2013 年以后，某市实行了阶梯水价制度，其中每户的综合用水单价与户年用水量的关系如下表所示.

分档	户年用水量/m^3	综合用水单价/(元·m^{-3})
第一阶梯	0～220（含）	3.45
第二阶梯	220～300（含）	4.83
第三阶梯	300 以上	5.83

记户年用水量为 x m^3 时应缴纳的水费为 $f(x)$ 元.

（1）写出 $f(x)$ 的解析式；

（2）假设该市某户居民 2015 年共用水 260 m^3，则 2015 年应缴纳水费多少元?

解 （1）不难看出，$f(x)$ 是一个分段函数，而且：

当 $0<x\leqslant 220$ 时，有 $f(x)=3.45x$；

当 $220<x\leqslant 300$ 时，有

$$\begin{aligned} f(x)&=220\times 3.45+(x-220)\times 4.83\\ &=4.83x-303.6; \end{aligned}$$

当 $x>300$ 时，有

$$\begin{aligned} f(x)&=220\times 3.45+(300-220)\times 4.83+(x-300)\times 5.83\\ &=5.83x-603.6. \end{aligned}$$

因此

$$f(x)=\begin{cases} 3.45x, & 0<x\leqslant 220,\\ 4.83x-303.6, & 220<x\leqslant 300,\\ 5.83x-603.6, & x>300. \end{cases}$$

（2）因为 $220<260\leqslant 300$，所以

$$f(260)=4.83\times 260-303.6=952.2,$$

因此此户居民 2015 年应缴纳水费 952.2 元.

由例 1 可知，可以用分段函数来描述生活中的阶梯水价、阶梯电价等内容.

例 2 城镇化是国家现代化的重要指标，据有关资料显示，1978—2013年，我国城镇常住人口从1.7亿增加到7.3亿．假设每一年城镇常住人口的增加量都相等，记1978年后第 t（限定 $t<40$）年的城镇常住人口为 $f(t)$ 亿．写出 $f(t)$ 的解析式，并由此估算出我国2017年的城镇常住人口数．

解 因为每一年城镇常住人口的增加量都相等，所以 $f(t)$ 是一次函数，设 $f(t)=kt+b$，其中 k，b 是常数．

注意到2013年是1978年后的第 $2\ 013-1\ 978=35$ 年，因此

$$\begin{cases} f(0)=1.7, \\ f(35)=7.3, \end{cases} \text{即} \begin{cases} b=1.7, \\ 35k+b=7.3, \end{cases}$$

解得 $k=0.16$，$b=1.7$．因此

$$f(t)=0.16t+1.7,\ t\in\mathbf{N} \text{ 且 } t<40.$$

又因为2017年是1978年后的第 $2\ 017-1\ 978=39$ 年，而且

$$f(39)=0.16\times39+1.7=7.94,$$

所以由此可估算出我国2017年的城镇常住人口为7.94亿．

例2中2017年城镇人口的估算还有其他算法，请读者自己尝试．

例 3 某农家旅游公司有客房160间，每间房单价为200元时，每天都客满．已知每间房单价每提高20元，则客房出租数就会减少10间．若不考虑其他因素，旅游公司把每间房单价提到多少时，每天客房的租金总收入最高？

分析 可以通过试算来理解题意，如下表所示．

提价/元	每间房单价/元	客房出租数	租金总收入/元
0	200	160	32 000
20	220	150	33 000
40	240	140	33 600
60	260	130	33 800
80	280	120	33 600
100	300	110	33 000
120	320	100	32 000

解 设每间房单价提高 x 个20元时，每天客房的租金总收入为 y 元．

因为此时每间房单价为 $200+20x$ 元，而客房出租数将减少 $10x$ 间，即为 $160-10x$ 间，所以

$$\begin{aligned} y &=(200+20x)(160-10x) \\ &=200(10+x)(16-x) \\ &=200(-x^2+6x+160) \\ &=200[-(x-3)^2+169] \\ &=-200(x-3)^2+33\ 800. \end{aligned}$$

从而可知，当 $x=3$ 时，y 的最大值为 33 800.

因此每间房单价提到 $200+20\times3=260$ 元时，每天客房的租金总收入最高.

例 4 某单位计划用围墙围出一块矩形场地，现有材料可筑墙的总长度为 l，如果要使围墙围出的场地面积最大，则矩形的长、宽各等于多少?

解 设矩形的长为 x 时，场地的面积为 S.

因为矩形的周长要为 l，所以矩形的宽为 $\frac{1}{2}(l-2x)$，由

$$\begin{cases} x>0, \\ \frac{1}{2}(l-2x)>0 \end{cases}$$

可解得 $0<x<\frac{l}{2}$.

又因为

$$S=\frac{1}{2}(l-2x)x=-x^2+\frac{l}{2}x=-\left(x-\frac{l}{4}\right)^2+\frac{l^2}{16},$$

所以当 $x=\frac{l}{4}$ 时，S 的最大值为 $\frac{l^2}{16}$. 此时矩形的宽为

$$\frac{1}{2}\left(l-2\times\frac{l}{4}\right)=\frac{l}{4}.$$

即所围矩形是长、宽都为 $\frac{l}{4}$ 的正方形时，场地面积最大.

> **想一想**
>
> 你能用均值不等式求得 S 的最大值吗?

例 5 已知某产品的总成本 C 与年产量 Q 之间的关系为 $C=aQ^2+3\ 000$，且当年产量是 100 时，总成本是 6 000. 设该产品年产量为 Q 时的平均成本为 $f(Q)$.

(1) 求 $f(Q)$ 的解析式;

(2) 求年产量为多少时，平均成本最小，并求最小值.

解 (1) 将 $Q=100$，$C=6\ 000$ 代入 $C=aQ^2+3\ 000$ 中，可得

$$100^2a+3\ 000=6\ 000,$$

从而 $a=\frac{3}{10}$，于是 $C=\frac{3Q^2}{10}+3\ 000$.

因此

$$f(Q)=\frac{C}{Q}=\frac{3}{10}Q+\frac{3\ 000}{Q},\quad Q>0.$$

(2) 因为

$$f(Q)=\frac{3}{10}Q+\frac{3\ 000}{Q}\geqslant2\sqrt{\frac{3}{10}Q\times\frac{3\ 000}{Q}}=60,$$

且$\dfrac{3}{10}Q=\dfrac{3\ 000}{Q}$，即 $Q=100$ 时，上述等号成立.

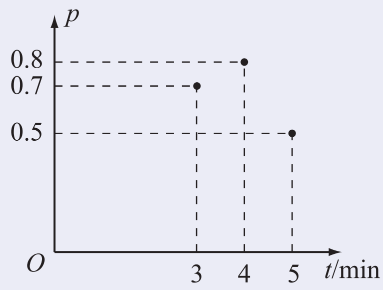
因此，当年产量为 100 时，平均成本最小，且最小值为 60.

习题3-3A

1. 一种商品的售价上涨 2%后，又下降了 2%，求商品的最终售价 y 与原来的售价 x 之间的关系.

2. 某村 2006 年年底共有 2 000 人，全年工农业总产值为 4 320 万元，若从 2007 年起，该村工农业总产值每年增加 160 万元，人口每年增加 20 人，设 2006 年后的第 x 年该村人均工农业产值为 y 万元，写出 y 与 x 之间的关系式.

3. 加工爆米花时，爆开且不煳的粒数的百分比称为“可食用率”. 在特定条件下，可食用率 p 与加工时间 t（单位：min）满足函数关系 $p=at^2+bt+c$（a，b，c 是常数），图中记录了三次实验的数据. 根据上述函数模型和实验数据，可以得到最佳加工时间为（　　）.



（第 3 题）

(A) 3.50 min　　(B) 3.75 min

(C) 4.00 min　　(D) 4.25 min

习题3-3B

1. 在经济学中，函数 $f(x)$ 的边际函数 $Mf(x)$ 定义为 $Mf(x)=f(x+1)-f(x)$. 某公司每月最多生产 100 台报警系统装置，生产 x 台（$x\in\mathbf{N}^*$）的收入函数为 $R(x)=3\ 000x-20x^2$（单位：元），其成本函数 $C(x)=500x+4\ 000$（单位：元），利润是收入与成本之差.

 (1) 求利润函数 $P(x)$ 及边际利润函数 $MP(x)$；

 (2) 利润函数 $P(x)$ 与边际利润函数 $MP(x)$ 是否具有相同的最大值？

2. 某公司最近 4 年对某种产品投入的宣传费 x 万元与年销售量 y t 之间的关系如下表所示.

x	1	4	9	16
y	168.6	236.6	304.6	372.6

 (1) 根据以上表格中的数据判断：$y=ax+b$ 与 $y=c\sqrt{x}+d$ 哪一个更适宜作为 y 与 x 的函数模型？

 (2) 已知这种产品的年利润 z 万元与 x，y 的关系为 $z=2y-10x$，则年宣传费 x 为多少时年利润最大？

3.4 数学建模活动：决定苹果的最佳出售时间点

数学建模是连接数学和现实世界的桥梁. 下面我们用实例来介绍，怎样从现实世界中发现问题，如何通过数学建模来求解特定的问题，并探讨怎样整理数学建模的结果.

建模过程描述与介绍

俗话说，“物以稀为贵”. 一般来说，当市面上某种商品的出售量比较多时，这种商品的价格就会比较低；而出售量比较少时，价格就会比较高.

例如，当市面上的苹果比较多时，苹果的价格就会降低. 这时，如果利用一定的技术手段将苹果进行保鲜存储，等到市面上的苹果变少、价格上升之后再出售，则同样多的苹果就可以获得相对较高的销售收入. 不过，需要注意的是，保鲜存储是有成本的，而且成本会随着时间的延长而增大.

针对上述这种日常生活中的现象，我们可以提出一些什么问题呢？

当然，我们可以探讨的问题很多. 例如，为什么会发生这些现象？什么情况下不会发生这样的现象？能够利用哪些技术手段进行保鲜存储？哪种保鲜存储的成本最低？等等. 类似的这些问题，因为不仅仅涉及量的关系，所以如果只用数学手段研究，将是十分困难的.

不过，上述现象中，涉及了量的增大与减少的问题，这可以用数学符号和语言进行描述.

仍以苹果为例，设市面上苹果的量为 x 万吨，苹果的单价为 y 元. 上述现象说明，y 会随着 x 的增大而减少，且 y 也会随着 x 的减少而增大——也就是说，如果 y 是 x 的函数并记作 $y=f(x)$ 的话，$f(x)$ 是减函数.

同样地，如果设保鲜存储的时间为 t 天，单位数量的保鲜存储成本为 C 元，且 C 是 t 的函数并记作 $C=g(t)$ 的话，$g(t)$ 是一个增函数.

由于市面上苹果的量 x 会随着时间 t 的变化而变化，因此可以认为 x 是 t 的函数，并记作 $x=h(t)$.

从上面这些描述不难看出，在第 t 天出售苹果时，单位数量的苹果所获得的收益 z 元可以用 t 表示出来，即

人民教育出版社

$$z=y-C=f(x)-g(t)=f(h(t))-g(t).$$

此时，如果 $f(x)$，$g(t)$，$h(t)$ 都是已知的，则能得到 z 与 t 的具体关系式. 有了关系式之后，就能解决如下问题：z 是否有最大值？如果 z 有最大值，那么 t 为多少时 z 取最大值？

怎样才能确定上述 $f(x)$，$g(t)$，$h(t)$ 呢？这可以通过合理假设以及收集数据、确定参数来完成.

例如，为了简单起见，我们可以假设 $f(x)$ 和 $g(t)$ 都是一次函数，且

$$f(x)=k_1x+l_1,\ g(t)=k_2t+l_2;$$

并假设 $h(t)$是一个二次函数，且

$$h(t)=at^2+bt+c.$$

则有

$$z=f(h(t))-g(t)=k_1at^2+(k_1b-k_2)t+k_1c+l_1-l_2,$$

其中 $k_1<0$，$k_2>0$，$a\neq0$.

上述各参数可以通过收集实际数据来确定. 例如，如果我们收集到了如下实际数据.

x	8.4	7.6
y	0.8	1.2

t	1	2
C	0.11	0.12

t	1	2	3
x	9.462	9.328	9.198

利用待定系数法，根据前面的假设就可以确定出

$$y=f(x)=-0.5x+5,$$
$$C=g(t)=0.01t+0.1,$$
$$x=h(t)=0.002t^2-0.14t+9.6,$$

因此

$$z=-0.001t^2+0.06t+0.1.$$

注意到上式可以改写成 $z=-0.001(t-30)^2+1$，所以此时在 $t=30$ 时，z 取最大值 1. 也就是说，在上述情况下，保鲜存储 30 天时，单位商品所获得的利润最大，为 1 元.

这样一来，我们就建立了一个决定苹果的最佳出售时间点的模型，并通过有关数据进行了说明.

当然，实际情况与上面的建模结果可能会出现偏差. 因为我们假设 $f(x)$和 $g(t)$都是一次函数等就已经把问题进行了简化，如果条件容许的话，可以先不假设函数的具体形式，在收集尽量多的数据的基础上，通过对数据的分析来最终得出函数的具体形式，这样也就能优化我们最终建立的模型.

以上我们用叙述的方式，让大家经历了一个简单的数学建模全过程. 由此可以看出，对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法

构建模型解决问题就是数学建模．数学建模过程主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、建立模型，确定参数、计算求解，验证结果、改进模型，最终解决实际问题．

在实际的数学建模过程中，为了向别人介绍数学建模的成果，给别人提供参考，我们还需要将建模结果整理成论文的形式．

一般来说，数学建模论文的结构可以按照建模过程来确定．例如，图 3-4-1、图 3-4-2、图 3-4-3 所示都可以是数学建模论文的主体结构．

论文标题

↓

一、发现问题、提出问题

↓

二、分析问题、建立模型

↓

三、确定参数、计算求解

↓

四、验证结果、改进模型

图 3-4-1

论文标题

↓

一、问题的提出与分析

↓

二、模型的建立与计算

↓

三、问题的解决与反思

图 3-4-2

论文标题

↓

一、背景介绍

↓

二、问题提出与分析

↓

三、模型假设与符号说明

↓

四、模型的建立

↓

五、模型的求解

↓

六、模型的检验

↓

七、模型的评价

图 3-4-3

当然，数学建模论文中还可以根据需要增加作者、摘要、参考文献、附录等信息．

需要提醒的是，对于一些综合性比较强的问题而言，数学建模的过程中需要做的事情比较多，比如数据收集与整理、模型试算、对比不同的模型、将结果以可视化方式展示、资料整理与论文撰写等，因此数学建模的过程中，往往采用分工合作的方式进行．一般来说，一个数学建模小组由 3～5 人组成．理想的小组中，既要有数学基础扎实的同学，也要有能熟练使用计算机的同学，还要有写作表达能力强的同学．

数学建模论文示例

国民收入、消费与投资的关系

1. 发现问题、提出问题

在政府文件中，我们经常可以看到有关经济增长与投资、消费的内容.

例如，《国务院关于促进创业投资持续健康发展的若干意见》（国发〔2016〕53 号）指出："近年来，我国创业投资快速发展，不仅拓宽了创业企业投融资渠道、促进了经济结构调整和产业转型升级，增强了经济发展新动能，也提高了直接融资比重、拉动了民间投资服务实体经济，激发了创业创新、促进了就业增长."

2016 年 11 月，《国务院办公厅关于进一步扩大旅游文化体育健康养老教育培训等领域消费的意见》（国办发〔2016〕85 号）指出："当前，我国国内消费持续稳定增长，为经济运行总体平稳、稳中有进发挥了基础性作用. 顺应群众期盼，以改革创新增加消费领域特别是服务消费领域有效供给、补上短板，有利于改善民生、促进服务业发展和经济转型升级、培育经济发展新动能."

习惯上，人们总是用收入来衡量经济状况，因此所谓经济增长或者经济发展，通常指的是收入增加.

那么，怎样描述投资与经济增长之间的关系呢？为什么说消费增长有利于经济发展呢？这些现象能用数学语言来描述吗？

2. 分析问题、建立模型

要用数学语言描述经济增长、投资、消费之间的关系，实际上是要研究国民收入（简称为收入，用 Y 表示）、国民投资（简称为投资，用 I 表示）、国民消费（简称为消费，用 C 表示）之间的关系.

为了简单起见，可以做出以下假设：

（1）收入、投资、消费都用同一单位来衡量，为了方便，以下均省略单位；

（2）收入只用于投资和消费；

（3）消费可以分为两部分，一部分为基本消费（用 C_0 表示），另一部分与收入成正比，比例系数为 a.

值得注意的是，以上假设都是合理的. 例如一个家庭的收入，一般而言，不是用于投资（比如储蓄、购买理财产品等），就是用于消费（比如家庭成员的生活支出等）；一个家庭的消费，一部分用于满足基本生活需求（比如购买食品等），而另一部分则依赖于收入的多少（比如家庭成员的旅游支出等）.

由假设可知，收入、投资、消费之间的关系可描述为

$$Y=C+I，C=C_0+aY.$$

在经济学中，这通常称为凯恩斯静态模型，因为这是英国经济学家凯恩斯最先提出的.

一些经济现象，可以通过凯恩斯静态模型中量之间的关系来体现. 例如，如果不存在透支消费，那么 $a<1$.

另外，如果将消费看成收入的函数，则这个函数在任意区间 $[Y_1, Y_2]$ 内的平均变化率均为

$$\frac{\Delta C}{\Delta Y}=\frac{C_0+aY_2-(C_0+aY_1)}{Y_2-Y_1}=a,$$

这表示收入每增加一个单位，消费将增加 a 个单位. 因此，a 通常称为边际消费倾向.

3. 确定参数、计算求解

(1) 收入与消费的关系

为了探讨经济增长（即收入）与消费的关系，可以将收入看成消费的函数，即 $Y=\frac{1}{a}C-\frac{C_0}{a}$，其中 C_0 与 a 均为参数. 可以算出，这个函数在任意区间内的平均变化率均为 $\frac{\Delta Y}{\Delta C}=\frac{1}{a}$，这表示消费每增加一个单位，收入将增加 $\frac{1}{a}$ 个单位.

例如，当 $C_0=10$，$a=\frac{4}{5}$ 时，有 $Y=\frac{5}{4}C-\frac{25}{2}$，因此：

如果消费 $C=30$，那么 $Y=\frac{5}{4}\times30-\frac{25}{2}=25$；

如果消费 $C=35$，那么 $Y=\frac{5}{4}\times35-\frac{25}{2}=31.25$.

可以看到，消费增长 5 个单位时，收入增加了 6.25 个单位.

(2) 收入与投资的关系

为了探讨经济增长（即收入）与投资的关系，可以将收入看成投资的函数. 通过消去 C 求解 Y 可得 $Y=\frac{1}{1-a}I+\frac{C_0}{1-a}$，此时，$C_0$ 与 a 均为参数. 可以算出，这个函数在任意区间内的平均变化率均为 $\frac{\Delta Y}{\Delta I}=\frac{1}{1-a}$，这表示投资每增加 1 个单位，收入将增加 $\frac{1}{1-a}$ 个单位.

例如，当 $C_0=10$，$a=\frac{4}{5}$ 时，有 $Y=5I+50$，因此：

如果投资 $I=10$，那么 $Y=5\times10+50=100$；

如果投资 $I=15$，那么 $Y=5\times15+50=125$.

可以看到，投资增长 5 个单位时，收入增加了 25 个单位.

4. 验证结果、改进模型

从上述计算结果可以看出，当消费增长或者投资增长时，都将导致收入增加（这样一

来，我们也就完成了本章导语中投资与经济增长之间关系问题的解答）．而且，一般情况下，收入增加比消费增长或投资增长快．事实上，当 $0<a<1$ 时，可知 $\frac{1}{a}>1$ 且 $\frac{1}{1-a}>1$．这就是说，平均变化率 $\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{1-a}$ 都大于 1．经济学上将这种现象称为乘数效应．

可以看出，凯恩斯静态模型能够较好地描述收入、投资与消费的关系．

这个模型中，为了简单起见，假设了基本消费以外的消费与收入成正比，但实际的情况可能会更加复杂，模型的改进可以从这方面入手．

活动要求与提示

1. 与其他同学一起讨论如下问题：

（1）从现实世界中发现问题并进行建模时，所发现的问题要具有什么特征时才方便使用数学知识加以解决？

（2）对同一个现象甚至同一组数据进行数学建模时，能否使用不同的数学对象进行描述？

2. 参考数学建模论文示例，以“决定苹果的最佳出售时间点”为题，将“建模过程描述与介绍”中的有关内容整理成一篇数学建模论文．（提示：论文的主体结构可以不同于示例．）

3. 按照优势互补的原则，跟其他同学组成一个数学建模小组，在以下两个题目中，任选一个进行数学建模实践．

（1）经济生活中，商品的需求量与供给量都与商品的价格有关．一般来说，商品的价格越低，想购买这种商品的人就越多，因此需求量越大，但此时因为销售的利润低，因此卖的人就会越少，从而供给量越小．与其他同学一起分工合作，查阅有关资料，按照数学建模的步骤与方法，给出商品的需求量与供给量模型，并探讨它们之间的关系．

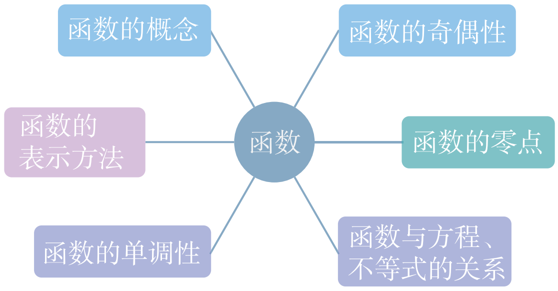
（2）不管是驾驶汽车还是骑自行车，当发现路况有变化需要紧急停车时，停车距离会与很多因素有关．例如，人的反应时间、车的速度、车与人的质量等都会影响停车距离．与其他同学一起分工合作，查阅有关数据或者自行设计试验收集数据，建立有关停车距离的数学模型．

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们学习了函数的知识，首先在复习初中知识的基础上更新了函数的概念，总结了函数的表示方法，学习了函数的单调性及其证明方法，然后学习了函数的奇偶性，最后得到了函数零点以及函数与方程、不等式的关系等.

依照各知识之间的联系，我们可以作出如下的知识结构图.



上述知识结构图还可以细化.

结合自己的学习心得，发挥你的想象力和创造力，为本章的知识设计出一份独特的知识结构图，然后和同学交流制作的心得吧！

02 课题作业

（1）函数是现代数学中最重要的概念之一，它几乎已经渗透到每一个数学分支中. 但是，函数概念的发展与完善，经历了几百年才完成.

函数是在利用数学研究运动的过程中引入的，最初函数是用文字和语言来表述的，后来人们逐步使用符号语言来描述函数，现代数学中还有人用有序数对来定义函数（例如，函数是指满足下述条件的有序数对的集合 E：如果 $(x_1, y_1)\in E$，$(x_2, y_2)\in E$，且 $x_1=x_2$，那么 $y_1=y_2$）. 在函数概念的发展过程中，伽利略、牛顿、欧拉、柯西、狄利克雷等都作出了贡献，推动了函数概念的完善.

搜集函数概念的形成与发展的历史资料，撰写论文，梳理函数发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及函数对人类文明的贡献，并尝试给出学习函数内容的建议.

（2）试根据本章内容，总结为什么要强调函数是实数集合之间的对应关系.

03 复习题

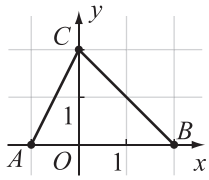
A 组

1. 已知 $f(x)=3x^2+x$，$x\in\mathbf{Z}$，且 $f(t)=2$，求 t 的值.

2. 把下列函数写成分段函数的形式，求出定义域和值域，并作出函数图象：

（1）$y=|x-1|$；　　（2）$y=|2x+3|-1$.

3. 如图，函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB，求函数的解析式.



（第 3 题）

4. 已知奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3,6]$ 上是增函数，且在区间 $[3,6]$ 上的最大值为 8，最小值为 -1，求 $2f(-6)+f(-3)$ 的值.

5. 判断下列函数是否具有奇偶性：

（1）$f(x)=5x+3$；　　（2）$f(x)=5x$；

（3）$f(x)=2x^2+1$；　　（4）$f(x)=x^2+6x+9$；

（5）$f(x)=\dfrac{1}{x^2}+2x^4$；　　（6）$f(x)=x+\dfrac{1}{x^3}$.

6. 已知 $f(x)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$f(1)=-2$，$f(3)=1$，比较 $f(-3)$ 与 $f(-1)$ 的大小.

7. 求下列函数的零点：

（1）$f(x)=-x^2-x+20$；　　（2）$f(x)=(x^2-2)(x^2-3x+2)$.

8. 如果二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象的对称轴是 $x=1$，并且通过点 $A(-1,7)$，求 a，b 的值.

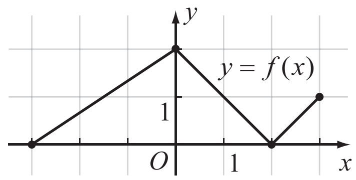
9. 已知 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$，求证：

（1）$f(x)$ 是偶函数；　　（2）$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$.

10. 求证：函数 $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2+1}$ 在区间 $(2,3)$ 上至少有一个零点.

B 组

1. 如图，已知函数 $y=f(x)$ 的图象由三条线段组成，求：



（第 1 题）

（1）$f(0)$，$f(1)$，$f(2.5)$；

（2）$f(-2)$，$f(0.5)$，$f(-0.5)$，$f(2.2)$；

（3）$f(x)$ 的定义域和值域.

2. 求下列函数的值域：

（1）$y=\dfrac{4}{x^2}$，$x\in[-2,0)$；　　（2）$y=\sqrt{-x}$，$x\in(-\infty,0]$.

3. 已知函数 $y=f(x)$ 是 **R** 上的增函数，$y=g(x)$ 是 **R** 上的减函数，求证：$f(x)-g(x)$ 在 **R** 上是增函数.

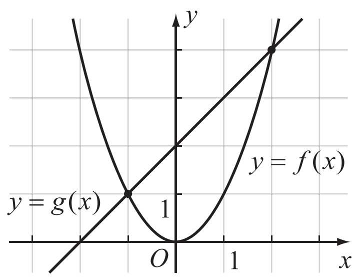
4. 已知 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在 $(-\infty,4]$ 上是减函数，求 a 的取值范围.

5. 已知 $f(x)$ 是定义域为 **R** 的奇函数，且 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+2x$，求 $x<0$ 时 $f(x)$ 的解析式.

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，且函数图象关于点 $(-2,1)$ 对称，$f(x)$ 在区间 $[-2,+\infty)$ 上是增函数，判断 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-2]$ 上的单调性.

7. 求函数 $f(x)=(x+1)(x-1)^2(x-3)$ 的零点，并作出函数图象的示意图，写出不等式 $f(x)>0$ 和 $f(x)\leqslant 0$ 的解集.

8. 已知函数 $y=f(x)$ 是二次函数，$y=g(x)$ 是一次函数，它们的部分图象如图所示.



（第 8 题）

（1）分别写出 $f(x)=4$，$f(x)\geqslant 4$ 的解集；

（2）分别写出 $f(x)=g(x)$，$f(x)>g(x)$，$f(x)\leqslant g(x)$ 的解集.

人民教育出版社

9. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，且 2 是它的一个零点，求不等式 $f(x-1)>0$ 的解集.

10. 设函数 $f(x)$ 在 **R** 上是偶函数，且在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，比较 $f(-2)$ 与 $f(a^2-2a+4)$ $(a\in\mathbf{R})$ 的大小.

11. 求证：函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-4$ 有且只有两个零点.

12. 已知 n 是大于 1 的正整数，求证：

(1) 当 n 是奇数且 a 是实数时，方程 $x^n=a$ 的解集中只有一个元素；

(2) 当 n 是偶数且 a 是正数时，方程 $x^n=a$ 的解集中只有两个元素.

C 组

1. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(-2+k)=f(-2-k)$ $(k\in\mathbf{R})$，且该函数的图象与 y 轴交于点 $(0, 1)$，在 x 轴上截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求该二次函数的解析式.

2. (1) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1, 2]$，值域为 $[-5, +\infty)$，设 $g(x)=f(2x-1)$，求 $g(x)$ 的定义域和值域；

(2) 已知 $g(x)=f(2x-1)+1$，且 $g(x)$ 的定义域为 $(1, 2]$，值域为 $[-5, +\infty)$，求函数 $f(x)$ 的定义域和值域.

3. 如果关于 x 的方程 $7x^2-(a+13)x+a^2-a-2=0$ 的两根分别在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 内，求实数 a 的取值范围.

人民教育出版社

人民教育出版社

人民教育出版社

后　记

本套教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组依据教育部《普通高中数学课程标准（2017年版）》编写的，2019年经国家教材委员会专家委员会审核通过.

本套教科书的编写，集中反映了我国十余年来普通高中课程改革的成果，吸取了2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的编写经验，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教材编写专家、教研人员和一线教师，以及教材设计装帧专家的集体智慧.

我们衷心感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的所有编写人员，尤其是因为种种原因未能参加此次教材修订的专家、学者：丁尔陞、江守礼、房艮孙、张润琦、高尚华、万庆炎、魏榕彬、邱万作、陈研、段发善、李洹岸、陈亦飞、刘长明、郭鸿、王池富……

本套教科书在编写过程中，得到了《普通高中数学课程标准（2017年版）》制定组、国家教材委员会专家委员会等的大力支持. 借此机会，向所有制定组成员、专家委员会成员以及其他为我们教材编写提供过帮助的专家表示衷心的感谢！

我们感谢对本套教科书的编写、出版、试教等提供过帮助与支持的所有同仁和社会各界朋友：王跃飞、胡细宝、邵丽云、王晓声、曹付生、侯立伟、王中华、王光图、王秀梅、卞文、邓艳强、田媛、史洪波、付一博、吕希、吕晶、朱明鲜、刘超、闫旭、池洪清、阮征、孙国华、牟柏林、李刚、李广勤、李洪岩、何艳国、张伟、张羽、张明、张文刚、张春青、张晶强、金永涛、郑继平、常丽艳、潘戈、薛达志、郑海军、赵争鸣、吴晖湘、戴莉、金盈、舒风杰、李祥广、胡文亮、王玉洁、杨长智、徐会吉、尹玉柱、尹燕花……

本套教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示衷心的感谢！同时也向为本书提供照片的单位表示感谢！

本套教科书投入使用后，我们根据各方意见作了修订，真诚希望广大师生和家长继续提出宝贵意见.

本书责任编辑：龙正武、姜航；美术编辑：史越；插图绘制：郑海军.

联系方式

电话：010–58758532，010–58758866

电子邮箱：mathb@pep.com.cn，jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组

人民教育出版社
人民教育出版社

人民教育出版社

人民教育出版社

PUTONG GAOZHONG JIAOKESHU

SHUXUE

绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-33572-3