国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学

必修

第二册

B版

人民教育出版社

人民教育出版社

普通高中教科书

数学

必修

第二册

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

人民教育出版社
·北京·

B版

主　　编：高存明
副 主 编：王殿军　朱志勇　龙正武
本册主编：韩际清　陈宏伯
其他编者：李叶舟　孙晓俊　安学保　熊永昌　秦玉波　于世章

普通高中教科书　数学（B 版）　必修　第二册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

出　　版　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn

前　言

人们喜欢音乐，是因为它拥有优美和谐的旋律；人们喜欢美术，是因为它描绘了人和自然的美；人们喜欢数学，是因为它用空间形式和数量关系刻画了自然界和人类社会的内在规律，用简洁、优美的公式与定理揭示了世界的本质，用严谨的语言和逻辑梳理了人们的思维……

我国著名数学家华罗庚先生曾经指出：数学是一切科学的得力助手和工具；任何一门科学缺少了数学这一工具便不能确切地刻画出客观事物变化的状态，更不能从已知数据推出未知的数据来，因而就减少了科学预见的可能性，或者减弱了科学预见的准确度.

事实上，任何一项现代科学技术的出现与发展，背后都一定有数学知识的支撑. 互联网的普及、共享经济的繁荣、网络支付的便利、物联网的兴起、人工智能的发展、大数据的应用，离开了数学知识都是不可能的！并且，现代生活中，类似“逻辑”“函数”“命题”“线性增长”“指数增长”“概率”“相关性”等数学术语，在政府文件、新闻报道中比比皆是.

正如《普通高中数学课程标准（2017 年版）》（以下简称“课程标准”）所指出的：数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程中发挥着不可替代的作用. 数学素养是现代社会每一个人应该具备的基本素养. 高中生学习必需的数学知识，能为自身的可持续发展和终身学习奠定基础.

为了帮助广大高中生更好地学习相关数学知识，我们按照课程标准的要求编写了这套高中数学教材. 在编写过程中，我们着重做了以下几项工作.

1. 关注学生成长，体现时代特征

教材在选取内容的背景素材时，力图从学生熟悉的情境出发，着力体现时代特征，并为学生的成长提供支撑. 例如，以下内容在本套教材中都有所体现：利用数学知识破解魔术的“秘密”，用生活中的例子说明学习逻辑知识以及理性思考的重要性，从数学角度理解报刊上有关人工智能、新兴媒体等报道中出现的“线性增长”“爆炸式增长”等名词.

教材中还提到了“网络搜索”“人工智能”“环境保护”“大数据”“按揭贷款”“电子商务”“创业创新”等. 我们相信，这些能引起大家的共鸣.

此外，教材中多处出现了借助现代信息技术学习数学知识的内容，包括怎样借助数学软件解方程、不等式，怎样借助信息技术呈现统计结果、展示模拟过程，等等.

在体现时代特征的同时，我们也特别注重对中华优秀传统文化的展示. 例如，教材中精选了多道我国古代数学名题，启发大家从数学角度去理解“失败乃成功之母”“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”等语句的含义，呈现了与二十四节气、古典诗词等有关的调查数据，介绍了《九章算术》在代数上的成就以及我国古代的统计工作，等等.

2. 吸收先进理念，改变呈现方式

在教材编写过程中，编者认真学习和讨论了当前教育学、心理学等学科的先进理念，并通过改变教材呈现方式来加以体现，力图真正做到“以学习者为中心”.

人民教育出版社

例如，教材每一章都引用了一段名人名言，旨在为大家的数学学习提供参考和指引；通过“情境与问题”栏目，展示相关数学知识在现实生活等情境中的应用；利用“尝试与发现”栏目，鼓励大家大胆尝试，并在此基础上进行猜想、归纳与总结；通过填空的方式，培养大家学习数学的信心；选择与内容紧密联系的专题，设置拓展阅读，以拓宽大家的知识面，了解数学应用的广泛性；等等.

3. 遵循认知规律，力求温故知新

数学学习必须循序渐进是一种共识. 基础不扎实是很多人学不好数学的重要原因，本套教材在编写时特别考虑了这一点.

事实上，教材一方面按照课程标准的要求，讲解和复习了高中数学必备的集合、等式、不等式等内容；另一方面，在呈现新知识时，教材注重从已有知识出发，在回顾的基础上通过实际例子逐步引入，尽力展现新旧知识的联系，以达到温故知新的效果.

例如，教材在复习了变量以及初中函数概念的基础上介绍了函数中的对应关系，在回顾了整数指数幂、二次根式后引入了分数指数幂，等等.

正因为如此，即使是初中数学基础比较薄弱的同学，使用本套教材也能顺利地进行学习，并最终达到理想的效果. 这在本套教材试教过程中已得到印证.

4. 揭示内容本质，重视直观理解

数学知识具有客观性，但数学知识的理解有多种方式与途径. 揭示内容本质，培养大家对数学内容的直观理解，是我们编写本套教材时特别注意的方面之一.

首先，教材内容的安排突出主线，强调“通性通法”. 例如，多次强调了配方法的使用，自始至终贯彻函数的研究应从特殊到一般、从性质到图象，等等.

其次，尽量自然地引入新内容或新方法. 例如，通过实例说明学习中位数、百分位数的必要性，通过对比说明用样本估计总体的合理性，等等.

最后，注重培养大家的数学学科核心素养. 课程标准提出的数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析，在教材中都得到了落实. 仅以数学抽象为例，教材处处强调了自然语言与符号语言之间的相互转化等.

总的来说，“引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界”并不容易. 为此，我们在编写教材时做了很多新的尝试，力图给大家提供一套有时代特色、易教易学的数学教材，以帮助大家学习.

本书是这套教材必修部分的第二册，呈现了指数函数、对数函数与幂函数，统计与概率，平面向量初步的内容. 通过本书的目录与每章的“本章导语”，可以大致了解本书的全貌，这里不再重复.

由于编写时间有限等原因，书中难免会有疏漏之处，敬请大家多提宝贵意见，以使教材日臻完善.

人民教育出版社

目录

人民教育出版社

本书拓展阅读目录

人民教育出版社

上数学课，老师介绍有趣的题目、数学的背景、数学家的故事以及老的数学是如何发展的，这些使我对数学产生了浓厚的兴趣．更重要的是，老师建立了我对数学的信心，使我不会害怕，勇敢地表达出来．

——丘成桐

第四章

指数函数、对数函数与幂函数

本章导语

初中时我们就已经学习过一些指数知识，例如知道 2^5 表示 5 个 2 相乘，因此 $2^5=32$，还知道指数的运算法则等.

“公众对于人工智能存在两种心态，一种是过度失望，认为进展太慢了，与科幻电影呈现的相差太远；还有一种是过度乐观而产生的焦虑：人工智能有朝一日会做得非常强大，甚至可以自我复制，能力指数级增长，人类受到了生存的挑战怎么办?”（《中国青年报》2015 年 4 月 8 日）

“在大数据时代，人类产生的电子数据以每两年翻一番的增幅爆炸式增长，人类在过去 3 年间产生的数据总量超过了之前几千年产生的数据总量，预测、分析这些海量数据面临巨大挑战.”（《人民日报》2015 年 4 月 1 日）

你知道这两则新闻报道里出现的“指数级增长”“爆炸式增长”的确切含义吗？这与本章要学习的指数函数有关.

“5 月 12 日四川汶川地震发生后，中国地震台网中心利用国家地震台网的实时观测数据，速报的震级为里氏 7.8 级. 随后，根据国际惯例，地震专家利用包括全球地震台网在内的更多台站资料，对这次地震的参数进行了详细测定，据此对震级进行修订，修订后震级为里氏 8.0 级.”（《中国青年报》2008 年 5 月 19 日）

你知道震级相差 0.2 意味着什么吗？这与本章要学习的对数知识有关.

本章我们首先将继续学习有关指数的知识，并探讨指数函数的性质与图象. 然后引入对数运算，探讨对数函数的知识，最后学习幂函数的有关内容.

4.1　指数与指数函数

4.1.1　实数指数幂及其运算

情境与问题

国家统计局有关数据显示，我国全社会研究与试验发展经费支出近些年迅速增长：2019 年为 21 737 亿元，2020 年、2021 年、2022 年的年增长率分别为 10.3%，14.2%，10.4%.

你能根据这三个年增长率的数据，算出年平均增长率，并以 2019 年的经费支出为基础，预测 2023 年及以后各年的经费支出吗？

为了解决类似情境中的问题，我们需要对指数运算有更多的了解.

1. 有理数指数幂

初中我们已经学习了整数指数幂的知识，例如

$$2^5=2\times2\times2\times2\times2=32,$$

$$3^0=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad},$$

$$5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad}.$$

一般地，a^n 中的 a 称为底数，n 称为指数①.

整数指数幂运算的运算法则有

$$a^m a^n=a^{m+n},$$

$$(a^m)^n=a^{mn},$$

$$(ab)^m=a^m b^m.$$

另外，初中我们还学习了平方根和立方根：

① 本章中，所有字母的取值范围均默认为使式子有意义的取值范围.

（1）如果 $x^2=a$，则 x 称为 a 的平方根（或二次方根）：当 $a>0$ 时，a 有两个平方根，它们互为相反数，正的平方根记为 $\sqrt{a}$，负的平方根记为 $-\sqrt{a}$；当 $a=0$ 时，a 只有一个平方根，记为 $\sqrt{0}=0$；当 $a<0$ 时，a 在实数范围内没有平方根.

例如，$\sqrt{9}=$ 3 ______.

二次根式的运算法则有

$$(\sqrt{a})^2=a,$$

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

（2）如果 $x^3=a$，则 x 称为 a 的立方根（或三次方根），在实数范围内，任意实数 a 有且只有一个立方根，记作 $\sqrt[3]{a}$.

例如，$\sqrt[3]{8}=$ 4 ______.

尝试与发现

类比二次方根和三次方根，给出四次方根和五次方根的定义.

一般地，给定大于 1 的正整数 n 和实数 a，如果存在实数 x，使得

$$x^n=a,$$

则 **x 称为 a 的 n 次方根**.

例如，因为方程 $x^4=81$ 的实数解为 3 与 -3，所以 3 与 -3 都是 81 的 4 次方根；因为 $2^5=32$，而且 $x^5=32$ 只有一个实数解，所以 32 的 5 次方根为 2.

根据方程 $x^n=a$ 解的情况不难看出：

（1）0 的任意正整数次方根均为 0，记为 $\sqrt[n]{0}=0$.

（2）正数 a 的偶数次方根有两个，它们互为相反数，其中正的方根称为 a 的 n 次算术根，记为 $\sqrt[n]{a}$，负的方根记为 $-\sqrt[n]{a}$；负数的偶数次方根在实数范围内不存在，即当 $a<0$ 且 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a}$ 在实数范围内没有意义.

（3）任意实数的奇数次方根都有且只有一个，记为 $\sqrt[n]{a}$. 而且正数的奇数次方根是一个正数，负数的奇数次方根是一个负数.

当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义的时候，$\sqrt[n]{a}$ 称为**根式**，n 称为**根指数**，a 称为**被开方数**.

注意，虽然我们不知道 $\sqrt[5]{-2}$ 等的精确的小数形式（计算器和计算机上给出的值都是近似值），但是按照定义，我们知道 $\sqrt[5]{-2}$ 的一些性质，比如 $(\sqrt[5]{-2})^5=-2$ 等.

人民教育出版社

一般地，根式具有以下性质：

（1）$(\sqrt[n]{a})^n=a$.

（2）当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|$.

例如，

$$\sqrt[7]{(-2)^7}=-2，\sqrt[4]{(-3)^4}=|-3|=3，(\sqrt[5]{2^3})^5=2^3=8.$$

尝试与发现

你能想出一个新的二次根式符号的表示方法，使 $(\sqrt{a})^2=a$ 成为 $(a^m)^n=a^{mn}$ 的特例，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 成为 $a^mb^m=(ab)^m$ 的特例吗？

现在来将整数指数幂运算推广到分数指数幂运算．同以前一样，我们希望推广后，有关的运算性质仍然能保持，比如 $(a^m)^n=a^{mn}$ 在指数是分数时仍然成立，举例来说，$5^{\frac{1}{2}}$ 应该满足

$$(5^{\frac{1}{2}})^2=5^{\frac{1}{2}\times 2}=5^1=5，$$

这表示 $5^{\frac{1}{2}}$ 应该是 5 的平方根，但是 5 的平方根有两个，即 $\sqrt{5}$ 和 $-\sqrt{5}$，为了方便起见，我们规定 $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$．又如 $(a^{\frac{1}{3}})^3$ 和 $(a^{\frac{2}{3}})^3$ 这样的运算，如果规定

$$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}，a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}，$$

则

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3=(\sqrt[3]{a})^3=a=a^{\frac{1}{3}\times 3}，$$

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3=(\sqrt[3]{a^2})^3=a^2=a^{\frac{2}{3}\times 3}，$$

即分数指数幂运算可以像整数指数幂那样运算.

为了方便起见，我们约定底数 $a>0$．于是，当 $a>0$ 时，规定

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}，$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}\quad（n，m\in\mathbf{N}_+，且\frac{m}{n}为既约分数）.$$

负分数指数幂的定义与负整数指数幂类似，即 $a>0$ 时，规定

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\quad（n，m\in\mathbf{N}_+）.$$

现在我们已经将整数指数幂推广到了分数指数幂（即有理数指数幂）．一般情况下，当 s 与 t 都是有理数时，有运算法则：

$$\boxed{\begin{array}{l} a^sa^t=a^{s+t}，\\ (a^s)^t=a^{st}，\\ (ab)^s=a^sb^s. \end{array}}$$

例如，

$$8^{\frac{3}{5}}\times 8^{\frac{2}{5}}=8^{\frac{3+2}{5}}=8^{1}=8,$$

$$8^{\frac{2}{3}}=(8^{\frac{1}{3}})^{2}=2^{2}=4,$$

$$3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}=3\times 3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{6}}=3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=3^{2}=9,$$

$$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}})^{3}=(a^{\frac{2}{3}})^{3}(b^{\frac{1}{4}})^{3}=a^{2}b^{\frac{3}{4}},$$

$$(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=(a^{\frac{1}{2}})^{2}-(b^{\frac{1}{2}})^{2}=a-b,$$

$$(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{2}=a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b.$$

例 1 求证：如果 $a>b>0$，n 是大于 1 的自然数，那么 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

证明 假设 $a^{\frac{1}{n}}\leqslant b^{\frac{1}{n}}$，即

$$a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}\text{ 或 }a^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{n}},$$

根据不等式的性质与根式的性质，得

$$a<b\text{ 或 }a=b.$$

这都与 $a>b$ 矛盾，因此假设不成立，从而 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

利用例 1 的结论，可以证明（留作练习）：

（1）如果 $a>b>0$，s 是正有理数，那么 $a^{s}>b^{s}$；

（2）如果 $a>1$，s 是正有理数，那么 $a^{s}>1$，$a^{-s}<1$；

（3）如果 $a>1$，$s>t>0$，且 s 与 t 均为有理数，那么 $a^{s}>a^{t}$.

2. 实数指数幂

有理数指数幂还可以推广到无理数指数幂，下面我们通过一个例子来描述其中的思想.

应该怎样理解 2^{π} 这个数呢？

尝试与发现

根据前面的知识，猜测 2^{π} 与 2^{3} 的相对大小，以及 2^{π} 与 2^{4} 的相对大小.

不难猜出，$2^{3}<2^{\pi}<2^{4}$.

就像在计算圆的面积时，我们常常取 π 为 3.14 一样，在精度要求不高的前提下，我们可以认为

$$2^{\pi}\approx 2^{3.14}=2^{\frac{157}{50}}.$$

因为 $\pi=3.141\ 592\ 653\cdots$是一个无理数（即无限不循环小数），我们写

不出它的精确的小数形式，但是因为 $3.1<\pi<3.2$，所以 $2^{3.1}<2^{\pi}<2^{3.2}$，同样

$$\begin{array}{llll}
3.14 < \pi < 3.15 & \Rightarrow 2^{3.14} & < 2^{\pi} & < 2^{3.15}, \\
3.141 < \pi < 3.142 & \Rightarrow 2^{3.141} & < 2^{\pi} & < 2^{3.142}, \\
3.1415 < \pi < 3.1416 & \Rightarrow 2^{3.1415} & < 2^{\pi} & < 2^{3.1416}, \\
3.14159 < \pi < 3.14160 & \Rightarrow 2^{3.14159} & < 2^{\pi} & < 2^{3.14160}.
\end{array}$$

也就是说，两个序列

$$3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ 3.14159,\ \cdots;$$

$$3.2,\ 3.15,\ 3.142,\ 3.1416,\ 3.14160,\ \cdots$$

中的数，随着小数点后位数的增加，都越来越接近 π，从而两个序列

$$2^{3.1},\ 2^{3.14},\ 2^{3.141},\ 2^{3.1415},\ 2^{3.14159},\ \cdots;$$

$$2^{3.2},\ 2^{3.15},\ 2^{3.142},\ 2^{3.1416},\ 2^{3.14160},\ \cdots$$

中的数，随着指数的变化，也都会越来越接近一个实数，这个实数就是 2^{π}.

一般地，当 $a>0$ 且 t 是无理数时，a^t 都是一个确定的实数，我们可以用与上述类似的方法找出它的任意精度的近似值. 因此，当 $a>0$，t 为任意实数时，可以认为实数指数幂 a^t 都有意义.

可以证明，对任意实数 s 和 t，类似前述有理数指数幂的运算法则仍然成立.

例 2 计算下列各式的值：

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3^{10}}}}{\sqrt[3]{9}}$；　　(2) $5^{2+\sqrt{3}}\times 125^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

解 (1) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3^{10}}}}{\sqrt[3]{9}}=\left[(3^{10})^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}\times(3^2)^{-\frac{1}{3}}=3^{10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=3^1=3.$

(2) $5^{2+\sqrt{3}}\times 125^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=5^{2+\sqrt{3}}\times(5^3)^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=5^{2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}=25.$

例 3 化简下列各式：

(1) $\dfrac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{4}x^{-1}y^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{5}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}\right)}$；　　(2) $\dfrac{m+m^{-1}+2}{m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}}$.

解 (1) 原式 $=\dfrac{24}{5}\times5\times x^{-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{3}}\times y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=24x^0y^{\frac{1}{6}}=24y^{\frac{1}{6}}.$

(2) 原式 $=\dfrac{(m^{\frac{1}{2}})^2+2m^{\frac{1}{2}}m^{-\frac{1}{2}}+(m^{-\frac{1}{2}})^2}{m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{(m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}})^2}{m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}}=\boxed{5}\underline{\qquad\qquad}.$

人民教育出版社

3. 用信息技术求实数指数幂

实数指数幂的值可以通过计算器或计算机软件方便地求得.

在 GeoGebra 中，在“运算区”利用符号“^”，就可以得到实数指数幂的精确值或近似值.

如图 4-1-1 所示，前面三个是在符号计算模式下的输入和所得到的结果，后面两个是在数值计算模式下得到的结果.

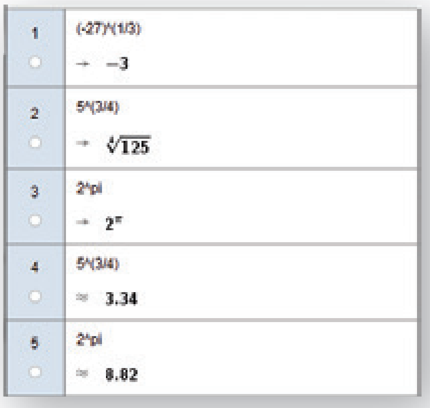


图 4-1-1

下面我们来求本小节情境与问题中的年平均增长率.

假设年平均增长率为 x，则应该有

$$(1+10.3\%)(1+14.2\%)(1+10.4\%)=(1+x)^3,$$

从而

$$x=\sqrt[3]{(1+10.3\%)(1+14.2\%)(1+10.4\%)}-1\approx11.62\%.$$

由此可预测 2023 年的全社会研究与试验发展经费支出为

$$21\ 737\times(1+11.62\%)^4\approx33\ 741.76\text{（亿元）}.$$

其他年份的预测值可用类似的方法算出.

练习A

1 化简下列各式：

(1) x^5x^7；　(2) $(-3x^3)^2$；　(3) $(-x^3)^7$；

(4) $\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^3$；　(5) $(2x)^2(-x)^{-3}$；　(6) $\left(\frac{1}{5}x\right)^{-2}(5x)^2$.

2 用分数指数幂的形式表示下列各式：

(1) $\sqrt[3]{x^2}$；　(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$；　(3) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$.

3 化简下列各式：

(1) $\sqrt[5]{(3-\sqrt{2})^5}$；　(2) $\sqrt[6]{(2\sqrt{2}-3)^6}$；　(3) $2\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}$.

4 求下列各式的值：

(1) $36^{\frac{1}{2}}$；　(2) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$；　(3) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2^{10}}}}{\sqrt[3]{8}}$；　(4) $2^{-1+\sqrt{3}}\times16^{-\frac{\sqrt{3}}{4}}$.

练习B

1. 化简下列各式：

(1) $a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{8}}$；　　(2) $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{6}} \div a^{-\frac{1}{2}}$；

(3) $(x^{\frac{1}{2}} \times y^{-\frac{1}{3}})^6$；　　(4) $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}} \div \left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}} \times b^{-\frac{1}{3}}\right)$.

2. 比较下列各组数的大小：

(1) 2^8 与 2^6；　(2) $2^{\frac{3}{5}}$ 与 1；　(3) $3^{5.1}$ 与 $3^{5.2}$；　(4) $5^{\sqrt{2}}$ 与 5.

3. 利用例 1 的结论证明：

(1) 如果 $a>b>0$，s 是正有理数，那么 $a^s>b^s$；

(2) 如果 $a>1$，s 是正有理数，那么 $a^s>1$，$a^{-s}<1$；

(3) 如果 $a>1$，$s>t>0$，且 s 与 t 均为有理数，那么 $a^s>a^t$.

1 1　　2 $\frac{1}{125}$　　3 3　　4 2　　5 $m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}$

4.1.2 指数函数的性质与图象

情境与问题

古生物学家经常利用碳 14 的含量来推断古生物死亡的大致时间．当有机体生存时，会持续不断地吸收碳 14，从而其体内的碳 14 含量会保持在一定的水平；但当有机体死亡后，就会停止吸收碳 14，其体内的碳 14 含量就会逐渐减少，而且每经过大约 5 730 年后会变为原来的一半.

你能用函数表示有机体内的碳 14 含量与其死亡时间之间的关系吗？一种死亡已经一万年的有机体，其体内的碳 14 含量是其生存时的百分之多少？

利用本小节我们要学习的指数函数知识，可以顺利地解决情境中的问题.

尝试与发现

假设有机体生存时碳 14 的含量为 1，如果用 y 代表该有机体死亡 x 年后体内碳 14 的含量，则 $x=5\,730$ 时，$y=\frac{1}{2}$；$x=11\,460$ 时，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. 由此可知，$y$ 与 x 的关系可以表示为

$$y=\boxed{1}\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

上述尝试与发现的函数关系中，自变量出现在指数中.

1. 指数函数

一般地，函数

$$y=a^x$$

称为**指数函数**，其中 a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq1$①.

下面来研究指数函数的性质与图象.

作为例子，我们首先分析指数函数 $y=2^x$ 的性质，并得出其对应的图象.

尝试与发现

分别求出指数函数 $y=2^x$ 在自变量取 -2，-1，$-\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{2}$，1，2 时所对应的函数值（填写下表），并由此猜测指数函数 $y=2^x$ 的定义域、值域、奇偶性、单调性，尝试说明理由.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=2^x$							

根据指数运算的定义，可以得到指数函数 $y=2^x$ 的性质：

（1）定义域是 2 ________；

（2）值域是 3 ________；

（3）奇偶性是 4 ________；

（4）单调性是 5 ________.

① 以下谈到指数函数 $y=a^x$ 时，均默认为 a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq1$.

根据以上性质可知，函数 $y=2^x$ 的图象都在 x 轴上方，而且从左往右图象是逐渐上升的. 通过描点（如图 4-1-2 所示），可以作出 $y=2^x$ 的图象，如图 4-1-3 所示.

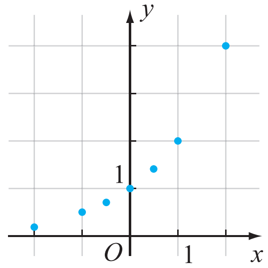


图 4-1-2

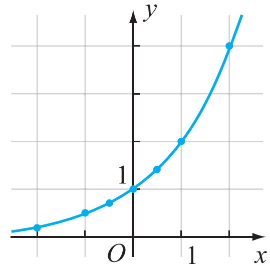


图 4-1-3

函数 $y=2^x$ 的单调性也可借助 4. 1. 1 中练习 B 第 3 题的结论来理解.

下面来研究指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的性质与图象.

尝试与发现

给出研究指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的性质与图象的方法，并用该方法得出这个函数的性质：

（1）定义域是 6 ________；

（2）值域是 7 ________；

（3）奇偶性是 8 ________；

（4）单调性是 9 ________.

然后在图 4-1-4 中作出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象.

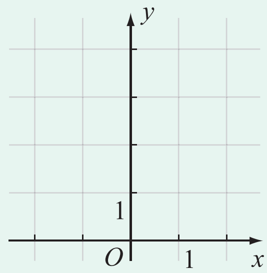


图 4-1-4

注意到 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$，因此不难看出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 是有联系的：当这两个函数的自变量取互为相反数的两个值时，对应的函数值相等. 也就是说，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象上任意一点 $(x_0,\ y_0)$，其关于 y 轴的对称点 $(-x_0,\ y_0)$ 一定在 $y=2^x$ 的图象上；反之，$y=2^x$ 的图象上任意一点 $(x_0,\ y_0)$，其关于 y 轴的对称点 $(-x_0,\ y_0)$ 也一定在 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象上. 因此，指数函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称，如图 4-1-5 所示.

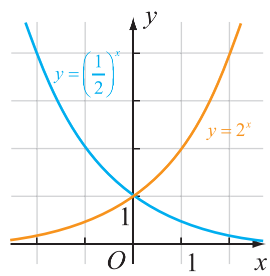


图 4-1-5

尝试与发现

（1）你能指出指数函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象的公共点吗？

（2）你能得出指数函数 $y=a^x$ 一定过哪个定点吗？

函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象的公共点为 $(0, 1)$. 事实上，因为 $a^0=1$ $(a\neq 0)$，所以 $y=a^x$ 的图象一定过点 $(0, 1)$.

由以上实例，可以归纳出指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 具有下列性质：

（1）定义域是实数集 **R**.

（2）值域是 $(0, +\infty)$，因此，对任何实数 x，都有 $a^x>0$，也就是说函数图象一定在 x 轴的上方.

（3）函数图象一定过点 $(0, 1)$.

（4）当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是增函数；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是减函数.

想一想

为什么要限定 $a>0$ 且 $a\neq 1$?

例 1 利用指数函数的性质，比较下列各题中两个值的大小：

（1）$0.8^{-0.1}$ 与 $0.8^{-0.2}$；　　（2）2.5^a 与 2.5^{a+1}.

分析 每一组的两个值都有共同特征，因此可以选取合适的函数，用函数的单调性来解决问题.

解 （1）因为 $0.8^{-0.1}$ 与 $0.8^{-0.2}$ 都是以 0.8 为底的幂值，所以考察函数 $y=0.8^x$，由于这个函数在实数集 **R** 上是减函数，又因为 $-0.1>-0.2$，所以 $0.8^{-0.1}<0.8^{-0.2}$.

（2）因为 2.5^a 与 2.5^{a+1} 都是以 2.5 为底的幂值，所以考察函数 $y=2.5^x$，由于这个函数在实数集 **R** 上是增函数，又因为 $a<a+1$，所以 $2.5^a<2.5^{a+1}$.

例 2 已知实数 a，b 满足 $\left(\frac{3}{7}\right)^a>\left(\frac{3}{7}\right)^b$，试判断 6^a 与 6^b 的大小.

解 因为函数 $y=\left(\frac{3}{7}\right)^x$ 在实数集 **R** 上是减函数，所以由 $\left(\frac{3}{7}\right)^a>\left(\frac{3}{7}\right)^b$ 可知 $a<b$.

又因为 $y=6^x$ 在实数集 **R** 上是增函数，所以

$$6^a<6^b.$$

2. 用信息技术作指数函数的图象

在 GeoGebra 中，只要输入指数函数的表达式，就可以得到对应的图象，如图 4-1-6 所示是用 GeoGebra 作出的 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$，$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$，$h(x)=3^{x}$，$p(x)=5^{x}$ 的图象，你能从中得出什么规律吗？

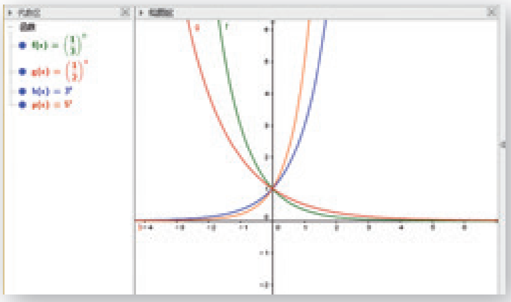


图 4-1-6

用 GeoGebra 也能方便地算出死亡已经一万年的有机体，其体内的碳 14 含量是其生存时的百分之多少，即

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\,000}{5\,730}}\approx 29.8\%.$$

练习A

1. 已知指数函数的图象过点（2，81），求这个指数函数的解析式.
2. 比较下列各题中两个值的大小：
   (1) $3^{0.8}$ 与 $3^{0.7}$；　　(2) $0.75^{-0.1}$ 与 $0.75^{0.1}$.
3. 求函数 $y=2^{x}$，$x\in[0,+\infty)$的值域.

练习B

1. 比较 $1.001^{0.001}$ 与 $0.999^{0.999}$ 的大小.
2. 比较 1.1^{a} 与 0.9^{-a} 的大小，其中 $a\in\mathbf{R}$.
3. 利用指数函数的性质与图象求下列方程或不等式的解集：
   (1) $3^{x}=2x+1$；　　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}>-\frac{2}{3}x+1$.

1 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5\,730}}$　2 $\mathbf{R}$　3 $(0,+\infty)$　4 非奇非偶函数　5 增函数

6 $\mathbf{R}$　7 $(0,+\infty)$　8 非奇非偶函数　9 减函数

习题4-1A

1. 化简下列各式：

(1) $[(a^3)^{-1}\times a^4]^{-1}$；　　(2) $\left(\frac{a}{b}\right)^2\times(a^{-1}\times b)^{-3}$.

2. 已知 $f(x)=\frac{7}{3}x+1$，$g(x)=2^x$，在同一坐标系中作出这两个函数的图象.

(1) 估计它们交点的坐标，并验证；

(2) 根据图象写出不等式 $f(x)<g(x)$和 $f(x)\geqslant g(x)$的解集.

3. 已知 $0<a<1$，化简$\sqrt{a^{\frac{4}{3}}-2a+a^{\frac{2}{3}}}$.

4. 设 $f(x)=2^x$，比较 $f(x_1)f(x_2)$ 与 $f(x_1+x_2)$ 的大小.

习题4-1B

1. 求下列各式的值：

(1) $2^{-1}\times 64^{\frac{2}{3}}$；　　(2) $0.2^{-2}\times 0.064^{\frac{1}{3}}$.

2. 化简下列各式：

(1) $\left(\frac{8a^{-3}}{27b^6}\right)^{-\frac{1}{3}}$；　　(2) $\left(\frac{b}{2a^2}\right)^3\div\left(\frac{2b^2}{3a}\right)^0\times\left(-\frac{b}{a}\right)^{-3}$.

3. 将下列各题中的三个数按从小到大的顺序用不等号连接起来：

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$，$3^4$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$；　　(2) $2^{2.5}$，2.5^0，$\left(\frac{1}{2}\right)^{2.5}$.

4. 求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=2^{x+1}$；　　(2) $y=\sqrt{1-2^x}$；　　(3) $y=2^{\sqrt{x}}$.

5. 用清水漂洗衣服，若每次能洗去污垢的$\frac{3}{4}$，写出存留污垢的百分比 y 与漂洗次数 x 的函数关系式，并求出若要使存留的污垢不超过原有的1%所要漂洗的最少次数.

习题4-1C

1. 已知 a 是实数，比较$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ 和$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{a^2-a}$ 的大小.

2. 设 $f(x)=a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，比较

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ 与 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

的大小，并证明.

4.2 对数与对数函数

4.2.1 对数运算

情境与问题

（1）地震的里氏震级是根据最大振幅计算出来的．2008 年 5 月 12 日，我国四川汶川发生了地震，速报震级为里氏 7.8 级，修订后的震级为里氏 8.0 级．震级相差 0.2，最大振幅之间具有什么关系？

（2）化学学科中，我们用 pH 表示溶液的酸碱性，pH 是由 $c(\mathrm{H}^+)$（即溶液中 H^+ 的浓度）决定的．pH=7 和 pH=8 的两种溶液，它们的 $c(\mathrm{H}^+)$ 有什么关系？

上述情境中两个问题的答案，都与对数知识有关．

1. 对数的概念

在关系式

$$a^b=N$$

中，以 a 或 N 为未知数的方程，我们都已经接触过，例如 $x^5=32$，$2^3=x$ 等，本小节要研究 b 为未知数的情形，即求解类似 $2^x=64$ 的方程．

尝试与发现

（1）说出 $2^x=64$ 的一个实数根．

（2）判断方程 $2^x=64$ 的实数根的个数，并说明理由．

因为 $2^6=64$，所以 $x=6$ 一定是 $2^x=64$ 的实数根，再由 $y=2^x$ 是一个增函数可知 $2^x=64$ 有唯一的实数解 $x=6$．

我们已经知道，当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 是定义域为 $\mathbf{R}$，

值域为 $(0, +\infty)$ 的单调函数，这就意味着，如图 4-2-1 所示，任意给定 $y_0\in(0, +\infty)$，存在唯一的 $x_0\in\mathbf{R}$，使得

$$y_0=a^{x_0}.$$

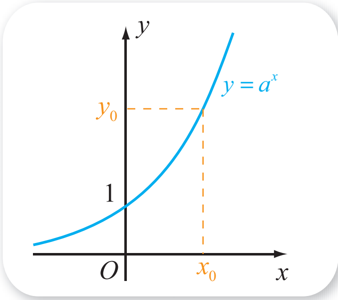


图 4-2-1

因此，在表达式 $a^b=N$ $(a>0$ 且 $a\neq1$，$N\in(0, +\infty))$ 中，当 a 与 N 确定之后，只有唯一的 b 能满足这个式子，此时，幂指数 b 称为以 a 为底 N 的**对数**，记作

$$b=\log_a N①,$$

其中 a 称为对数的**底数**，N 称为对数的**真数**.

例如，由前面的尝试与发现可知，因为 $2^6=64$，所以 $\log_2 64=6$.

由上可以看出，当 $a>0$ 且 $a\neq1$，$N>0$ 时，$b=\log_a N$ 的充要条件是 $a^b=N$. 由此可知，只有 $N>0$ 时，$\log_a N$ 才有意义，这通常简称为“负数和零没有对数”.

我们可以举出更多对数的例子：

因为 $4^2=16$，所以 2 是以 4 为底 16 的对数，即 $\log_4 16=2$，即

$$4^2=16\Leftrightarrow\log_4 16=2,$$

另外，

$$4^1=4\Leftrightarrow\log_4 4=1,$$

$$4^{\frac{1}{2}}=2\Leftrightarrow \boxed{1}\underline{\qquad\qquad},$$

$$4^{-1}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \boxed{2}\underline{\qquad\qquad},$$

$$4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \boxed{3}\underline{\qquad\qquad}.$$

例 1 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，求 $\log_a 1$ 与 $\log_a a$ 的值.

解 因为 $a^0=1$，$a^1=a$，所以 $\log_a 1=0$，$\log_a a=1$.

例 1 的结论可以简述为“1 的对数为 0”“底的对数为 1”.

由上可知，指数表达式 $a^b=N$ 与对数表达式 $b=\log_a N$ 实际上表示的是同一数量关系，如果把对数表达式中的 b 代入指数表达式，则可得

$$a^{\log_a N}=N;$$

类似地，如果把指数表达式中的 N 代入对数表达式，则有

$$\boxed{4}\underline{\qquad\qquad}.$$

例如，$2^{\log_2 32}=\boxed{5}\underline{\qquad}$，$\log_{10}10^3=\boxed{6}\underline{\qquad}$.

① 本书中，若不加特殊说明，类似的对数表达式中，总是认为 $a>0$ 且 $a\neq1$，$N\in(0, +\infty)$.

人民教育出版社

例 2 求下列各式的值：

（1）$\log_2 16$；（2）$\log_2 \frac{1}{2}$；（3）$5^{2\log_5 3}$.

解 （1）因为 $2^4=16$，所以 $\log_2 16=4$.

（2）因为 $2^{-1}=\frac{1}{2}$，所以 $\log_2 \frac{1}{2}=-1$.

（3）因为 $5^{\log_5 3}=3$，所以 $5^{2\log_5 3}=(5^{\log_5 3})^2=3^2=9$.

拓展阅读

对数发明起源的简介

几乎所有的现代数学书（包括我们这本）中，对数运算是通过解指数方程来引入的．但是，你知道吗？对数发明的起源并不完全是这样的！这是不是多多少少让你觉得有些意外？

事实上，对数是简化繁杂运算的产物．

16 世纪时，科学技术的飞速发展对计算技术的改进提出了前所未有的需求．为了简化数值计算，自然希望将乘除法归结为简单的加减法．当时已经有数学家发现这在某些情况下是可以实现的．

比如，利用以下 2 的幂次的对应表可以方便地算出 16×256 的值．

4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

首先，在第二行找到 16 与 256；然后找出它们在第一行中对应的数，即 4 与 8，并求它们的和，即 12；最后在第一行中找到 12，读出其对应的第二行中的数 4 096，这就是 16×256 的值．

用类似的方法可以算出 $\frac{4\ 096}{16}$ 的值．

当然，用这个表格解决不了一般的两个数相乘与相除的问题．但是，不难想到，如果上述表格中第二行的数足够密，就能用类似的方法算出更多的乘积和商．

苏格兰数学家纳皮尔在 17 世纪的时候发明了对数方法．后来的人们利用对数表就大大简化了有关乘除运算，简化的过程类似于计算上述 16×256 的过程，只不过查表的过程更加复杂．

2. 常用对数与自然对数

以 10 为底的对数称为**常用对数**，即 $\log_{10}N$ 是常用对数．为了简便起见，常用对数的表示中，通常把底 10 略去不写，并把“log”写成“lg”，即把 $\log_{10}N$ 简写为 $\lg N$.

后续如果没有指出对数的底，则默认为指的都是常用对数．例如，“100 的对数是 2”，就是指“100 的常用对数是 2”．

在科学技术中，常常还使用以无理数 $e=2.718\ 28\cdots$ 为底的对数，以 e

为底的对数称为**自然对数**，自然对数 $\log_e N$ 通常简写为 $\ln N$.

例 3 求下列各式的值：

（1）$\lg 10$；（2）$\lg 100$；（3）$\lg 0.01$；（4）$\ln e^5$.

解 （1）因为 $10^1=10$，所以 $\lg 10=1$.

（2）因为 $10^2=100$，所以 $\lg 100=\underline{\boxed{7}\qquad\qquad}$.

（3）因为 $10^{-2}=0.01$，所以 $\lg 0.01=\underline{\boxed{8}\qquad\qquad}$.

（4）因为 $\log_a a^b=b$，所以 $\ln e^5=\underline{\boxed{9}\qquad\qquad}$.

例 4 已知 $\log_4 a=\log_{25} b=\sqrt{3}$，求 $\lg(ab)$的值.

解 由 $\log_4 a=\log_{25} b=\sqrt{3}$ 可得 $a=4^{\sqrt{3}}$，$b=25^{\sqrt{3}}$，所以

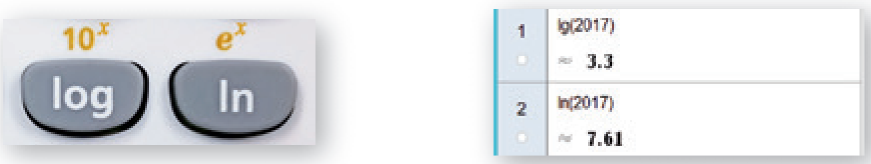
$$ab=4^{\sqrt{3}}\times 25^{\sqrt{3}}=(4\times 25)^{\sqrt{3}}=100^{\sqrt{3}}=(10^2)^{\sqrt{3}}=10^{2\sqrt{3}},$$

所以 $\lg(ab)=2\sqrt{3}$.

3. 用信息技术计算常用对数与自然对数

常用对数与自然对数的值，可以通过科学计算器和计算机软件求得.

图 4-2-2（1）是某特定型号计算器上的常用对数按钮和自然对数按钮，图 4-2-2（2）显示的是用 GeoGebra 计算 lg 2 017 和 ln 2 017 的结果.



（1）　　　　（2）

图 4-2-2

下面我们来给出本小节情境与问题中里氏震级问题的答案.

里氏震级的计算公式为

$$M=\lg\frac{A}{A_0},$$

其中 A 是被测地震的最大振幅，A_0 是“标准地震”的振幅. 用 $A_{7.8}$ 和 $A_{8.0}$ 分别表示震级为 7.8 和 8.0 的最大振幅，则有

$$7.8=\lg\frac{A_{7.8}}{A_0},\quad 8.0=\lg\frac{A_{8.0}}{A_0},$$

从而 $\frac{A_{7.8}}{A_0}=10^{7.8}$，$\frac{A_{8.0}}{A_0}=10^{8.0}$，因此

$$\frac{A_{8.0}}{A_{7.8}}=\frac{10^{8.0}}{10^{7.8}}=10^{0.2}\approx 1.58,$$

即 $A_{8.0}\approx 1.58A_{7.8}$.

情境中与 pH 有关的问题可用类似的方法解决，留作练习.

拓展阅读

素数个数与对数

我们已经知道，像 2，3，5，7 这样只能被 1 和它自己整除的正整数称为素数（也称为质数）. 例如，100 以内的所有素数为

2，3，5，7，11，13，17，
19，23，29，31，37，41，
43，47，53，59，61，67，
71，73，79，83，89，97.

探索素数出现的规律，是一些数学家非常关心的问题. 特别地，设 x 是正整数，用 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数，寻找 $\pi(x)$ 的近似表达式，历史上曾引起了很多数学家的注意. 当然，我们可以取 x 为一些常数，然后求出 $\pi(x)$ 的值来进行观察和归纳.

可能会让你感到惊讶的是，$\pi(x)$ 的近似表达式与自然对数有关. 事实上，数学家们已经证明，当 x 充分大时，

$$\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x}.$$

这一结果可以从下表中直观感受到.

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	相对误差
1 000	168	145	13.69%
5 000	669	587	12.26%
10 000	1 229	1 086	11.64%
50 000	5 133	4 621	9.97%
100 000	9 592	8 686	9.45%
500 000	41 538	38 103	8.27%
1 000 000	78 498	72 382	7.79%
5 000 000	348 513	324 150	6.99%

注：如果 A 的近似值为 a，那么相对误差指的是 $\frac{|A-a|}{A}\times100\%$.

练习A

1 求出下列各式的值，并写出对应的对数式：

（1）2^3；（2）8^2；（3）4^{-3}；（4）8.8^0.

2 判断下列各式是否正确，如果不正确，请改正：

（1）$\log_3 9=2$；（2）$\log_5 125=2$；（3）$\lg 100=3$；（4）$\ln 1=0$.

3 用对数的形式表示下列各式中的 x：

（1）$10^x=25$；（2）$2^x=12$；（3）$5^x=6$；（4）$4^x=\frac{1}{6}$.

4 求下列各式的值：

（1）$2^{\log_2 8}$；（2）$3^{\log_3 9}$；（3）$10^{\lg 5}$；（4）$e^{\ln 7}$；

（5）$\log_5 5^2$；（6）$\lg 10^{-5}$；（7）$\lg 10^6$；（8）$\ln e^3$.

5 利用科学计算器或计算机软件求出下列对数的值（精确到 0.000 1）：

（1）$\lg 2\ 001$；（2）$\ln 0.004\ 5$；（3）$\ln 396.5$.

练习B

❶ 求出下列各式的值，并写出对应的对数式：

(1) 2^{-5}； (2) $25^{\frac{1}{2}}$； (3) $27^{-\frac{1}{3}}$； (4) $81^{-\frac{3}{4}}$.

❷ 判断下列各式是否正确，如果不正确，请改正：

(1) $\log_2 \frac{1}{4}=-1$； (2) $\lg \frac{1}{100}=-3$； (3) $\log_{\frac{1}{3}} 9=2$.

❸ 求下列各式的值：

(1) $2^{-\log_2 3}$； (2) $10^{2\lg 3}$； (3) $e^{3\ln 7}$；

(4) $\log_3 9^2$； (5) $\lg 100^2$； (6) $\lg 0.001^2$.

❹ 求下列各式的值：

(1) $\lg 1+\lg 10+\lg 100$； (2) $\lg 0.1+\lg 0.01+\lg 0.001$；

(3) $\log_6 36+\log_2 \frac{1}{8}$； (4) $\lg 0.1^2+\ln e^{-2}$.

❺ 已知 $pH=-\lg c(H^+)$，指出 $pH=7$ 和 $pH=8$ 的两种溶液的 $c(H^+)$ 有什么关系.

❻ 已知 $x>0$ 且 $\log_x \frac{1}{16}=-4$，求 x 的值.

1 $\log_4 2=\frac{1}{2}$ 2 $\log_4 \frac{1}{4}=-1$ 3 $\log_4 \frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ 4 $\log_a a^b=b$ 5 32

6 3 7 2 8 -2 9 5

4.2.2 对数运算法则

1. 积、商、幂的对数

尝试与发现

(1) 你知道 $\log_6 3$ 与 $\log_6 2$ 的值吗？你能算出 $\log_6 3+\log_6 2$ 的值吗？如果设 $x=\log_6 3$，$y=\log_6 2$，则 $6^x=$ 1 ______，$6^y=$ 2 ______，怎样由这两个式子得

到 $x+y$?

（2）由指数运算的运算法则 $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$ 能得出对数运算具有什么运算法则？

由指数运算的运算法则可知

$$6^{x+y}=6^{x}\times 6^{y}=3\times 2=6,$$

因此 $x+y=1$.

一般地，设 $a^{\alpha}=M>0$，$a^{\beta}=N>0$，则 $\log_a M=\alpha$，$\log_a N=\beta$. 由

$$a^{\alpha+\beta}=a^{\alpha}a^{\beta}=MN$$

可知 $\log_a(MN)=\alpha+\beta$，代入 α 与 β 的值，有

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N.$$

由此可知

$$\log_6 3+\log_6 2=\log_6(3\times 2)=\boxed{3}\_\_\_\_\_\_.$$

不难看出，上述结论可以推广到真数为有限多个正因数相乘的情形，即

$$\log_a(N_1N_2\cdots N_k)=\log_a N_1+\log_a N_2+\cdots+\log_a N_k.$$

特别地，当正因数全部相等时，可得

$$\log_a N^k=k\log_a N,$$

其中 k 是正整数.

我们还可以由 $(a^{\beta})^{\alpha}=a^{\beta\times\alpha}$ 得出

$$\log_a M^{\alpha}=\alpha\log_a M,$$

其中 α 为任意实数（证明留作练习）. 例如，

$$\lg 0.001=\lg 10^{-3}=-3\lg 10=\boxed{4}\_\_\_\_\_\_.$$

另外，由上面两个结论可知

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a(MN^{-1})=\log_a M+\log_a N^{-1}=\log_a M-\log_a N.$$

例如，

$$\log_6 12-\log_6 2=\log_6\frac{12}{2}=\boxed{5}\_\_\_\_\_\_.$$

总的来说，对数运算具有运算法则

$$\boxed{\begin{aligned}&\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N,\\&\log_a M^{\alpha}=\alpha\log_a M,\\&\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N,\end{aligned}}$$

其中，$a>0$ 且 $a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，$\alpha\in\mathbf{R}$.

例 1 用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式：

（1）$\log_a \dfrac{xy}{z}$；（2）$\log_a(x^3y^5)$；（3）$\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

解 （1）$\log_a \dfrac{xy}{z}=\log_a(xy)-\log_a z=\log_a x+\log_a y-\log_a z$.

（2）$\log_a(x^3y^5)=\log_a x^3+\log_a y^5=3\log_a x+5\log_a y$.

（3）
$$\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}=\log_a(x^2y^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{3}})$$
$$=\log_a x^2+\log_a y^{\frac{1}{2}}+\log_a z^{-\frac{1}{3}}$$
$$=2\log_a x+\frac{1}{2}\log_a y-\frac{1}{3}\log_a z.$$

例 2 计算下列各式的值：

（1）$\lg 4+\lg 25$；（2）$\lg\sqrt[5]{100}$；

（3）$\log_2(4^7\times 2^5)$；（4）$(\lg 2)^2+\lg 20\times\lg 5$.

解 （1）$\lg 4+\lg 25=\lg(4\times 25)=\lg 100=2$.

（2）$\lg\sqrt[5]{100}=\lg 100^{\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{5}\lg 100=\dfrac{2}{5}$.

（3）$\log_2(4^7\times 2^5)=\log_2 4^7+\log_2 2^5=7\log_2 4+5\log_2 2=7\times 2+5\times 1=19$.

（4）
$$(\lg 2)^2+\lg 20\times\lg 5=(\lg 2)^2+\lg(10\times 2)\times\lg\frac{10}{2}$$
$$=(\lg 2)^2+(1+\lg 2)\times(1-\lg 2)$$
$$=(\lg 2)^2+1-(\lg 2)^2$$
$$=1.$$

例 2 说明，利用对数运算的运算法则，可以在不求出对数值的前提下，算出一些含对数的代数式的值.

2. 换底公式

情境与问题

大家可能已经看出，对数值的计算并不容易，比如 $\lg 3$，$\lg 5$，$\log_3 5$ 等. 事实上，在没有计算器的时代，人们曾花费了大量的精力，求出一些常用对数的近似值，制成表格以供大家查询使用. 这样一来，大家就可以根据已知的值和对数运算法则，求出另一些对数的值，例如，由 $\lg 3\approx 0.477\ 1$，$\lg 5\approx 0.699\ 0$ 可得出

$$\lg 15=\lg 3+\lg 5\approx 0.477\ 1+0.699\ 0=1.176\ 1.$$

但是我们知道，对数的底可以是任意不等于 1 的正数，那么知道常用对数的值，能不能求出任意对数的值呢？比如，能不能借助 $\lg 3$，$\lg 5$ 的值算出 $\log_3 5$ 的值呢？

设 $\log_3 5=x$，则 $3^x=5$，从而 $\lg 3^x=\lg 5$，即 $x\lg 3=\lg 5$，所以

$$x=\frac{\lg 5}{\lg 3},$$

也就是说 $\log_3 5=\frac{\lg 5}{\lg 3}\approx\frac{0.699\ 0}{0.477\ 1}\approx 1.465\ 1$.

一般地，我们有

$$\boxed{\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},}$$

其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$b>0$，$c>0$ 且 $c\neq 1$，这一结果通常被称为**换底公式**（证明留作练习）.

计算器和计算机在计算任意对数的值时，是使用换底公式转化为常用对数或自然对数来计算的.

例 3 求 $\log_8 9\times\log_{27}32$ 的值.

解 $\log_8 9\times\log_{27}32=\frac{\ln 9}{\ln 8}\times\frac{\ln 32}{\ln 27}=\frac{\ln 3^2}{\ln 2^3}\times\frac{\ln 2^5}{\ln 3^3}=\frac{2\ln 3}{3\ln 2}\times\frac{5\ln 2}{3\ln 3}=\frac{10}{9}$.

例 4 求证：

$$\log_{a^t}b^s=\frac{s}{t}\log_a b,$$

其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$b>0$，$s\in\mathbf{R}$，$t\in\mathbf{R}$ 且 $t\neq 0$.

证明 $\log_{a^t}b^s=\frac{\ln b^s}{\ln a^t}=\frac{s\ln b}{t\ln a}=\frac{s}{t}\times\frac{\ln b}{\ln a}=\frac{s}{t}\log_a b$.

练习A

1. 计算下列各式的值：

(1) $\log_2 6-\log_2 3$；　　(2) $\lg 5+\lg 2$；　　(3) $\log_5 3+\log_5\frac{1}{3}$；

(4) $\log_3 5-\log_3 15$；　　(5) $\ln\sqrt{e}$；　　(6) $\lg 100^{-2}$.

2. 已知 $3^a=2$，用 a 表示 $\log_3 4-\log_3 6$.

3. 已知 $\log_3 2=a$，$3^b=5$，用 a，b 表示 $\log_3\sqrt{30}$.

4. 求证：$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$.

5. 已知 $\lg 2\approx 0.301\ 0$，求 $\lg 5$ 的近似值（精确到 $0.000\ 1$）.

练习B

❶ 求下列各式的值：

(1) $\lg 0.001-\log_{27}\dfrac{1}{81}$；　(2) $\log_4 8+\log_{\frac{1}{2}}4$；　(3) $\log_7\sqrt[3]{49}$.

❷ (1) 已知 $\alpha\in\mathbf{R}$，由 $(a^{\beta})^{\alpha}=a^{\beta\times\alpha}$ 证明 $\log_a M^{\alpha}=\alpha\log_a M$；

(2) 由对数的定义证明换底公式 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

❸ 计算 $(\lg 5)^2+\lg 2\times\lg 50$ 的值.

❹ 求证：$\log_x y\times\log_y z\times\log_z x=1$.

❺ 化简：$\sqrt{(\log_3 5)^2-4\log_3 5+4}$.

❻ 比较 $\log_6 2$ 与 $\log_6 3$ 的大小.

1 3　2 2　3 $\log_6 6=1$　4 -3　5 $\log_6 6=1$

4.2.3 对数函数的性质与图象

情境与问题

我们已经知道，假设有机体生存时碳 14 的含量为 1，那么有机体死亡 x 年后体内碳 14 的含量 y 满足

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5\,730}},$$

也就是说，y 是 x 的函数.

在得到古生物的样品时，古生物学家能够测量出其中的碳 14 含量 y，你认为古生物学家们能利用这个值推断出古生物的死亡时间 x 吗？给定一个 y 值，有多少个 x 值与之对应？这里的 x 能看成 y 的函数吗？为什么？

在表达式 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5\,730}}$ 中，因为

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5\,730}}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}\right]^{x},$$

所以这个函数可以看成一个指数函数，根据指数函数的性质可知，这个函数是一个减函数．这也就意味着，给定一个 y 值，只有唯一的 x 值与它对应，也就是说，如果把 y 看成自变量，x 看成因变量，那么这里的 x 可以看成 y 的函数．事实上，利用指数运算和对数运算的关系，可以把上述关系式改写为

$$x=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}} y,$$

如果仍用 x 表示自变量，y 表示因变量，那么这一函数关系可以表示为

$$y=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}} x,$$

其中自变量在真数的位置上，我们称这样的函数为对数函数．

1. 对数函数

一般地，函数

$$y=\log_a x$$

称为**对数函数**，其中 a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$①．

下面我们来研究对数函数的性质与图象．

作为例子，首先分析对数函数 $y=\log_2 x$ 的性质，并得出其对应的图象．

尝试与发现

（1）对数函数 $y=\log_2 x$ 中，x 的值可以是 -1 吗？可以是 0 吗？为什么？

（2）分别求出对数函数 $y=\log_2 x$ 在自变量取 $\frac{1}{8}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，1，2，4，8 时所对应的函数值（填写下表），并由此猜测对数函数 $y=\log_2 x$ 的定义域、值域、奇偶性、单调性，尝试说明理由．

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$							

可以看出，$y=\log_2 x$ 中，x 不能是 -1，也不能是 0．

事实上，根据对数运算的定义和性质，我们可以得到对数函数 $y=\log_2 x$ 的性质：

（1）定义域是 1 ________；

① 以下谈到对数函数 $y=\log_a x$ 时，均默认为 a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$．

人民教育出版社

（2）值域是 2 __________；

（3）奇偶性是 3 __________；

（4）单调性是 4 __________．

根据以上信息可知，函数 $y=\log_2 x$ 的图象都在 y 轴右侧，而且从左往右图象是逐渐上升的．通过描点，可以作出函数 $y=\log_2 x$ 的图象，如图 4-2-3 所示．

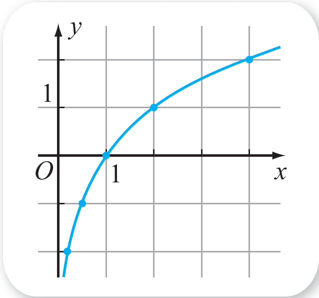


图 4-2-3

下面我们来研究对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的性质与图象．

注意到

$$y=\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{2^{-1}} x=-\log_2 x,$$

因此不难看出 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y=\log_2 x$ 之间的联系：当这两个函数的自变量相等时，对应的函数值互为相反数．也就是说，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象上任意一点 $(x_0,\ y_0)$，其关于 x 轴的对称点 $(x_0,\ -y_0)$ 一定在 $y=\log_2 x$ 的图象上；反之，$y=\log_2 x$ 的图象上任意一点 $(x_0,\ y_0)$，其关于 x 轴的对称点 $(x_0,\ -y_0)$ 也一定在 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象上．因此，对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y=\log_2 x$ 的图象关于 x 轴对称，如图 4-2-4 所示．

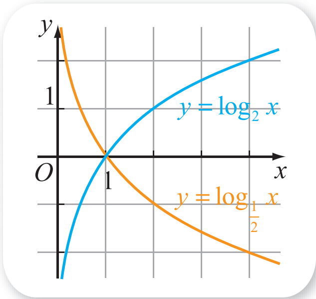


图 4-2-4

尝试与发现

（1）你能指出对数函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象的公共点吗？

（2）你能得出对数函数 $y=\log_a x$ 一定过哪个定点吗？

函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象的公共点为 $(1,\ 0)$．事实上，因为 $\log_a 1=0$，所以 $y=\log_a x$ 的图象一定过点 $(1,\ 0)$．

由以上实例，可以归纳出对数函数 $y=\log_a x$ 具有下列性质：

（1）定义域是 $(0,\ +\infty)$，因此函数图象一定在 y 轴的右边．

（2）值域是实数集 $\mathbf{R}$．

（3）函数图象一定过点 $(1,\ 0)$．

（4）当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减函数．

例 1 比较下列各题中两个值的大小：

（1）$\log_{0.3}3$ 与 $\log_{0.3}5$；　　（2）$\ln 3$ 与 $\ln 3.001$；

（3）$\log_7 0.5$ 与 0.

解 （1）因为 $0<0.3<1$，所以 $y=\log_{0.3}x$ 是减函数，又因为 $3<5$，所以

$$\log_{0.3}3>\log_{0.3}5.$$

（2）因为 $\mathrm{e}>1$，所以 $y=\ln x$ 是增函数，又因为 $3<3.001$，所以

$$\ln 3<\ln 3.001.$$

（3）因为 $7>1$，所以 $y=\log_7 x$ 是增函数，又因为 $\log_7 1=0$，而且 $0.5<1$，所以

$$\log_7 0.5<\log_7 1=0.$$

例 2 已知 $\log_{0.7}(2m)<\log_{0.7}(m-1)$，求 m 的取值范围.

解 因为 $y=\log_{0.7}x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，而且是减函数，所以由已知有 $2m>m-1>0$，即

$$\begin{cases}2m>m-1,\\ m-1>0.\end{cases}$$

解得 $m>1$.

例 3 求下列函数的定义域：

（1）$y=\lg(4-x)$；　　　　（2）$y=\ln x^2$.

解 （1）因为 $y=\lg(4-x)$ 有意义的充要条件是 $4-x>0$，即 $x<4$，所以所求定义域为 $(-\infty,4)$.

（2）因为 $y=\ln x^2$ 有意义的充要条件是 $x^2>0$，即 $x\neq 0$，所以所求定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2. 用信息技术作对数函数的图象

在 GeoGebra 中，只要输入对数函数的表达式，就可以得到对应的图象，如图 4-2-5 所示是用 GeoGebra 作出的 $f(x)=\log_2 x$，$g(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，$h(x)=\log_{0.3}x$，$p(x)=\ln x$，$q(x)=\lg x$ 的图象，你能从中得出什么规律吗?

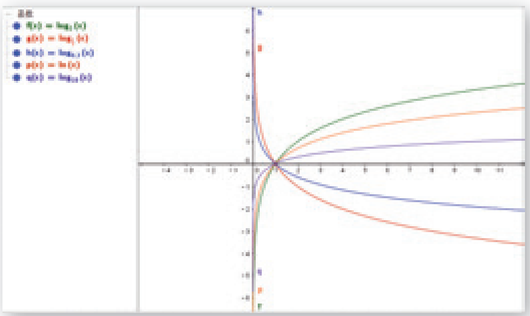


图 4-2-5

练习A

1. 已知对数函数的图象过点（9，2），求这个对数函数的解析式.
2. 写出函数 $y=\log_3 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的定义域、值域、单调性，并在同一平面直角坐标系内作出它们的图象.
3. 比较下列各题中两个值的大小：

   （1）$\lg 6$ 与 $\lg 8$；　　（2）$\log_{0.5}6$ 与 $\log_{0.5}4$；

   （3）$\log_{\frac{2}{3}}0.5$ 与 $\log_{\frac{2}{3}}0.6$；　　（4）$\log_{1.5}1.6$ 与 $\log_{1.5}1.4$.
4. 已知 a，b 均为正实数，而且 $\ln a>\ln b$，判断 a 和 b 的大小.
5. 求函数 $y=\log_2 x$，$x\in[8, +\infty)$ 的值域.

练习B

1. 已知 a 是正实数，比较下列各题中两个值的大小：

   （1）$\lg a$ 与 $\lg(a+0.1)$；　　（2）$\ln 2$ 与 $\ln(a^2+2)$.
2. 根据下列各式，确定 a 的取值范围：

   （1）$\log_a 0.8>\log_a 1.2$；　　（2）$\log_a\sqrt{10}>\log_a \pi$；

   （3）$\log_{0.2}a>\log_{0.2}3$；　　（4）$\log_2 a>0$.
3. 求下列函数的定义域：

   （1）$y=\log_5(1+x)$；　　（2）$y=\dfrac{1}{\log_2 x}$；

   （3）$y=\log_7\dfrac{1}{1-3x}$；　　（4）$y=\sqrt{\log_3 x}$.
4. 求函数 $y=\log_2(x^2+x+1)$ 的值域.
5. 利用对数函数的性质与图象求下列方程或不等式的解集：

   （1）$\log_2 x=x-1$；　　（2）$\log_{\frac{1}{3}}x>-\dfrac{3}{2}(x-1)$.
6. 利用 $\lg 3\approx0.477\ 1$，求 $3^{2\,018}$ 有多少位数.

1 （0，$+\infty$）　2 **R**　3 非奇非偶函数　4 增函数

习题4-2A

1 把下列指数式化为对数式，把对数式化为指数式（$a>0$ 且 $a\neq 1$）：

（1）$a^1=a$；　（2）$a^0=1$；

（3）$\log_a N=b$；　（4）$\log_a \sqrt[3]{a^2}=\dfrac{2}{3}$.

2 求下列各式的值：

（1）$\ln e^{-2}$；　（2）$e^{\ln \pi}$；

（3）$\log_{12}2+\log_{12}6$；　（4）$\lg 200-\lg 2$.

3 求证：

（1）$\log_8 81=\dfrac{4}{3}\log_2 3$；　（2）$\log_2 64=3\log_8 64$.

4 求证：$\log_x y\times\log_y z=\log_x z$.

5 已知 $\log_9 5=a$，$\log_9 7=b$，用 a，b 表示 $\log_{35}9$.

6 （1）如果 $f(x)=a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，求证：

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2);$$

（2）如果 $f(x)=\log_a x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，求证：

$$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2).$$

7 求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{\lg x}$；　（2）$y=\ln(x-1)^2$；

（3）$y=\sqrt{1-\log_{\frac{1}{2}}x}$；　（4）$y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}x-1}}$.

习题4-2B

1 求下列各式的值：

（1）$\log_{64}32$；　（2）$\lg 20+\log_{100}25$；　（3）$\log_2\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}\times\sqrt[6]{16}\right)$.

2 求下列各式的值：

（1）$\lg\dfrac{300}{7}+\lg\dfrac{700}{3}+\lg 100$；　（2）$\log_7\dfrac{2}{35}-\log_7\dfrac{2}{5}$；

（3）$2\log_{18}3+\log_{18}2$；　（4）$(\lg 5)^2+\lg 2\times\lg 25+(\lg 2)^2$.

3 已知 $\lg 2\approx 0.301\ 0$，$\lg 7\approx 0.845\ 1$，求 $\lg 35$ 的近似值（精确到 0.000 1）.

4 已知 $\log_5 3=a$，$\log_5 4=b$，求证：$\log_{25}12=\dfrac{1}{2}(a+b)$.

人民教育出版社

5 求下列函数的定义域：

（1）$y=\log_2 x+\log_2(3-x)$；　　（2）$y=\sqrt[8]{\log_2 x}$；

（3）$y=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$；　　（4）$y=\sqrt{x^2-x+1}+\log_2(3x)$.

6 已知 $0<m<n$，比较 $\log_m 7$，$\log_n 7$ 的大小.

7 已知函数 $f(x)=\log_2(1+x)+\log_2(1-x)$.

（1）求 $f(x)$的定义域；

（2）判断 $f(x)$的奇偶性；

（3）求 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$的值.

习题4-2C

1 已知 $f(x)$为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$.

（1）求 $x<0$ 时 $f(x)$的解析式；

（2）求不等式 $f(x)\leqslant 2$ 的解集.

2 设 $f(x)=\log_a x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，比较

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{与} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

的大小，并证明.

4.3　指数函数与对数函数的关系

从前面的知识中可以看出，指数函数与对数函数之间有非常密切的联系.

例如，当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，有

$$y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y,$$

而且指数函数与对数函数的性质可列表如下.

函数	指数函数 $y=a^x$	对数函数 $y=\log_a x$
定义域	1 ______	2 ______
值域	3 ______	4 ______
单调性	$0<a<1$ 时，为 5 ______ ；$a>1$ 时，为 6 ______	

由此可以看出，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 中，一个函数的定义域是另一个函数的值域，而且它们的单调性相同. 为什么会这样呢？这是因为在上述两个函数中，通过对调其中一个函数的自变量和因变量，可得到另一个函数.

一般地，如果在函数 $y=f(x)$ 中，给定值域中任意一个 y 的值，只有唯一的 x 与之对应，那么 x 是 y 的函数，这个函数称为 $y=f(x)$ 的反函数. 此时，称 $y=f(x)$ 存在反函数. 而且，如果函数的自变量仍用 x 表示，因变量仍用 y 表示，则函数 $y=f(x)$ 的反函数的表达式，可以通过对调 $y=f(x)$ 中的 x 与 y，然后从 $x=f(y)$ 中求出 y 得到.

例如，$y=2^x$ 是增函数，因此任意给定一个 y 值，只有唯一的 x 与之对应，所以 $y=2^x$ 存在反函数. 对调 $y=2^x$ 中的 x 和 y 得 $x=2^y$，解得

$$y=\log_2 x.$$

因此 $y=\log_2 x$ 是 $y=2^x$ 的反函数.

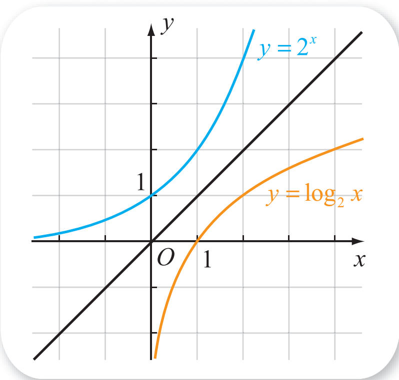


图 4-3-1

图 4-3-1 是同一平面直角坐标系内函数 $y=2^x$ 以及它的反函数 $y=\log_2 x$ 的图象，不难看出，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称.

一般地，函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$. 值得注意的是，$y=f(x)$ 的

定义域与 $y=f^{-1}(x)$ 的值域相同，$y=f(x)$ 的值域与 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域相同，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

例 1 分别判断下列函数是否存在反函数，如果不存在，说明理由；如果存在，写出反函数.

(1)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	0	1	3	5

(2)

x	1	2	3	4	5
$g(x)$	-1	0	1	-2	5

解 (1) 因为 $f(x)=0$ 时，$x=1$ 或 $x=2$，即对应的 x 不唯一，所以 $f(x)$ 的反函数不存在.

(2) 因为对 $g(x)$ 的值域 $\{-1, 0, 1, -2, 5\}$ 中任意一个值，都只有唯一的 x 与之对应，所以 $g(x)$ 的反函数 $g^{-1}(x)$ 存在，而且反函数可以表示如下.

x	-2	-1	0	1	5
$g^{-1}(x)$	4	1	2	3	5

例 2 判断 $f(x)=2x+2$ 的反函数是否存在，如果不存在，说明理由；如果存在，写出反函数 $f^{-1}(x)$ 的解析式，并在同一平面直角坐标系中作出 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的函数图象.

解 因为 $f(x)=2x+2$ 是增函数，所以任意给定值域中的一个值，只有唯一的 x 与之对应，于是 $f(x)$ 存在反函数.

令 $y=2x+2$，对调其中的 x 和 y 得 $x=2y+2$，解得

$$y=\frac{1}{2}x-1,$$

因此

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-1.$$

$f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的函数图象如图 4-3-2 所示.

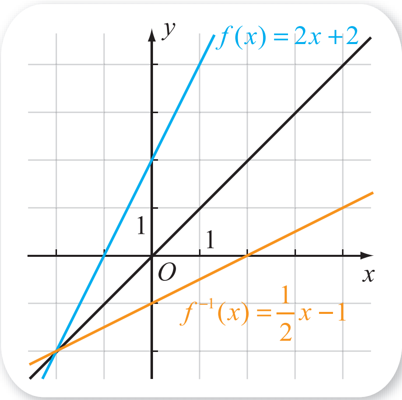


图 4-3-2

由反函数的定义可知，如果 $y=f(x)$ 是单调函数，那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 一定存在. 此时，如果 $y=f(x)$ 是增函数，则 $y=f^{-1}(x)$ 也是增函数；如果 $y=f(x)$ 是减函数，则 $y=f^{-1}(x)$ 也是减函数.

习题4-3A

1. 求函数 $y=3^x$ 的反函数.
2. 求函数 $y=\log_6 x$ 的反函数.
3. 如果点（1，2）在函数 $y=f(x)$的图象上，且 $y=f(x)$的反函数存在，指出这个函数的反函数一定过哪个点.
4. 判断 $f(x)=-3x+2$ 的反函数是否存在，如果不存在，说明理由；如果存在，写出反函数的解析式.
5. 判断下列函数是否存在反函数：

（1）$y=-\dfrac{3}{x}$；　　（2）$y=x^2$.

习题4-3B

1. 已知点（1，5）在指数函数 $y=f(x)$的图象上，求 $f^{-1}(x)$.
2. 一次函数 $f(x)=kx+b$（$k\neq 0$）是否一定存在反函数？如果不存在，说明理由；如果存在，求出 $f^{-1}(x)$.
3. 判断下列函数是否存在反函数：

（1）$y=\dfrac{1}{x+2}-1$；　　（2）$y=x^2+2x$.

4. 函数 $f(x)=x^2$，$x\geqslant 3$ 是否一定存在反函数？如果不存在，说明理由；如果存在，求出 $f^{-1}(x)$.
5. 指出函数 $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$ 的图象与函数 $y=\ln(2x)$的图象之间的关系.
6. 如果 $y=f(x)$存在反函数，则 $y=f(x)$一定是单调函数吗？

习题4-3C

1. 如果 $y=f(x)$存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，那么 $y=f(x)$的图象与 $y=f^{-1}(x)$的图象一定有交点吗？如果有交点，交点一定在直线 $y=x$ 上吗？
2. （1）求出 $f(x)=3x+1$ 的反函数 $f^{-1}(x)$，并求出 $f[f^{-1}(x)]$与 $f^{-1}[f(x)]$的值；

（2）如果 $y=f(x)$存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，写出 $f[f^{-1}(x)]$与 $f^{-1}[f(x)]$的值.

1 R　　2 $(0,+\infty)$　　3 $(0,+\infty)$　　4 R　　5 减函数　　6 增函数

4.4　幂函数

情境与问题

我们已经知道，在关系式 $N=a^b$ 中，当底数 a 为大于 0 且不等于 1 的常数时：如果把 b 作为自变量、N 作为因变量，则 N 就是 b 的指数函数；如果把 N 作为自变量、b 作为因变量，则 b 就是 N 的对数函数（即 $b=\log_a N$）．那么，当 b 为常数时，能否将底数 a 作为自变量、N 作为因变量来构造函数关系呢？

在关系式 $N=a^b$ 中，以 a 为自变量、N 为因变量构造出来的函数就是本节我们要讨论的幂函数.

1. 幂函数

尝试与发现

我们以前学过函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$，这三个函数的解析式有什么共同的特点吗？你能根据指数运算的定义，把这三个函数的解析式改写成统一的形式吗？

一般地，函数

$$y=x^\alpha$$

称为**幂函数**，其中 α 为常数．上面提到的函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$都是幂函数.

下面我们通过具体函数来研究幂函数的一些性质.

首先来研究函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$.

尝试与发现

判断 -4，-3，-2，-1，$-\frac{1}{4}$，0，$\frac{1}{4}$，1，2，3，4 这些数中，哪些在函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域内，求出对应的函数值，并填写下表（只需填在定义域内的数及对应的函数值），由此猜测这个函数的定义域、值域、奇偶性、单调性，尝试说明理由.

人民教育出版社

x						
$y=x^{\frac{1}{2}}$						

由于 $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，由此不难知道，函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的性质有：

（1）定义域是 1 ________；

（2）值域是 2 ________；

（3）奇偶性是 3 ________；

（4）单调性是 4 ________.

根据以上信息可知，函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象上的点，除了原点，其余点都在第一象限，通过描点（如图 4-4-1 所示），可作出其图象，如图 4-4-2 所示.

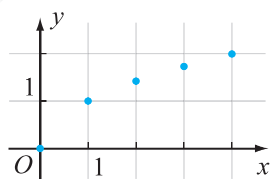


图 4-4-1

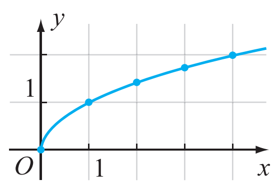


图 4-4-2

下面来研究函数 $y=x^3$.

尝试与发现

给出研究函数 $y=x^3$ 的性质与图象的方法，并用你的方法得出这个函数的性质：

（1）定义域是 5 ________；

（2）值域是 6 ________；

（3）奇偶性是 7 ________；

（4）单调性是 8 ________；

（5）图 4-4-3 中已经作出了函数 $y=x^{-1}$，$y=x$，$y=x^2$ 的图象，在其中作出函数 $y=x^3$ 的图象.

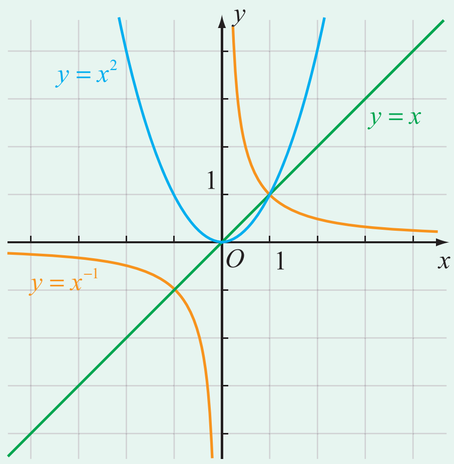


图 4-4-3

一般地，幂函数 $y=x^\alpha$，随着 α 的取值不同，函数的定义域、值域、奇偶性、单调性也不尽相同，但也有一些共同的特征：

（1）所有的幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 上都有定义，因此在第一象限内都有图象，并且图象都通过点 $(1, 1)$.

（2）如果 $\alpha>0$，则幂函数的图象通过原点，并且在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

（3）如果 $\alpha<0$，则幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数，且在第一象限内：当 x 从右边趋向于原点时，图象在 y 轴右方且无限逼近 y 轴；当 x 无限增大时，图象在 x 轴上方且无限逼近 x 轴.

例 1 比较下列各题中两个值的大小：

（1）$2.3^{1.1}$ 和 $2.5^{1.1}$；　　（2）$(a^2+2)^{-\frac{1}{3}}$ 和 $2^{-\frac{1}{3}}$.

解 （1）考察幂函数 $y=x^{1.1}$，因为其在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数，而且 $2.3<2.5$，所以

$$2.3^{1.1}<2.5^{1.1}.$$

（2）考察幂函数 $y=x^{-\frac{1}{3}}$，因为其在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数，而且 $a^2+2\geqslant 2$，所以

$$(a^2+2)^{-\frac{1}{3}}\leqslant 2^{-\frac{1}{3}}.$$

例 2 讨论函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的定义域、奇偶性，通过描点作出它的图象，并根据图象说明函数的单调性.

解 因为 $y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$，所以不难看出函数的定义域是实数集 $\mathbf{R}$.

记 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，则

$$f(-x)=(-x)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(-x)^2}=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}=f(x),$$

所以函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 是偶函数. 因此，函数的图象关于 y 轴对称.

通过列表描点，可以先作出 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x\in[0, +\infty)$ 时的函数图象，再根据对称性，可作出它在 $x\in(-\infty, 0]$ 时的图象，如图 4-4-4 所示.

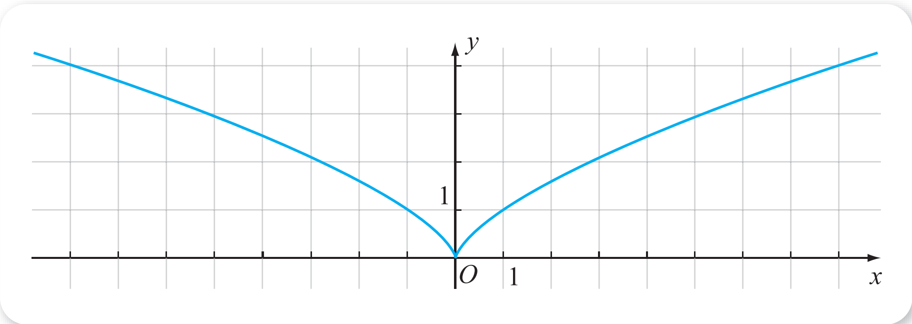


图 4-4-4

由图象可以看出，函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减，在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

2. 用信息技术作幂函数的图象

在 GeoGebra 中，只要输入幂函数的表达式，就可以得到对应的图象，如图 4-4-5 所示是用 GeoGebra 作出的 $f(x)=x^{-1}$，$g(x)=x^{\frac{1}{2}}$，$h(x)=x$，$p(x)=x^{2}$，$q(x)=x^{3}$ 的图象，你能从中得出什么规律吗？

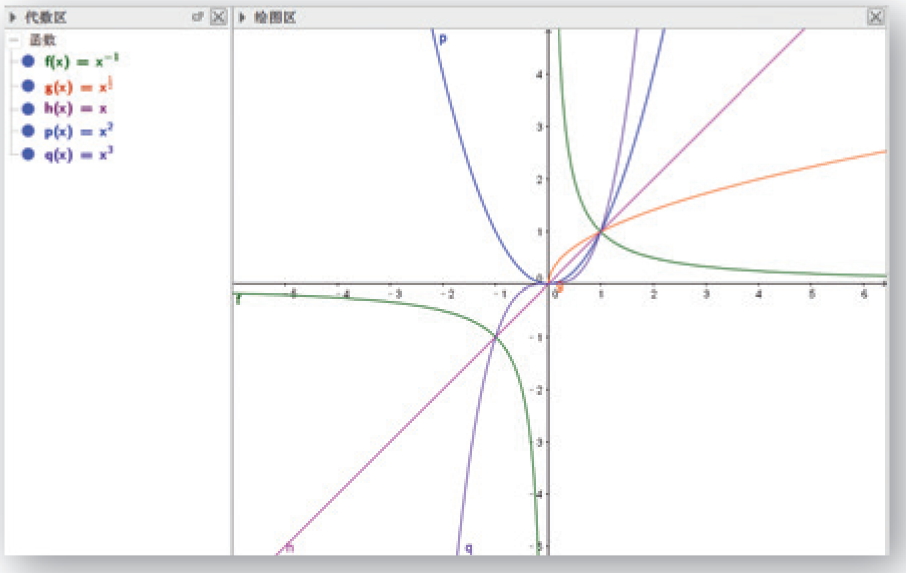


图 4-4-5

习题4-4A

1. 已知幂函数的图象经过点 (9, 3)，求这个幂函数的解析式.
2. 判断函数 $y=x^{-3}$ 与 $y=x^{-2}$ 的奇偶性.
3. 写出函数 $y=x^{\frac{5}{4}}$ 与 $y=x^{\frac{4}{5}}$ 的定义域和值域.
4. 利用幂函数的性质，比较下列各题中两个值的大小：

   (1) $2.3^{\frac{1}{2}}$ 与 $2.4^{\frac{1}{2}}$；　　(2) $0.31^{-\frac{6}{5}}$ 与 $2^{-\frac{6}{5}}$.
5. 已知函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$，写出两个满足条件的 α 值.

习题4-4B

1. 已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 (8, 2)，求 $f(-27)$ 的值.
2. 利用幂函数的性质，比较下列各题中两个值的大小：

   (1) $(2|t|)^{1.5}$ 与 $(t^{2}+1)^{1.5}$；　　(2) $1.3^{\frac{1}{2}}$ 与 $0.4^{-\frac{1}{2}}$.

人民教育出版社

3. 求出下列函数的定义域，并判断函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^{2}+x^{-2}$；　　(2) $f(x)=x+3x^{\frac{2}{3}}$；

(3) $f(x)=x^{3}+x^{\frac{1}{3}}$；　　(4) $f(x)=2x^{4}+x^{-\frac{1}{2}}$.

4. 求函数 $f(x)=(x+2)^{-2}$ 的定义域，并指出其单调区间.

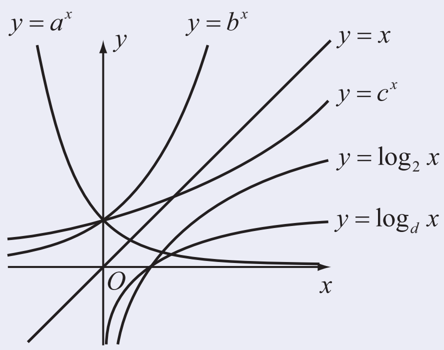
5. 已知幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象经过 $A(0,\ 0)$，$B(1,\ 1)$，$C(-1,\ 1)$，$D(4,\ 2)$ 中的三个点，写出满足条件的一个 α 值.

6. 在同一平面直角坐标系中，作出下列函数的图象，总结出一般规律：

(1) $y=x^{-3}$ 和 $y=x^{-\frac{1}{3}}$；　　(2) $y=x^{\frac{5}{4}}$ 和 $y=x^{\frac{4}{5}}$.

习题4-4C

1. 如图所示是 6 个函数的图象，依据图中的信息将 a，b，c，d 从大到小排列.



（第 1 题）

2. 求证：方程

$$3^{x}+4^{x}=5^{x}$$

只有一个实数解.

1 $[0,\ +\infty)$　2 $[0,\ +\infty)$　3 非奇非偶函数　4 增函数　5 **R**

6 **R**　7 奇函数　8 增函数

4.5 增长速度的比较

情境与问题

一家世界 500 强公司曾经出过类似这样的一道面试题：

有一套房子，价格为 200 万元，假设房价每年上涨 10%，某人每年固定能攒下 40 万元，如果他想买这套房子，在不贷款、收入不增加的前提下，这个人需要多少年才能攒够钱买这套房子？

(A) 5 年　(B) 7 年　(C) 8 年　(D) 9 年　(E) 永远也买不起

你能给出这道题的答案吗？

情境中的问题涉及增长速度的比较.

我们已经知道，函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$（$x_1<x_2$ 时）或 $[x_2, x_1]$（$x_1>x_2$ 时）上的平均变化率为

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

也就是说，平均变化率实质上是函数值的改变量与自变量的改变量之比，这也可以理解为：自变量每增加 1 个单位，函数值平均将增加 $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 个单位．因此，可用平均变化率来比较函数值变化的快慢.

例如，当 $g(x)=2x+3$，$h(x)=3x-2$ 时，容易算出

$$\frac{\Delta g}{\Delta x}=2,\quad \frac{\Delta h}{\Delta x}=3.$$

这就是说，自变量每增加 1 个单位，$g(x)$ 将增加 2 个单位，而 $h(x)$ 将增加 3 个单位. 这也就意味着，即使 $h(x_0)<g(x_0)$，但当 Δx 足够大时，必将有

$$h(x_0+\Delta x)>g(x_0+\Delta x).$$

再例如，当 $f(x)=x^2-2x-1$ 时，则

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x}&=\frac{x_2^2-2x_2-1-(x_1^2-2x_1-1)}{x_2-x_1}\\&=(x_1+x_2)-2,\end{aligned}$$

由此可知，在 $[1, +\infty)$ 内，自变量每增加 1 个单位，区间长不变的条件下，

端点数值之和越大，$f(x)$ 的函数值增加越快. 例如，$f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的平均变化率为 **1** ______，在区间 $[2, 3]$ 上的平均变化率为 **2** ______. 从图象上来看，如图 4-5-1 所示，线段 AB 所在直线的斜率小于线段 BC 所在直线的斜率.

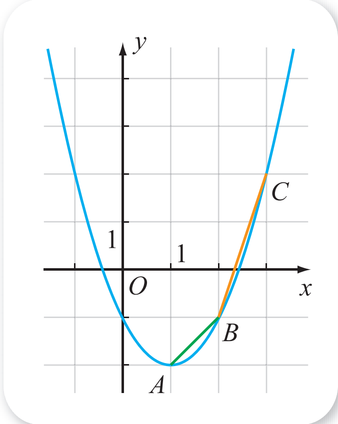


图 4-5-1

例 1 已知函数 $y=2^x$，分别计算函数在区间 $[1, 2]$ 与 $[2, 3]$ 上的平均变化率，并说明，当自变量每增加 1 个单位时，函数值变化的规律.

解 设 $1\leqslant x_1<x_2\leqslant 2$，因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{2^{x_1}(2^{x_2-x_1}-1)}{x_2-x_1},$$

所以

$y=2^x$ 在区间 $[1, 2]$ 上的平均变化率为 $\dfrac{2^1(2^{2-1}-1)}{2-1}=2$；

$y=2^x$ 在区间 $[2, 3]$ 上的平均变化率为 **3** ______.

不难看出，当自变量每增加 1 个单位时，区间的左端点值越大，函数值增加越快.

例 2 已知函数 $f(x)=2^x$，$g(x)=x$，$h(x)=\log_2 x$，分别计算这三个函数在区间 $[a, a+1]$ $(a>1)$ 上的平均变化率，并比较它们的大小.

解 因为

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2^{a+1}-2^a}{(a+1)-a}=2^a,$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{(a+1)-a}{(a+1)-a}=1,$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta x}=\frac{\log_2(a+1)-\log_2 a}{(a+1)-a}=\log_2\left(1+\frac{1}{a}\right),$$

又因为 $a>1$ 时，有

$$2^a>2^1=2>1,$$

$$\log_2\left(1+\frac{1}{a}\right)<\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right)=1,$$

所以在区间 $[a, a+1]$ 上，$f(x)$ 的平均变化率最大，$h(x)$ 的最小.

例 2 的结论也可用图 4-5-2 来直观理解.

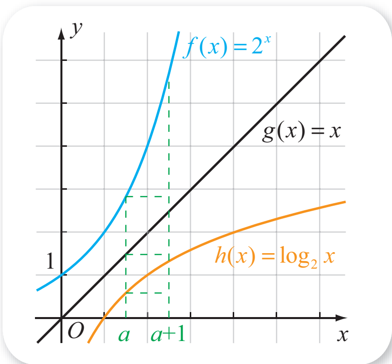


图 4-5-2

通过例 1 和例 2 的计算可以看出，当自变量每增加 1 个单位时，随着自变量的无限

增大，$f(x)=2^x$ 的函数值增长会越来越快，而且比函数 $g(x)=x$ 和函数 $h(x)=\log_2 x$ 的增长速度都快.

一般地，当 $a>1$ 时，指数函数 $f(x)=a^x$ 都具有这个特征. 也正因为如此，人们一般将类似指数函数的增长称为指数增长（或指数级增长、爆炸式增长），将类似一次函数的增长称为线性增长（或直线增长）. 例如，《人民日报》2016 年 8 月 24 日的一篇文章中提到：“我们要在传统媒体有线性增长的基础上，使新兴媒体有指数级的增长.”

本节情境与问题中的房价是指数增长的，而攒的钱是线性增长的，因为指数增长的速度会越来越快，所以在题目给定的条件下，永远也买不起房子，这可通过下表的计算结果（精确到 1 万元）看出.

年数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
房价/万元	220	242	266	293	322	354	390	429	472
攒的钱/万元	40	80	120	160	200	240	280	320	360

需要注意的是，前述面试题中的情形在现实生活中是不可能发生的，因为房价不可能按照每年 10%的速度永远增长下去，而且买房时可以选择按揭贷款等.

拓展阅读

指数运算与生活哲学

指数函数的爆炸式增长源自指数运算的性质. 对指数运算不熟悉的人，在估计指数运算的值时，可能会出现比较大的误差. 例如，你能猜出以下各指数运算的值都大概是多少吗？

$$1.01^{365}\approx ?$$

$$1.02^{365}\approx ?$$

$$0.99^{365}\approx ?$$

$$1.01^{219}\times 0.98^{146}\approx ?$$

$$0.95^{50}\approx ?$$

有意思的是，如图所示，有人还用上述这些指数运算的值形象地解释了一些生活哲学，你觉得有道理吗？

$$1.01^{365}\approx 37.78$$
$$0.99^{365}\approx 0.03$$

积跬步以至千里
积怠惰以至深渊

$$1.02^{365}\approx 1\ 377.41$$
$$1.01^{365}\approx 37.78$$

多百分之一的努力
得千份收获

$$1.01^{219}\times 0.98^{146}\approx 0.46$$

三天打鱼，两天晒网
终将一无所获

$$0.95^{50}\approx 0.08$$

如果每次失败的概率是95%
连续失败50次的概率不到8%

习题4-5A

1. 求 $f(x)=5x+1$ 在任意区间上的平均变化率，并说明自变量每增加 1 个单位时函数值的变化情况.
2. 已知函数 $f(x)=2^x$，$g(x)=3^x$，分别计算这两个函数在区间 $[3, 4]$ 上的平均变化率，并比较它们的大小.
3. 已知函数 $f(x)=-x^2-3x$.
   (1) 求 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 与 $[2, 3]$ 上的平均变化率；
   (2) 记 $A(1, f(1))$，$B(2, f(2))$，$C(3, f(3))$，判断直线 AB 与直线 BC 斜率的相对大小.

习题4-5B

1. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，分别判断下列条件下 $f(x)$ 的单调性：
   (1) $f(x)$在任意区间内的平均变化率均为正数；
   (2) $f(x)$在任意区间内的平均变化率均比 $g(x)=2$ 在同一区间内的平均变化率小.
2. 已知函数 $g(x)=2x+3$，$h(x)=3x-2$，判断 $g(2)$与 $h(2)$的相对大小，并求出使得 $h(2+\Delta x)>g(2+\Delta x)$成立的 Δx 的取值范围.
3. 已知函数 $f(x)$在任意区间内的平均变化率均为 5，说明当自变量减小 3 个单位时，函数值的变化情况.
4. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$在任意区间内的平均变化率均为非零常数 k，求证：$f(x)$是一个一次函数.

习题4-5C

1. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，而且 $f(x)$在任意区间内的平均变化率均比 $g(x)=x+1$ 在同一区间内的平均变化率大，判断 $f(3)-f(2)$与 1 的相对大小.
2. 写出同时满足下列条件的一个函数 $f(x)$：若 $[a, b]$ 是 $f(x)$的定义域的任意子区间，则 $f(x)$在区间 $[a, b]$ 内的平均变化率均为正；$f(x)$在整个定义域内不是增函数.

1 1　　2 3　　3 $\dfrac{2^2(2^{3-2}-1)}{3-2}=4$

4.6 函数的应用（二）

因为生活中很多量与量的关系都可以归结为指数关系，所以指数函数、对数函数和幂函数有着广泛的应用．下面举例说明．

例 1 有些银行存款是按复利的方式计算利息的，即把前一期的利息与本金加在一起作为本金，再计算下一期的利息．假设最开始本金为 a 元，每期的利率为 r（$r>0$），存 x 期后本息和为 $f(x)$元．

（1）写出 $f(x)$的解析式；

（2）至少要经过多少期后，本息和才能不小于本金的 2 倍？

解 （1）不难看出，

$$f(1)=a+ar=a(1+r),$$
$$f(2)=a(1+r)+a(1+r)r=a(1+r)^2,$$
$$f(3)=a(1+r)^2+a(1+r)^2r=a(1+r)^3,$$
$$\cdots\cdots$$

因此

$$f(x)=a(1+r)^x，x\in \mathbf{N}^*.$$

（2）由 $f(x)\geqslant 2a$ 可得

$$a(1+r)^x\geqslant 2a,$$

由此可解得 $x\geqslant\dfrac{\ln 2}{\ln(1+r)}$．

设不小于$\dfrac{\ln 2}{\ln(1+r)}$的最小整数为 x_0，则至少要经过 x_0 期后，本息和才能不小于本金的 2 倍．

由例 1 的（2）可以得到银行业中经常使用的“70 原则”：因为 $\ln 2\approx 0.693\ 15$，而且当 r 比较小时，$\ln(1+r)\approx r$，所以

$$\frac{\ln 2}{\ln(1+r)}\approx\frac{0.693\ 15}{r}\approx\frac{70}{100r},$$

即利率为 r 时，本息和大约要$\dfrac{70}{100r}$期才能“倍增”（即为原来的 2 倍）．例如，当年利率为 5%时，约要经过 14 年，本息和才能“倍增”．

例 2 按照《国务院关于印发“十三五”节能减排综合工作方案的通知》（国发〔2016〕74 号）的要求，到 2020 年，全国二氧化硫排放总量

要控制在 1 580 万吨以内，要比 2015 年下降 15%. 假设“十三五”期间每一年二氧化硫排放总量下降的百分比都相等，2015 年后第 t（$t=0$，1，2，3，4，5）年的二氧化硫排放总量最大值为 $f(t)$ 万吨.

（1）求 $f(t)$ 的解析式；

（2）求 2019 年全国二氧化硫排放总量要控制在多少万吨以内（精确到 1 万吨）.

解 （1）设“十三五”期间每一年二氧化硫排放总量下降的百分比均为 r，因为 $f(0)$ 表示 2015 年的排放总量，所以由题意可知

$$f(t)=f(0)(1-r)^{t},\ t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

又因为

$$\begin{cases} f(5)=1\ 580, \\ f(5)=f(0)(1-15\%), \end{cases}$$

所以 $f(0)=\dfrac{31\ 600}{17}$，$1-r=0.85^{\frac{1}{5}}$，从而

$$f(t)=\frac{31\ 600}{17}\times 0.85^{\frac{t}{5}},\ t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

（2）由（1）可知

$$f(4)=\frac{31\ 600}{17}\times 0.85^{\frac{4}{5}}\approx 1\ 632,$$

因此 2019 年全国二氧化硫排放总量要控制在 1 632 万吨以内.

例 3 已知某地区第一年的经济增长率为 a（$a\in[0,\ 1]$ 且 a 为常数），第二年的经济增长率为 x（$x\geqslant 0$），这两年的平均经济增长率为 y，写出 y 与 x 的关系，并求 y 的最小值.

解 根据题意有

$$(1+a)(1+x)=(1+y)^{2},$$

从而有

$$y=\sqrt{(1+a)(1+x)}-1,\ x\geqslant 0.$$

显然，上述函数是增函数，因此 $x=0$ 时，y 有最小值 $\sqrt{1+a}-1$.

例 4 人们通常以分贝（符号是 dB）为单位来表示声音强度的等级，其中 0 dB 是人能听到的等级最低的声音. 一般地，如果强度为 x 的声音对应的等级为 $f(x)$ dB，则有

$$f(x)=10\lg\frac{x}{1\times 10^{-12}}.$$

（1）求等级为 0 dB 的声音的强度；

（2）计算出 90 dB 的声音与 60 dB 的声音强度之比.

人民教育出版社

解 (1) 由 $f(x)=0$ 即

$$10\lg\frac{x}{1\times10^{-12}}=0$$

可得 $x=1\times10^{-12}$. 因此等级为 0 dB 的声音强度为 1×10^{-12}.

(2) 设 $f(x_1)=90$，则

$$10\lg\frac{x_1}{1\times10^{-12}}=90,$$

解得 $x_1=10^{-3}$.

设 $f(x_2)=60$，同理可得 $x_2=10^{-6}$.

因此所求强度之比为

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{10^{-3}}{10^{-6}}=1\,000.$$

值得注意的是，由例 4 的 (2) 可以看出，90 dB 的声音强度是 60 dB 的声音强度的 1 000 倍. 实际上，60 dB 是一般说话的声音等级，而很嘈杂的马路的声音等级为 90 dB. 为了保护听力，人所处的环境，声音一般不宜长时间超过 90 dB.

习题4-6A

1. 据报道，青海湖的湖水量在最近 50 年内减少了 10%，如果按此规律（即每 50 年减少 10%），设 2010 年的湖水量为 m，从 2010 年起过 x 年后湖水量为 y. 试写出 y 与 x 的函数关系式.

2. 按照《国务院关于印发“十三五”节能减排综合工作方案的通知》（国发〔2016〕74 号）的要求，到 2020 年，全国化学需氧量排放总量要控制在 2 001 万吨以内，要比 2015 年下降 10%. 假设“十三五”期间每一年化学需氧量排放总量下降的百分比都相等，2015 年后第 t ($t=0$, 1, 2, 3, 4, 5) 年的化学需氧量排放总量最大值为 $f(t)$ 万吨.

   (1) 求 $f(t)$ 的解析式；

   (2) 求 2019 年全国化学需氧量排放总量要控制在多少万吨以内（精确到 1 万吨）.

3. 近年来，家用冰箱使用的氟化物的释放等破坏了臭氧层，臭氧含量 Q 与时间 t（单位：年）的关系为 $Q=Q_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{400}}$，其中 Q_0 是臭氧的初始含量.

   (1) 随时间的增加，臭氧的含量是增加还是减少?

   (2) 多久以后将会有一半的臭氧消失（精确到 1 年）?

4. 已知强度为 x 的声音对应的等级为 $f(x)$ dB 时，有 $f(x)=10\lg\frac{x}{1\times10^{-12}}$. 喷气式飞机起飞时，声音约为 140 dB；一般说话时，声音约为 60 dB. 计算喷气式飞机起飞时的声音强度是一般说话时声音强度的多少倍.

习题4-6B

1. 根据统计，一名工人组装第 x 件某产品所用的时间（单位：min）为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{x}}, & x<A,\\ \dfrac{c}{\sqrt{A}}, & x\geqslant A,\end{cases}$$

其中 A，c 为常数，已知工人组装第 4 件产品用时 30 min，组装第 A 件产品用时 15 min，求 c 和 A 的值.

2. 近年来，太阳能技术运用的步伐日益加快. 2002 年全球太阳能电池的年生产量达到 670 MW，年生产量的增长率为 34%. 以后四年中，年生产量的增长率逐年递增 2%（如，2003 年的年生产量的增长率为 36%）.

(1) 求 2006 年全球太阳能电池的年生产量（结果精确到 0.1 MW）；

(2) 目前太阳能电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量，2006 年的实际安装量为 1 420 MW. 假设以后若干年内太阳能电池的年生产量的增长率保持在 42%，到 2010 年，要使年安装量与年生产量基本持平（即年安装量不少于年生产量的 95%），这四年中太阳能电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少（结果精确到 0.1%）?

3. 把物体放在冷空气中冷却，如果物体原来的温度是 θ_1 ℃，空气的温度是 θ_0 ℃，则 t min 后物体的温度 θ ℃ 可由公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$ 求得，其中 k 是常数. 把温度是 62 ℃的物体放在 15 ℃的空气中冷却，1 min 后，物体的温度是 52 ℃.

(1) 求出 k 的值；

(2) 计算开始冷却多久后，上述物体的温度分别是 42 ℃，32 ℃，22 ℃；

(3) 判断上述物体最终能否冷却到 12 ℃，并说明理由.

4. 用水清洗一堆蔬菜上残留的农药，已知用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药量的 $\dfrac{1}{2}$，用水越多洗掉的农药量也越多，但总还有农药残留在蔬菜上. 设用 x 个单位量的水清洗一次以后，蔬菜上残留的农药量与本次清洗前残留的农药量之比为 $f(x)$.

(1) 试确定 $f(0)$ 的值，并解释其实际意义；

(2) 试根据假设写出函数 $f(x)$ 应该满足的条件和具有的性质；

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，现有 $a\,(a>0)$ 个单位量的水，可以清洗一次，也可以把水平均分成 2 份后清洗两次，试问用哪种方案清洗后蔬菜上残留的农药量比较少，说明理由.

人民教育出版社

4.7 数学建模活动：生长规律的描述

日常生活中的很多现象都可以借助函数模型加以描述，下面给大家呈现一个借助指数函数等建立模型的实例.

数学建模论文示例

生长规律的描述

1. 发现问题、提出问题

生物的生长发育是一个连续的过程，但不同的时间段可能有不同的增长速度.

例如，原卫生部 2009 年 6 月发布的《中国 7 岁以下儿童生长发育参照标准》指出，我国 7 岁以下女童身高（长）的中位数如下表所示（0 岁指刚出生时），这些数据可以用图 4-7-1 表示.

年龄/岁	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
身高/cm	49.7	66.8	75	81.5	87.2	92.1	96.3
年龄/岁	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5
身高/cm	99.4	103.1	106.7	110.2	113.5	116.6	119.4

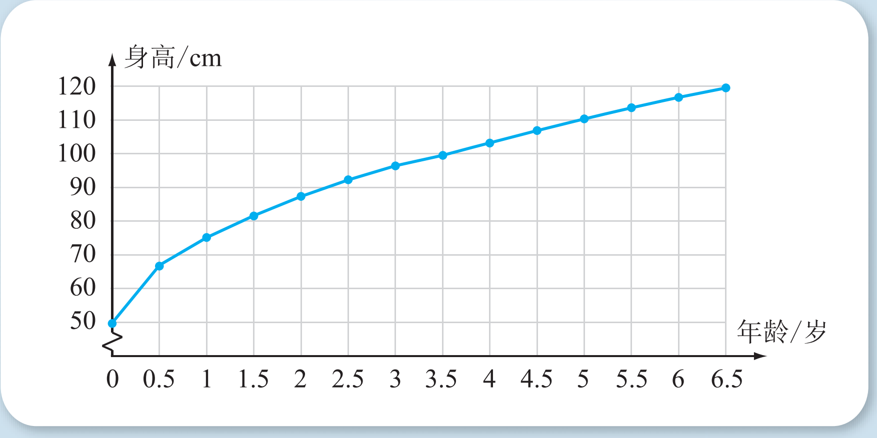


图 4-7-1

从数据和图都可以看出，我国 7 岁以下女童身高的增长速度越来越慢.

再例如，农业专家在研究某地区玉米在不同生长阶段的植株高度时，得到了以下数据，这些数据可以用图 4-7-2 直观表示.

生长阶段	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
植株高度/cm	0.67	1.75	3.69	7.73	16.55	32.55	53.38	97.46	153.6	174.9	180.79

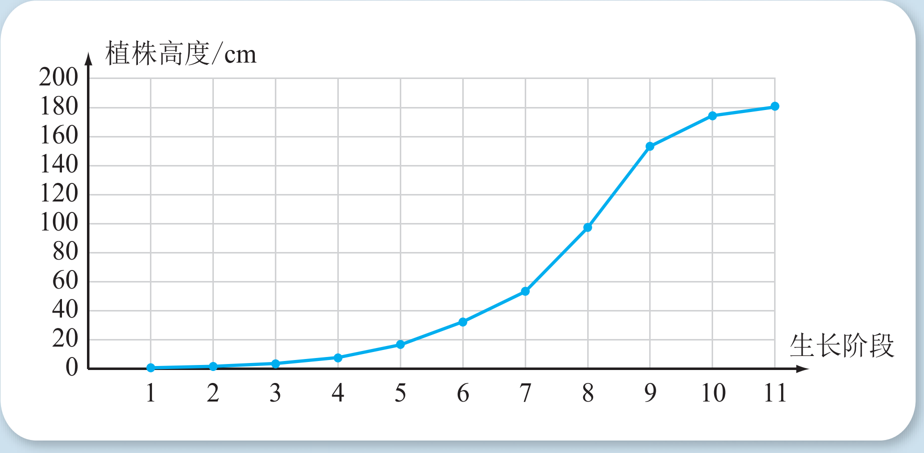


图 4-7-2

从具体的数据和图都可以看出，玉米植株高度的增长，具有先慢后快、然后又变慢的规律.

能否利用数学语言来描述类似的生长规律呢?

2. 分析问题、建立模型

要描述生长规律，实际上是要描述当一个量（记为 x）变化时，另外一个量（记为 y）会怎样变化. 例如，随着年龄的增长，身高将怎样变化；随着生长阶段的不同，植株高度会怎样变化；等等.

不难想到，我们可以借助函数 $y=f(x)$来描述生长规律.

因为从生长规律来说，当 x 增大时，y 是增大的，这说明函数 $y=f(x)$在指定的范围内应该是增函数；又因为不同的时间段有不同的增长速度，所以函数 $y=f(x)$不能是一次函数.

为了简单起见，可以假设函数的变量 x，y 都是连续变化的（也就是说可以取某个区间内的任意值）.

当然，根据不同对象的生长规律，可以选择不同的函数形式.

例如，对于前述我国 7 岁以下女童身高来说，考虑到增长速度一开始比较快，后来慢慢变缓，而我们熟悉的函数中，幂函数 $y=\sqrt{x}$ 具有这种性质，因此生长规律可用

$$g(x)=a\sqrt{x}+b$$

来描述.

类似地，对于前述玉米植株高度来说，因为增长速度一开始比较慢，后来逐渐加快，而我们熟悉的函数中，指数函数 $y=a^x$ （$a>1$）具有这种性质，所以生长规律可用

$$h(x)=ae^{bx}$$

来描述.

3. 确定参数、计算求解

对于描述我国 7 岁以下女童身高的函数 $g(x)=a\sqrt{x}+b$ 来说，为了确定 a，b 的值，可以在已有的数据中选择两对代入函数式，然后列方程组求解.

例如，如果选择的是 $g(0)=49.7$ 与 $g(4)=103.1$，则有

$$\begin{cases} a\sqrt{0}+b=49.7, \\ a\sqrt{4}+b=103.1, \end{cases}$$

由此可解得 $a=26.7$，$b=49.7$，所以

$$g(x)=26.7\sqrt{x}+49.7.$$

类似地，也可选择已有数据中的两对来确定函数 $h(x)=ae^{bx}$ 中的 a，b.

例如，如果选择的是 $h(2)=1.75$ 与 $h(8)=97.46$，则有

$$\begin{cases} ae^{2b}=1.75, \\ ae^{8b}=97.46, \end{cases}$$

由此可解得 $a\approx 0.458$，$b\approx 0.670$，所以

$$h(x)=0.458e^{0.670x}.$$

4. 验证结果、改进模型

因为在求解时，我们都只用到了部分已有的数据，所以可以利用其他数据来检验所建立模型的优劣.

例如，对于描述我国 7 岁以下女童身高的函数 $g(x)=26.7\sqrt{x}+49.7$ 来说，计算函数值，可以得到以下数据的对比表.

年龄/岁	0.5	1	1.5	2	2.5	3
身高/cm	66.8	75	81.5	87.2	92.1	96.3
$g(x)$	68.6	76.4	82.4	87.5	91.9	95.9
年龄/岁	3.5	4.5	5	5.5	6	6.5
身高/cm	99.4	106.7	110.2	113.5	116.6	119.4
$g(x)$	99.7	106.3	109.4	112.3	115.1	117.8

由表可以看出，误差都在 2 cm 以内，因此 $g(x)=26.7\sqrt{x}+49.7$ 能够较好地反映我国 7 岁以下女童身高的生长规律.

对于玉米植株高度函数 $h(x)=0.458e^{0.670x}$ 来说，可以算得函数值的对应表如下.

生长阶段	1	3	4	5	6	7	9	10	11
植株高度/cm	0.67	3.69	7.73	16.55	32.55	53.38	153.6	174.9	180.79
$h(x)$	0.90	3.42	6.68	13.05	25.51	49.85	190.40	372.08	727.14

不难看出，在前面 7 个阶段内，$h(x)$的函数值与实际值之间的误差不大，但是第 9～11 阶段就不一样了.

这种现象实际上是可以预料到的．因为指数函数 $h(x)=0.458\mathrm{e}^{0.670x}$ 的增长速度会越来越快，这就意味着这个函数一定不能反映出植株高度的实际增长规律（即先慢后快，然后又变慢）.

活动内容

1. 根据“数学建模论文示例”中的结果，借助计算机软件等完成下列任务：

（1）在已有的数据中，选择不同的数据确定我国 7 岁以下女童身高和玉米植株高度模型中的参数，然后比较不同参数确定的结果之间的差异；

（2）尝试用 $g(x)=a\lg(x+b)$ 描述我国 7 岁以下女童身高的生长规律，选择合适数据确定参数，并将有关结果与示例中的结果进行比较；

（3）尝试寻找描述玉米植株高度的、不同于 $h(x)=a\mathrm{e}^{hx}$ 的函数模型（提示：可以考虑分段函数），选择合适数据确定参数，并将有关结果与示例中的结果进行比较；

（4）人们一般用逻辑斯谛模型

$$f(x)=\frac{k}{1+c\mathrm{e}^{-rx}}$$

来描述类似玉米植株高度的增长规律，因为这一函数的图象与图 4-7-2 更相似．选择合适的数据，确定出逻辑斯谛模型中的参数值，并对函数值与实际值进行比较，由此写出得到的启发.

2. 按照优势互补的原则，跟其他同学组成一个数学建模小组，在以下两个题目中，任选一个进行数学建模实践.

（1）观察特定植物（如葱、水仙花）的生长情况，定期记录有关数据，探索生长规律，并按照类似本节的方法建立对应的生长模型.

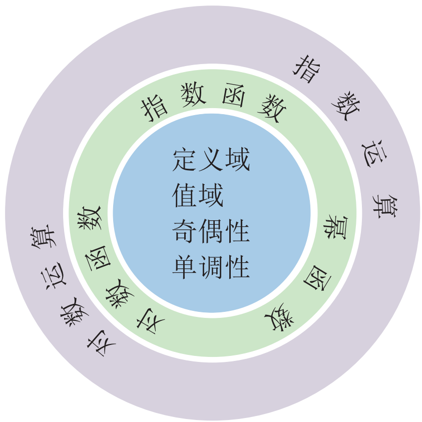
（2）了解人口增长的规律，一直都是人们特别感兴趣的事情．与其他同学合作，查找某一地区或某一国家人口的历史数据，尝试建立相关的数学模型，并利用数学模型加以预测.

人民教育出版社

本章小结

01 知识结构图设计与交流

简单归纳的话，本章我们主要是在学习指数运算的基础上，学习了指数函数和幂函数的知识；在学习对数运算的基础上，学习了对数函数的知识．同以前一样，函数的学习主要关注的是函数的定义域、值域、奇偶性、单调性等．由此可作出知识结构图如下图所示．



上图当然还可以细化，也可以用另外的图表形式来体现，请大家自己动手试一试．

02 课题作业

（1）指数函数、对数函数与幂函数三者之间存在紧密的联系，试整理有关内容，写成小论文，并与其他同学交流．

（2）历史上，对数运算的引入是为了简化乘、除等运算，而且对数运算也不是在指数函数研究的基础上发展起来的．

在没有计算器和计算机可以借助的时代，对数计算并不容易，为此，人们总结出了对数表，通过查表可以获得对数的近似值．

利用对数表可以简化一般的乘、除等运算．

为了方便操作，人们后来还发明了“对数计算尺”，并借助其来简化运算．

查阅有关书籍和网络，了解上述事实，任选一个角度，整理成演讲材料，并与其他同学交流．

03 复习题

A 组

1. 求下列各式的值：

（1）$8^{\frac{2}{3}}$；（2）$3^{\frac{5}{3}}3^{\frac{4}{3}}$；

（3）$\log_2 0.25$；（4）$\log_2 20-\log_4 25$；

（5）$\log_2 3\times\log_{27}125$；（6）$\log_3 2\times\log_2 5\times\log_5 3$.

2. 已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，用 a，b 表示 $\lg 6$ 以及 $\log_3 8$.

3. 判断函数 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的奇偶性，并证明.

4. 在同一平面直角坐标系中，作出函数 $f(x)=\log_2(-x)$和 $g(x)=x+1$ 的图象，并求不等式 $f(x)<g(x)$的解集.

5. 已知函数 $f(x)=3^x$，求证：

（1）$f(a)f(b)=f(a+b)$；（2）$\dfrac{f(a)}{f(b)}=f(a-b)$.

6. 根据下列不等式，分别判断 m 与 n 的大小：

（1）$2^m<2^n$；（2）$\log_{0.2}m>\log_{0.2}n$.

7. 比较下列各题中两个值的大小：

（1）$1.5^{\frac{3}{5}}$，$1.7^{\frac{3}{5}}$；（2）$(-1.2)^{-\frac{2}{3}}$，$(-1.25)^{-\frac{2}{3}}$.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant0,\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0,\end{cases}$ 求不等式 $f(x)>1$ 的解集.

9. 求下列方程的解集：

（1）$3^{2x-2}=81$；（2）$\sqrt{7^x}=\sqrt[5]{343}$；

（3）$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{9}{8}\right)^x=\dfrac{27}{64}$；（4）$5^{x-1}10^{3x}=8^x$.

10. 求下列函数的定义域：

（1）$y=8^{\frac{1}{2x-1}}$；（2）$y=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x}$；

（3）$y=\log_3(2-x)$.

人民教育出版社

B 组

1. 求下列各式的值：

（1）$\log_2 \frac{1}{25} \times \log_3 8 \times \log_5 \frac{1}{9}$；

（2）$\log_2(\log_2 32 - \log_2 \frac{3}{4} + \log_2 6)$.

2. 已知 $5^x = 2$，$5^y = 9$，求 $5^{2x - \frac{y}{2}}$ 的值.

3. 已知 $a^3 = 9$，求 $\log_3 a$ 的值.

4. 已知 $4^a = 2$，$\lg x = a$，求 x 的值.

5. 已知 $2^a = 5^b = m$，$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$，求 m 的值.

6. 判断函数 $f(x) = \frac{(a^x + 1)x}{a^x - 1}$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）的奇偶性，并证明.

7. 已知 $f(x^5) = \lg x$，求 $f(2)$的值.

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 2, & x \leqslant 1, \\ \log_2(x+1), & x > 1, \end{cases}$ 且 $f(a) = 3$，求 $f(6-a)$的值.

9. 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + 1) - ax$ 是偶函数，求 a 的值.

10. 已知函数 $f(x) = 3^x$ 与 $g(x)$的图象关于 $y = x$ 对称，求 $g(x)$的解析式.

11. 求函数 $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ 的最值.

12. 求下列方程的解集：

（1）$\lg x + \lg(x-3) = 1$；

（2）$\frac{1}{12}(\lg x)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x$；

（3）$5^{2x} - 6 \times 5^x + 5 = 0$；

（4）$3^x - 3^{-x} = \frac{80}{9}$；

（5）$2\log_x 25 - 3\log_{25} x = 1$；

（6）$\log_7(\log_3 x) = -1$.

13. 《中国青年报》2015 年 5 月 14 日报道：“伴随着网络技术的蓬勃发展，国内电子商务获得了爆炸式的增长，2014 年网上零售额达到了 27 898 亿元，占社会消费品零售总额的 10%，也就是说，人们日常消费中 10% 是通过网购，而且还以年 30%～40% 的速度增长.”假设 2014—2020 年网上零售额每年的增长率均为 35%，试算出 2015—2020 年每年的网上零售额（精确到 1 亿元）.

14. 比较函数 $f(x) = 2^x$ 与 $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ 在区间 $[a-1, a]$（$a < 0$）上的平均

变化率的大小.

C 组

1. 不使用计算器和计算机软件，比较 $\log_2 5$，$2^{0.5}$，$\log_4 15$ 的大小.

2. 判断函数 $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性，并证明.

3. 已知 $\lg a$，$\lg b$ 是方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个根，求 $\left(\lg\dfrac{b}{a}\right)^2$ 的值.

4. 设函数 $y=f(x)$的图象与 $y=2^{x+a}$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称，且 $f(-2)+f(-4)=1$，求 a 的值.

5. 已知函数 $f(x)$与 $g(x)$满足 $g(x)=f(\lg x)$.

(1) 如果 $y=f(x)$的定义域是 $[1, 3]$，求 $g(x)$的定义域；

(2) 如果 $g(x)$的定义域是 $[0.1, 100]$，求 $f(x)$的定义域.

6. 已知函数 $f(x)=4^x-2^{x+1}a$，$x\in[-1, 2]$的最小值为 $g(a)$.

(1) 求 $g(2)$的值；

(2) 求函数 $g(a)$的解析式.

人民教育出版社

如果能够自学，永远比老师教的效果好．老师教的内容一般印象都不深，就像我们走路一样，人家带着你走，七遍八遍也记不住路，自己走一遍就知道路了．

——马志明

第五章

统计与概率

本章导语

数字在我们的日常生活中已经是不可或缺的了，你不相信吗？试着完全不用数字去描述一下昨天你都干了些什么吧！

在日常生活与生产中，那些有意无意被记录下来的数据，到底是“金矿”还是“垃圾”，取决于使用它的人是否有足够多的统计学知识.

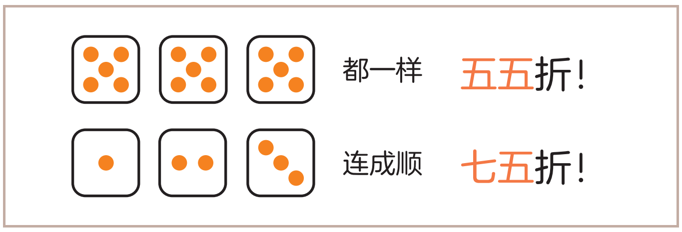
统计学是对数据进行收集、整理、展示、分析和解释，以帮助人们更有效地进行决策的科学. 现代社会中，大到国家宏观政策的实施，小至个人生活的点点滴滴，都或多或少要用到统计知识. 例如，延迟退休决定的做出，一定建立在对人口总体年龄分布等情况的掌握基础上；个人高考志愿的填报，一般会参考所报考院校以往的录取分数线；等等.

概率的有关知识与统计学有千丝万缕的联系，从历史发展来看，概率起源于人们对随机现象统计规律的认识. 概率论是研究随机现象统计规律性的学科. 我们的生活中充满了随机现象：今天是否会下雨，公交车是否会准点到达，上学的路上会不会遇到自己的好朋友……

本章我们将在初中的基础上，进一步了解统计与概率的知识，并用它们去解决一些更复杂的问题.

例如，俗话说，失败乃成功之母. 如果做某一件事，成功的概率只有 0.1，那么需要尝试多少次才能保证至少成功一次的概率不小于 90%呢？

再例如，某饭店搞“掷骰子得折扣”的活动，顾客同时掷三个骰子，然后按照所得点数情况决定最后的折扣，规则如下图所示. 你能分别算出顾客得五五折和七五折的概率吗？



学完本章的内容之后，我们就能轻而易举地解决类似的问题了！

5.1 统计

5.1.1 数据的收集

统计学是一门利用数据帮助人们决策的科学，数据的收集往往是统计活动的基础．现代社会里，获取数据的途径很多．

从互联网上可以获得大量的统计数据．比如从国家统计局的网站（如图 5-1-1 所示）中，通过数据查询等，可以得到各种权威的国家宏观统计数据．

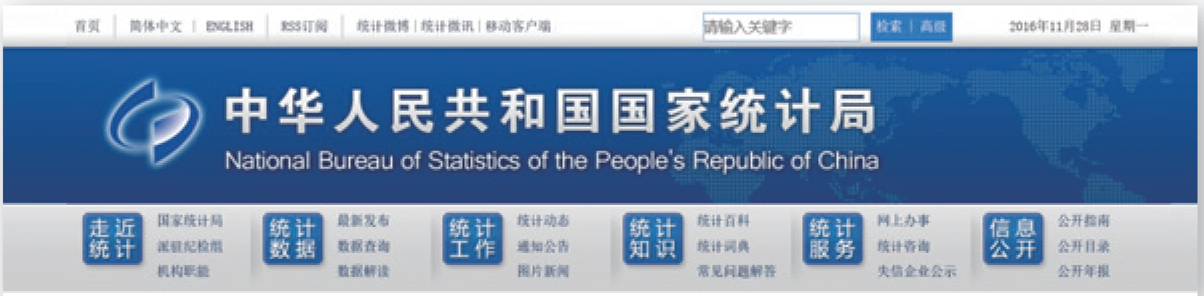


图 5-1-1

再比如，通过正式出版的统计报表和年鉴（如图 5-1-2 所示），也可获得权威的统计数据．

当然，也可以通过向专业人士请教等来获得现成的数据．

我们还可以自己动手直接收集数据．例如，通过社会调查了解人们对环境保护的看法，通过设计试验掌握种子的发芽率，等等．

通过每天的实时记录，也能得到有用的数据．例如，通过记录自己每天在每个学科上学习的时间，能了解自己是否有偏科、是否需要调整各学科的学习时间等．

图 5-1-2

1. 总体与样本

情境与问题

育才中学想在高一年级下学期举办 3 场心理健康讲座，备选的主题有 6 个，高一学生共有 1 356 人．学校将备选的 6 个主题一一列出，做成了调查问卷．为了选出最能满足大家需要的 3 个主题，以下两种方案各自的优点和缺点是什么？

（1）请每位高一学生完成调查问卷，然后统计有关结果；

（2）随机抽取 50 位高一学生完成调查问卷，然后统计有关结果．

我们在初中已经接触过总体与样本，知道所考察问题涉及的对象全体是**总体**，总体中每个对象都是**个体**，抽取的部分对象组成总体的一个**样本**，一个样本中包含的个体数目是**样本容量**．

一般地，对总体中每个个体都进行考察的方法称为普查（也称为全面调查），只抽取样本进行考察的方法称为抽样调查．前述情境与问题中的方案（1）是普查，方案（2）是抽样调查．

普查能够了解总体中每个个体的情况，从而能准确地掌握总体的特征．因此，在总体包含的个体总数不大，或有特殊需要的情况下，可以采用普查的方法．例如：

（1）为了订购集体活动的服装，需要了解班内每位同学的身高、腰围等，应该使用普查的方法；

（2）为了全面地了解我国人口状况，从 1949 年至 2017 年，我国已进行了 6 次全国性人口普查；

（3）为了掌握国民经济第二产业、第三产业的发展规模、结构、效益等信息，我国于 2004 年、2008 年、2013 年进行了三次经济普查，而且自 2013 年以后，计划逢 3 和逢 8 的年份都要进行经济普查．

然而，普查的方法有时会因为各种原因而无法实施，例如成本太高、时间上不容许、检测具有破坏性等，此时抽样调查就成了不二选择．例如：

（1）想了解潜在顾客对新开发的产品包装意见时，由于潜在顾客难以界定以及经济上的原因，只能采用抽样调查；

（2）想实时了解收看时政新闻的人数等情况，因为经济成本与时间的原因，只能采用抽样调查；

（3）国家食品药品监督管理部门想检测各超市中正在出售的牛奶里细菌

人民教育出版社

含量是否超标，公司质监部门想测试电子产品的防水性能，因为这些检测都具有破坏性，只能采用抽样调查.

事实上，我们在日常生活中也经常运用抽样的思想. 例如：

（1）早晨起床的时候，如果发现天气变了，你可能会把手伸出窗外感受一下，然后再决定是否要穿厚一点的衣服；

（2）在大口喝杯子里的热水之前，你一定会先喝一小口，试一下温度；

（3）去买橘子的时候，如果有可能的话，你会先尝一下，然后再决定买还是不买.

当然，对于抽样调查来说，最重要的是要保证所抽取的样本具有代表性，怎样才能做到这一点呢？这正是下面我们要讨论的.

拓展阅读

我国古代统计工作简介

早在夏朝时期，我国就进行了人口调查统计.

为了管理统计工作，周朝设有专门负责调查和记录数据的官员，称为“司书”. 据《周礼》的记载，国家设立“司书上士二人，中士四人，府二人，史四人，徒八人”，他们的主要工作是负责“邦之六典……以周知入出百物……以知田野夫家六畜之数”.

《管子》一书中，题为“调查”的那篇记载了 65 个涉及统治一个国家的各方面问题. 例如：多少家庭拥有自己的土地和房屋？每一户储备有多少粮食？有多少鳏夫、寡妇、孤儿和病人？

汉朝的开国皇帝刘邦认为统计很重要，因而他让宰相直接管理统计数字. 这作为一个传统，在中国历史上延续了很长一段时间. 他们主要感兴趣的问题类似于：当发生紧急状况时能够动员多少身强力壮的男子？需要多少人的劳作才能满足人们的基本生活？在计划做出有关财产或婚姻法律变更时，不满的少数派会有多少？一个地方统治政权以及邻国的课税能力如何？……

2. 简单随机抽样

在初中我们已经接触过简单随机抽样，知道在进行简单随机抽样时，总体中的每一个个体都有相等的机会被抽到. 一般地，简单随机抽样（也称为纯随机抽样）就是从总体中不加任何分组、划类、排队等，完全随机地抽取个体. 简单随机抽样是其他各种抽样方法的基础. 当总体中的个体

图 5-1-3

之间差异程度较小和总体中个体数目较少时，通常采用这种方法.

常见的简单随机抽样方法有抽签法、随机数表法.

抽签法类似于从如图 5-1-3 所示的抽奖箱中抽奖.

例如，若要从 90 个节能灯中用抽签法抽出 5 个来进行检验，可以先给这 90 个节能灯编号，然后将编号写在 90 张纸片（或小球）上，再把纸片放在一个容器中，搅拌均匀后，随机从中抽出 5 个号码，找出这 5 个号码对应的节能灯即可.

抽签法的优点是简单易行，但当总体的容量非常大时，操作起来就比较麻烦，而且如果抽取之前搅拌不均匀，可能导致抽取的样本不具有代表性，使用随机数表可在一定程度上解决这个问题.

顾名思义，随机数表是由随机数（通常为 0，1，2，…，9）形成的数表，表中的每一位置出现的数都是随机的，下列是一个随机数表的一部分.

48628	50089	38155	69882	27761	73903	53014	98720	41571	79413
53666	08912	48395	32616	34905	63640	57931	72328	49195	17699
00620	79613	29901	92364	38659	64526	20236	29793	09063	99398
01114	19048	00895	91770	95934	31491	72529	39980	45750	14155
98246	18957	91965	13529	97168	97299	68402	68378	89201	67871
41410	51595	89983	82330	96809	93877	92818	84275	45938	48490

用随机数表进行简单随机抽样的一般步骤为：

（1）对总体进行编号.

（2）在随机数表中任意指定一个开始选取的位置. 位置的确定可以闭着眼用手指随机确定，也可用其他方式随机确定.

（3）按照一定规则选取编号. 例如，若编号是两位，规则可以是每次从左往右选取两个数字，也可以是每次只选取每一组的前两个数字，还可以是每次只选取下面一行同一位置对应的两个数字，等等. 规则一经确定，就不能更改. 在选取过程中，遇到超过编号范围或已经选取了的数字，应该舍弃.

（4）按照得到的编号找出对应的个体.

例如，仍以从 90 个节能灯中抽出 5 个为例，将 90 个节能灯编号为 01，02，…，90：

（1）若指定从第三行第五组的第一个数字开始，每次从左往右选取两个数字，则可得 5 个编号为

38，65，45，1 ______，2 ______，

注意，操作过程中共选取了 6 次数，其中第 3 次选取的编号 96 超出了范围，已舍弃；

人民教育出版社

（2）若指定从第五行第一组的第一个数字开始，每次只选取每一组的前两个数字，则可得 5 个编号为

18，13，3 ______，4 ______，5 ______，

注意，操作过程中共选取了 10 次数．

3. 分层抽样

尝试与发现

某高中高一新生共有 900 人，其中男生 500 人，女生 400 人．学校现在想了解高一新生对文史类课程的看法，以便开设有关选修课程，准备从高一新生中抽取 45 人进行访谈：

（1）如果直接采用简单随机抽样，会有什么缺点？

（2）采用怎样的抽样方法较好？

如果相对于要考察的问题来说，总体是由有明显差别的几部分组成时，直接采用简单随机抽样得出的样本，可能并不具有代表性．

例如，上述尝试与发现中，一般来说，男生与女生对文史类课程的看法存在差别，如果采用简单随机抽样，得到的样本中，男生（女生）所占比例与总体中的男生（女生）所占比例可能存在较大差异，从而导致最后得到的结果不能很好地反映总体的情况．

为了避免出现这种情况，可以在抽样时要求样本中的男生（女生）所占比例与总体中男生（女生）所占比例一致．设样本中男生为 x 人，女生为 y 人，则应有

$$\frac{x}{45}=\frac{500}{900},\ \frac{y}{45}=\frac{400}{900},\ \text{即}\frac{x}{500}=\frac{y}{400}=\frac{45}{900},$$

从而有 $x=25$，$y=20$．这就是说，应从高一新生的男生中抽取 25 人，女生中抽取 20 人．在男生和女生中抽取时，可以用简单随机抽样的方法．

一般地，如果相对于要考察的问题来说，总体可以分成有明显差别的、互不重叠的几部分时，每一部分可称为层，在各层中按层在总体中所占比例进行随机抽样的方法称为**分层随机抽样**（简称为**分层抽样**）．

通过分层抽样所得到的样本，一般更具有代表性，可以更准确地反映总体的特征，尤其是在层内个体相对同质而层间差异较大时更是如此．分层抽样在各层中抽样时，还可根据各层的特点灵活地选用不同的随机抽样方法．有些情况下，人们除了对总体的信息感兴趣，还希望得到各层的内部信息，

人民教育出版社

这时采用分层抽样更是自然的选择．因此，分层抽样方法的应用比较广泛．

例 某科研院所共有科研人员 800 人，其中具有高级职称的 160 人，具有中级职称的 320 人，具有初级职称的 240 人，无职称的 80 人，欲了解该科研院所科研人员的创新能力，决定抽取 100 名科研人员进行调查，应怎样进行抽样？

解 因为一般来说，创新能力与职称有关，所以应该用分层抽样．

设样本中具有高级职称的人数为 x，则 $\frac{100}{800}=\frac{x}{160}$，可算得 $x=20$，即要抽取具有高级职称的科研人员 20 人．

类似地，可以算得要抽取具有中级职称的科研人员 6 ______人，具有初级职称的科研人员 7 ______人，无职称的科研人员 8 ______人．

在分层抽样过程中，如果计算得出的层内抽样数不是整数，可以进行一定的技术处理，比如将结果取成整数等．

4. 用信息技术进行抽样

很多计算机软件中，都内置有生成随机数的函数，我们可以利用这些函数来进行抽样．

例如，要从 1，2，…，90 中抽出 5 个数，可以在电子表格软件中多次使用 RANDBETWEEN 函数，如图 5-1-4 所示．

在 GeoGebra 软件的表格区也可实现同样的功能，只不过使用的函数是 RandomBetween．

当然，也可以利用上述命令生成随机数表．

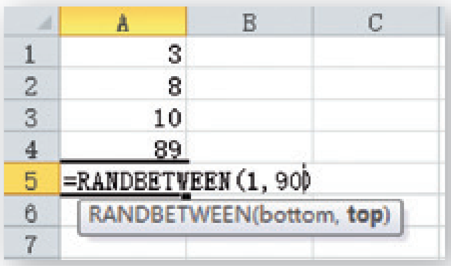


图 5-1-4

练习A

1. 如果要了解一批节能灯的寿命，应该用普查还是抽样调查？简述理由．
2. 利用正文中的随机数表，从第二行第三组第一个数开始，每次从左往右读三个数字，从 001，002，…，500 中抽取一个容量为 5 的样本．
3. 某完全中学初中部有学生 1 850 人，高中部有学生 1 250 人．若要用分层抽样的方法从这所学校抽出 62 名同学来了解大家对学校伙食的看法，那么所抽出的初中部学生数与高中部学生数的比是多少？

练习B

1. 某集团有甲、乙、丙三个分公司，其中甲公司有员工 500 名，乙公司有员工 800 名，丙公司有员工 300 名．为了了解集团员工对企业改革的态度，该集团用分层抽样的方式抽取若干名员工进行访谈．已知甲公司共抽取了 10 名员工，分别求乙公司和丙公司抽取的员工数．
2. 某电视台在互联网上征集电视节目的现场参与观众，报名的共有 12 000 人，分别来自 4 个地区，其中甲地区 2 400 人，乙地区 4 605 人，丙地区 3 795 人，丁地区 1 200 人，主办方计划从中抽取 60 人参加现场节目，请设计一套抽样方案．
3. 利用电子表格软件或 GeoGebra 生成一张含有 100 组数的随机数表，并以生成的表为基础，用随机数表法，从编号 001，002，…，600 中抽取容量为 30 的一个样本．

1 26	2 20	3 68	4 89	5 67	6 40	7 30	8 10

5.1.2 数据的数字特征

情境与问题

如下是某学校高一（1）班和高一（2）班某一次期中考试的语文成绩，试从不同的角度对两班成绩进行对比．

高一（1）班期中考试语文成绩

69	84	69	80	75	70	75	71	87	70	80	84	73	81	81	73
66	78	68	79	73	75	76	76	70	74	71	86	63	88		

高一（2）班期中考试语文成绩

76	86	74	82	77	68	62	82	72	82	76	81	84	79	67	78
70	72	81	89	81	77	72	77	67	67	72	79	81	75	75	84

在日常生活中，当面对一组数据时，相比每一个观测值，有时我们更关心的是能反映这组数据特征的一些值．例如，上述情境中的两个班的成绩，我们可以从最值、平均数、中位数、方差等角度进行比较．

1. 最值

一组数据的最值指的是其中的最大值与最小值，最值反映的是这组数最极端的情况．一般地，最大值用 max 表示，最小值用 min 表示．

日常生活中，有时我们只关心数据的最值．比如，高考部分科目实行“一年多考”，最终取的是多次考试成绩中的最大值；举重比赛中，选手有三次“试举”机会，其中成绩的最大值将计入总成绩；末位淘汰的比赛中，积分最小值对应的团体或个人将被淘汰出局；等等．

2. 平均数

日常生活中，我们经常使用平均数来刻画一组数据的平均水平（或中心位置）．例如，为了减少测量的误差，一般取多次测量值的平均数作为最终的测量值；在有多个评委的比赛中，一般也以各评委给出分数的平均数作为最后的成绩；等等．

如果给定的一组数是 x_1，x_2，…，x_n，则这组数的平均数为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

这一公式在数学中常简记为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

其中的符号“$\sum$”表示求和，读作“西格玛”，$\sum$ 右边式子中的 i 表示求和的范围，其最小值与最大值分别写在 $\sum$ 的下面与上面．例如，

$$\sum_{i=1}^{3}x_i=x_1+x_2+x_3,\quad \sum_{i=5}^{7}x_i=x_5+x_6+x_7.$$

不难看出，求和符号 $\sum$ 具有以下性质：

(1) $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i$；　　(2) $\sum_{i=1}^{n}(kx_i)=k\sum_{i=1}^{n}x_i$；

(3) $\sum_{i=1}^{n}t=nt$．

尝试与发现

某武术比赛中，共有 7 个评委，计分的规则是：去掉一个最高分，去掉一个最低分，然后把其他分数的平均数作为选手的最后得分．按照这样的规则，根据以下

数据，计算三位选手的最后得分：

选手	评委 1	评委 2	评委 3	评委 4	评委 5	评委 6	评委 7	最后得分
甲	90	88	93	93	92	92	96	1 ____
乙	92	96	95	92	89	92	95	2 ____
丙	91	91	88	91	98	93	92	3 ____

（1）从数学的角度，讨论为什么要去掉一个最高分与最低分后再计算平均数，以及平均数具有什么特点；

（2）有人认为，应该把最高分与最低分之外的分数总分作为选手的最后得分，讨论这样的计分规则与前面的规则是否有本质上的区别.

平均数会受每一个数的影响，尤其是最大值、最小值. 很多情况下，为了避免过于极端的值影响结果太大等，会去掉最低分与最高分后再计算平均数. 但是，计算总分与计算平均分不会有本质区别，请读者自行说明理由.

当计算上述甲选手的最后得分时，在把 88 与 96 去掉之后，可以先把其余数都减去 92，得到新的数为 -2，1，1，0，0，因为这一组数的平均数为 0，所以可知甲的最后得分为 92. 其余选手的得分可以用类似的方法得到.

一般地，利用平均数的计算公式可知，如果 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\overline{x}$，且 a，b 为常数，则

$$ax_1+b,\ ax_2+b,\ \cdots,\ ax_n+b$$

的平均数为 $a\overline{x}+b$，这是因为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(ax_i)+\sum_{i=1}^{n}b\right]=\frac{1}{n}\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb\right)$$

$$=a\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)+b=a\overline{x}+b.$$

3. 中位数、百分位数

我们知道，一组数的平均数与这组数中的每一个数都有关，特别地，平均数容易受到最值的影响，因此有时平均数并不能很好地表示这组数的中心位置.

尝试与发现

有甲、乙两个组，每组有 6 名成员，他们暑假读书的本数分别如下：

甲组：1，2，3，3，4，5；

乙组：0，0，1，2，3，12.

（1）分别求出两组数的平均数；

（2）平均数是否很好地表示了每一组数的中心位置？如果没有，可以选择什么数来表示？

上述甲、乙两组数的平均数均为 3，但是用 3 来刻画乙组数的中心位置是不合适的，因为这组数中，有 5 个数都不大于 3.

一般地，有时也可以借助中位数来表示一组数的中心位置：如果一组数有奇数个数，且按照从小到大排列后为 x_1，x_2，…，x_{2n+1}，则称 x_{n+1} 为这组数的中位数；如果一组数有偶数个数，且按照从小到大排列后为 x_1，x_2，…，x_{2n}，则称$\frac{x_n+x_{n+1}}{2}$为这组数的中位数.

尝试与发现

指出甲、乙两组数的中位数，并思考：中位数是否能比较全面地体现数据的分布特点？如果不能，有什么补救的办法？

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
甲组	1	2	2	2	2	3	3	3	5	5	6	6	8	8	9	10	10	12	13	13
乙组	0	0	0	0	1	1	2	3	4	5	6	6	7	7	10	14	14	14	14	15

当数据个数较多时，如果仅仅知道中位数，是不足以了解这组数的分布特点的. 例如，上述甲、乙两组数的中位数都是 5.5，但是甲组数中，小于 5.5 的数普遍比乙组的大，而大于 5.5 的数普遍比乙组的小.

更具体地，将甲、乙两组数小于 5.5 的前 10 个数分别看成一组数，则它们的中位数分别是 2.5，4 ________，这两个数能够反映甲、乙两组数小于 5.5 的数的分布特点，因为这两个数是通过找小于或等于中位数的所有数的中位数得到的，所以它们分别称为甲、乙两组数的 25%分位数.

一般地，当数据个数较多时，可以借助多个百分位数来了解数据的分布特点.

一组数的 $p\%(p\in(0,100))$ 分位数指的是满足下列条件的一个数值：至少有 $p\%$的数据不大于该值，且至少有 $(100-p)\%$的数据不小于该值.

直观来说，一组数的 $p\%$分位数指的是，将这组数按照从小到大的顺序排列后，处于 $p\%$位置的数. 例如，中位数就是一个 50%分位数.

按照定义可知，$p\%$分位数可能不唯一，也正因为如此，各种统计软件所得出的 $p\%$分位数可能会有差异.

为了方便，我们按如下方式确定 $p\%$分位数：设一组数按照从小到大排列后为 x_1，x_2，…，x_n，计算 $i=np\%$的值，如果 i 不是整数，设 i_0 为大于 i 的最小整数，取 x_{i_0} 为 $p\%$分位数；如果 i 是整数，取

$$\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$$

为 $p\%$分位数. 特别地，规定：0 分位数是 x_1（即最小值），100%分位数是 x_n（即最大值）.

实际应用中，除了中位数外，经常使用的是 25%分位数（简称为第一四分位数）与 75%分位数（简称为第三四分位数）.

例 1 计算上述尝试与发现中甲、乙两组数的 75%分位数.

解 因为数据个数为 20，而且

$$20\times75\%=15,$$

所以，甲组数的 75%分位数为

$$\frac{x_{15}+x_{16}}{2}=\frac{9+10}{2}=9.5;$$

乙组数的 75%分位数为

5 ________________.

由此可知，如果尝试与发现中的甲组数用 2.5，5.5，9.5 来刻画，乙组数用 1，5.5，12 来刻画，则大致可以看出它们的数的分布特点.

4. 众数

一组数据中，某个数据出现的次数称为这个数据的频数，出现次数最多的数据称为这组数据的众数. 有些情形中，我们用众数来描述一组数据的中心位置.

情境与问题

某班级准备利用暑假去进行研学旅行，为了便于识别，他们准备定做一批容量一致的双肩包，为此，活动负责人征求了班内同学的意向，得到了如下数据：

容量/L	23	25	27	29	31	33
频数	3	2	5	21	2	2

你认为应该定做什么容量的双肩包？为什么？

为了照顾到绝大多数人的需求，此时应该定做容量为 29 L 的双肩包，这里的 29 就是上述数据的众数.

5. 极差、方差与标准差

一组数的极差指的是这组数的最大值减去最小值所得的差. 不难看出，极差反映了一组数的变化范围，描述了这组数的离散程度.

描述一组数的离散程度的量还有方差和标准差.

如果 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\overline{x}$，则方差可用求和符号表示为

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$$

此时，如果 a，b 为常数，则

$$ax_1+b,\ ax_2+b,\ \cdots,\ ax_n+b$$

的方差为 a^2s^2，这是因为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(ax_i+b)-(a\overline{x}+b)]^2\\=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i-a\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a^2(x_i-\overline{x})^2]\\=&a^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=a^2s^2.\end{aligned}$$

方差的算术平方根称为标准差. 由此可知，如果一组数中，各数据值都相等，则标准差为 0，表明数据没有波动，数据没有离散性；若各数据的值与平均数的差的绝对值较大，则标准差也较大，表明数据的波动幅度也较大，数据的离散程度较高. 因此标准差描述了数据相对于平均数的离散程度.

想一想

用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})$ 或 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{x}|$ 来衡量一组数的离散程度可以吗? 为什么?

例 2 计算下列各组数的平均数与方差：

(1) 18.9，19.5，19.5，19.2，19，18.8，19.5；

(2) 2，2，2，3，3，3，3，4，4，4，4，4，5，5，5，5，5，5，6，6.

解 (1) 将每一个数乘以 10，再减去 190，可得

$$-1，5，5，2，0，-2，5.$$

这组新数的平均数为

$$\frac{1}{7}\times(-1+5+5+2+0-2+5)=2,$$

方差为

$$\frac{1}{7}\times[(-1-2)^2+(5-2)^2+(5-2)^2+(2-2)^2+$$
$$(0-2)^2+(-2-2)^2+(5-2)^2]=8.$$

由此可知，所求平均数为 19.2，方差为 $8\times\frac{1}{100}=0.08$.

（2）可将数据整理为

x	2	3	4	5	6
频数	3	4	5	6	2

每一个数都减去 4 可得

$x-4$	-2	-1	0	1	2
频数	3	4	5	6	2

这组数的平均数与方差分别为

$$\frac{1}{20}\times[(-2)\times3+(-1)\times4+0\times5+1\times6+2\times2]=0,$$

$$\frac{1}{20}\times[(-2)^2\times3+(-1)^2\times4+0^2\times5+1^2\times6+2^2\times2]=\frac{3}{2}.$$

因此，所求平均数为 4，方差为 $\frac{3}{2}$.

6. 用信息技术求数据的数字特征

用计算机软件可以方便快捷地求得一组数的各种数字特征.

例如，为了求出例 2（1）中数据的数字特征，可以将它们输入电子表格中，然后使用相应的函数即可，如图 5-1-5 所示.

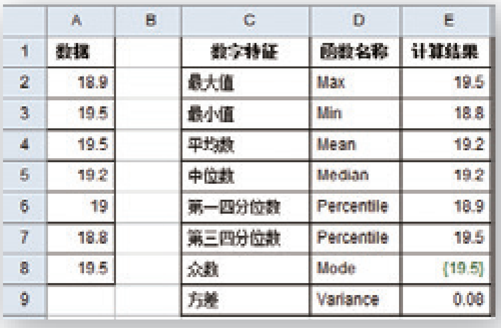
	A	B	C	D	E
1	数据		数字特征	函数名称	计算结果
2	18.9		最大值	MAX	19.5
3	19.5		最小值	MIN	18.8
4	19.5		平均数	AVERAGE	19.2
5	19.2		中位数	MEDIAN	19.2
6	19		第一四分位数	QUARTILE. EXC	18.9
7	18.8		第三四分位数	QUARTILE. EXC	19.5
8	19.5		众数	MODE. SNGL	19.5
9			方差	VAR. P	0.08

图 5-1-5

其中，求第一四分位数输入的是“=QUARTILE. EXC(A2:A8，1)”，求第三四分位数输入的是“=QUARTILE. EXC(A2:A8，3)”.

用 GeoGebra 软件的表格区也可实现类似的功能，但是函数的名称不一致，如图 5-1-6 所示.

其中，求第一四分位数输入的是“=Percentile[A2:A8，0.25]”，求第三四分位数输入的是“=Percentile[A2:A8，0.75]”.



	A	B	C	D	E
1	数据		数字特征	函数名称	计算结果
2	18.9		最大值	Max	19.5
3	19.5		最小值	Min	18.8
4	19.5		平均数	Mean	19.2
5	19.2		中位数	Median	19.2
6	19		第一四分位数	Percentile	18.9
7	18.8		第三四分位数	Percentile	19.5
8	19.5		众数	Mode	{19.5}
9			方差	Variance	0.08

图 5-1-6

练习A

1. 已知 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$，$x_4=4$，$x_5=5$，求下列各式的值：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{3} x_i$；　　(2) $\sum\limits_{i=3}^{5} x_i$；　　(3) $\sum\limits_{i=1}^{5} x_i$.

2. 求 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 的 25%分位数，75%分位数，90%分位数.

3. 计算下列各组数的平均数与方差：

(1) 90，92，92，93，93；　　(2) 0，2，2，3，3；

(3) −2，0，0，1，1；　　(4) 900，920，920，930，930.

4. 已知 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\overline{x}$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=0$.

练习B

1. 已知 12，10，15，9，8，a 中的最大值为 15，其中 a 是正整数，求 a 所有可能的值所组成的集合.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{3}(2i)$；　　(2) $\sum\limits_{i=3}^{5}(i-2)$；　　(3) $\sum\limits_{i=1}^{5}(2i-1)$.

3. 记 100，100，300，500，500 的平均数为 a_1，标准差为 b_1；200，200，300，400，400 的平均数为 a_2，标准差为 b_2. 比较 a_1 与 a_2 的大小，b_1 与 b_2 的大小.

1 92　　2 93.2　　3 91.6　　4 1　　5 $\dfrac{x_{15}+x_{16}}{2}=\dfrac{10+14}{2}=12$

5.1.3 数据的直观表示

我们知道，从现实生活中得到的数据往往都是没有规律的、凌乱的，如果不加以整理，可能难以看出数据的特征，也不利于有关信息的挖掘. 因此，人们在呈现有关结果时，往往会对数据进行整理，并用合适的图表来形象化地表示有关数据.

1. 柱形图

情境与问题

2015 年 7 月 6 日的《中国青年报》报道：“根据调查，有担当（76.3%）和踏实（74.5%）的年轻人最被受访者欣赏. 奋进（54.7%）、坚毅（54.1%）、有梦想（50.2%）、有闯劲儿（40.1%）、沉稳（36.7%）、直率（34.6%）、幽默（33.4%）、活泼（27.2%）、庄重（20.3%）、洒脱（20.0%）也是受访者欣赏的品质.”

你能将这一调查结果用图表进行形象化表示吗？

我们知道，柱形图（也称为条形图）可以形象地比较各种数据之间的数量关系，因此上述情境与问题中的结果可以用柱形图表示，如图 5-1-7 所示.

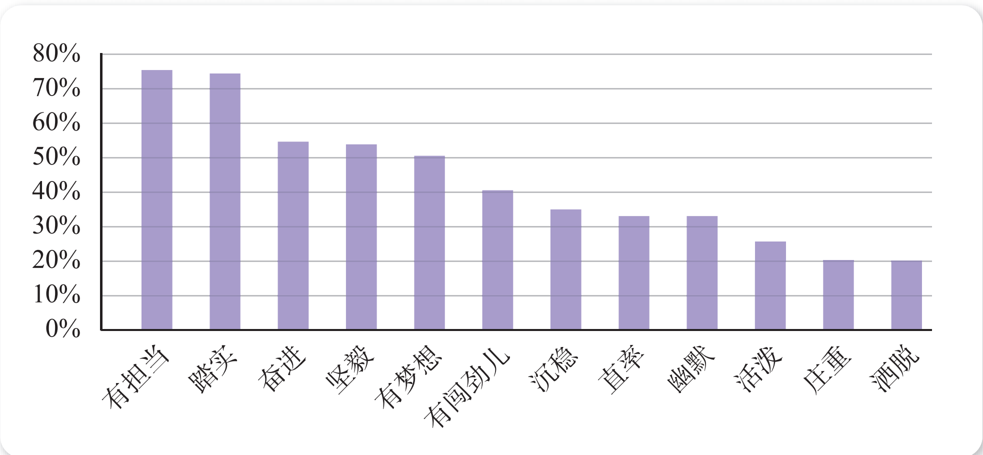


图 5-1-7

一般地，柱形图中，一条轴上显示的是所关注的数据类型，另一条轴上对应的是数量、个数或者比例，柱形图中每一矩形都是等宽的.

2. 折线图

情境与问题

国家统计局网站显示，2011—2015 年高中在校学生数信息如下.

年份	2011 年	2012 年	2013 年	2014 年	2015 年
高中在校学生数/万	2 454.82	2 467.17	2 435.881 7	2 400.472 3	2 374.399 2

你能形象地表示上述数据，以便发现这几年高中在校学生数的变化趋势吗？

可以用折线图来表示上述情境与问题中的数据，如图 5-1-8 所示.

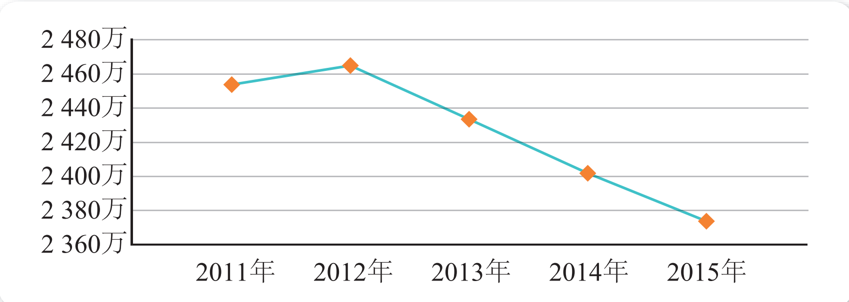


图 5-1-8

一般地，如果数据是随时间变化的，想了解数据的变化情况，可将数据用折线图来表示. 当然，折线图也可以用在其他合适的情形中.

3. 扇形图

情境与问题

2016 年 12 月 17 日至 21 日，北京市空气质量呈现重度及以上污染水平，经北京市政府批准，12 月 16 日 20 时至 21 日 24 时，北京市启动了空气重污染红色预警，实行了机动车“单双号”限行等措施.《中国青年报》社会调查中心联合问卷网，对 2 002 人进行了调查，得到了以下数据：647 人非常支持，891 人支持，348 人态度一般，116 人不支持.

如果你是《中国青年报》的记者，你会怎样整理和报道这些数据？

不难看出，如果直接呈现上述情境与问题中的调查结果，读者将难以看出其中的规律，包括四种态度的人数之间的比例关系等，为了避免出现这种

人民教育出版社

情况，我们可以将原有的结果转化为表格，并计算每一类型数据的百分比，如下表所示.

态度	非常支持	支持	一般	不支持
人数	647	891	348	116
所占比例	32.3%	44.5%	17.4%	5.8%

事实上，《中国青年报》的报道原文是："民调显示，76.8%的受访者支持此次单双号限行，其中32.3%的受访者非常支持. 态度一般和不支持的分别占17.4%和5.8%."

更进一步，我们还可以用扇形图（也称为饼图、饼形图）来形象地表示这一结果，如图5-1-9所示.

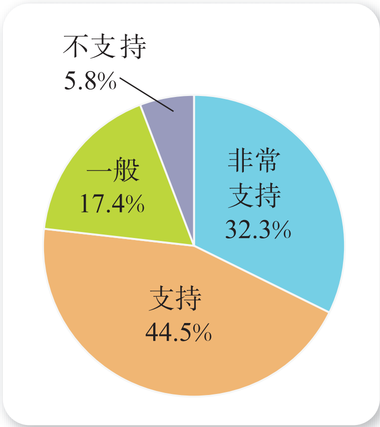


图 5-1-9

不难看出，扇形图可以形象地表示出各部分数据在全部数据中所占的比例情况. 扇形图中，每一个扇形的圆心角以及弧长，都与这一部分表示的数据大小成正比.

4. 茎叶图

尝试与发现

某赛季甲、乙两名篮球运动员每场比赛的得分情况如下：

甲：12，15，24，25，31，31，36，36，37，39，44，49，50；

乙：8，13，13，14，16，23，26，29，33，35，38，39，51.

这两组数据可以用图5-1-10来表示.

甲		乙
	0	8
5 2	1	3 3 4 6
5 4	2	3 6 9
9 7 6 6 1 1	3	3 5 8 9
9 4	4	
0	5	1

图 5-1-10

你能说出上述图是怎样构造出来的吗？由图中可以得出甲、乙两名运动员得分的哪些信息？

人民教育出版社

类似图 5-1-10 的图称为茎叶图，其名称的由来是因为它的中间像植物的茎，两边像植物茎上生长的叶子．图 5-1-10 中，中间的数字表示两位运动员得分的十位数，两边的数字表示得分的个位数．

一般来说，茎叶图中，所有的茎都竖直排列，而叶沿水平方向排列．茎叶图也可以只表示一组数．

将一组数整理成茎叶图后，如果每一行的数都是按从大到小（或从小到大）顺序排列，则从中可以方便地看出这组数的最值、中位数等数字特征．例如，从图 5-1-10 中可以看出：甲得分的最大值是 50，最小值是 12，中位数为 36；乙得分的最大值是 1 ________，最小值是 2 ________，中位数为 3 ________．

另外，从茎叶图中还可以看出一组数的分布情况，从而可能可以得到一些额外的信息．例如，从图 5-1-10 中可以看出：甲的得分大多数集中在 [30，40)，而且小于 31 分和大于 39 分的次数相差不多，因此可以估计出甲的平均数应该在区间 [30，40) 内；类似地，可以估计出乙得分的平均数应该在区间 4 ________ 内．

从图 5-1-10 中我们还可以估计出甲得分和乙得分的方差的相对大小，因为甲得分的数据比较集中，乙得分的数据比较分散，两者的数据个数相等，所以可以得出：甲得分的方差小于乙得分的方差．

5. 频数分布直方图与频率分布直方图

情境与问题

以下是某学校全体学生一次政治考试的成绩．

76	83	88	89	72	67	88	85	90	87	74	65	86	71	88
90	82	90	81	78	76	75	78	86	79	71	73	82	76	90
77	81	83	77	93	94	84	70	77	89	83	84	68	74	59
77	86	89	78	86	76	85	83	69	81	84	90	85	76	79
80	82	74	64	89	84	88	73	70	84	92	88	82	73	86
69	84	68	70	73	82	84	82	66	68	82	75	72	74	79
82	67	70	81	77	89	77	89	76	73	79	79	72	83	88
69	78	70	74	74	76	75	77	88	92	80	86	84	85	71
67	80	65	82	78	83	88	64	83	85	79	91	80	77	90
81	82	63	87	70	75	82	74	91	66	80	67	60	90	81
76	81	90	68	68	88	88	82	76	91	90	72	66	82	85

70　70　82　76　82　84　83　80　69　83　90　61　74　69　79
80　61　68　88　69　84　74　82　62　86　79　67　79　91　80
77　83　79　89　89　76　70　80　69　71　73　76　85　90　87
73　86　66　80　81　85　88　66　87　91　71　81　91　63　74
77　84　76　86　84　72　88　75　80　92　86　74　72　75　78
90　76　86　88　86

(1) 能否直接用前面提到过的图来表示上述数据？为什么？

(2) 怎样才能直观地表示出上述数据的大致分布情况（比如指出哪个分数段的分数比较多，哪个分数段的分数比较少）？

前面给出的数据直观表示中，都直接用到了每一个数的具体值．然而，在很多情况下，所得数据的个数比较多，如果要在图中体现每一个数字的大小，既麻烦也无必要．

此时，怎样才能直观地表示出这组数的大致分布情况（比如显示出哪些范围内的数比较多，哪些范围内的数比较少），并得到有关的信息呢？一个自然的想法是，将数据按照一定的方式进行“压缩”，然后再用图来直观地表示压缩后的数据．

因为我们关心的是数据的大致分布情况，所以可以事先确定出几个区间，然后统计落在每一个区间内的数的个数，最后将统计的结果用图示表示．

类似的操作我们在初中学习直方图的知识时就进行过，下面以情境与问题中的数据为例进行详细说明．

(1) 找出最值，计算极差

上述成绩的最小值是 59，最大值是 94，因此极差为 35．

(2) 合理分组，确定区间

数据共有 245 个，可以分为 8～12 组，这里取 8 组，并且按照从 55 分开始，组距为 5 确定计数区间，即区间为 $[55, 60)$，$[60, 65)$，…，$[85, 90)$，$[90, 95]$．

(3) 整理数据

逐个检查原始数据，统计每个区间内数的个数（称为区间对应的频数），并求出频数与数据个数的比值（称为区间对应的频率），如下表所示（频率精确到 0.01）．

分组区间	个数累计	频数	频率
[55，60)	一	1	0.00
[60，65)	正下	8	0.03
[65，70)	正正正正正	25	0.10
[70，75)	正正正正正正正下	38	0.16
[75，80)	正正正正正正正正正一	46	0.19
[80，85)	正正正正正正正正正正正下	58	0.24
[85，90)	正正正正正正正正正一	46	0.19
[90，95]	正正正正下	23	0.09

（4）作出有关图示

根据上述整理后的数据，可以作出频数分布直方图与频率分布直方图，分别如图 5-1-11（1）（2）所示．值得注意的是，频数分布直方图的纵坐标是频数，每一组数对应的矩形高度与频数成正比；频率分布直方图的纵坐标是$\frac{频率}{组距}$，每一组数对应的矩形高度与频率成正比，而且每个矩形的面积等于这一组数对应的频率，从而可知频率分布直方图中，所有矩形的面积之和为 1.

图 5-1-11 中，还作出了频数分布折线图和频率分布折线图，作图的方法都是：把每个矩形上面一边的中点用线段连接起来．为了方便看图，折线图都画成与横轴相交，所以折线图与横轴的左右两个交点是没有实际意义的.

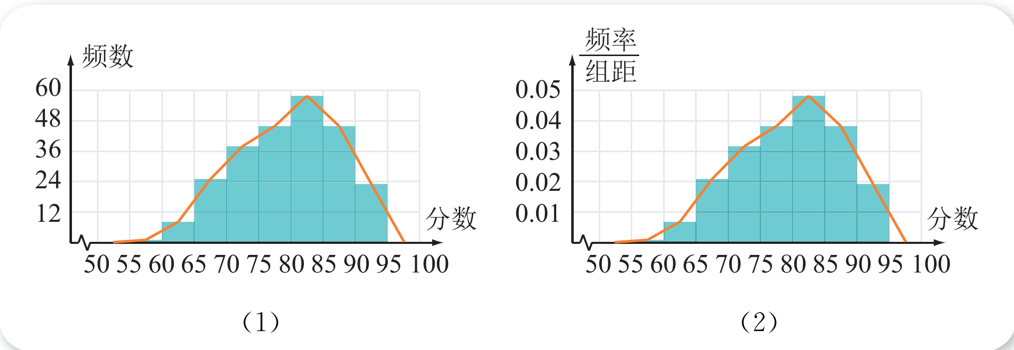


图 5-1-11

不难看出，虽然作频数分布直方图与频率分布直方图过程中，原有数据被“压缩”了，从这两种图中也得不到所有原始数据．但是，由这两种图可以清楚地看出数据分布的总体态势，而且也可以得出有关数字特征的大致情况．比如，估计出平均数、中位数、百分位数、方差．当然，利用直方图估计出的这些数字特征与利用原始数据求出的数字特征一般会有差异.

例 1 为了了解学生的课业负担，甲、乙两所学校分别抽取了 200 名在校生，了解他们完成作业所需的时间，并分别作出了频数分布直方图如图 5-1-12（1）（2）所示，其中分组的区间都为 $[0.5,\ 1)$，$[1,\ 1.5)$，$[1.5,\ 2)$，$[2,\ 2.5)$，$[2.5,\ 3]$. 记甲学校所得数据的中位数为 x，乙学校所得数据的中位数为 y，判断 x 与 y 的相对大小.

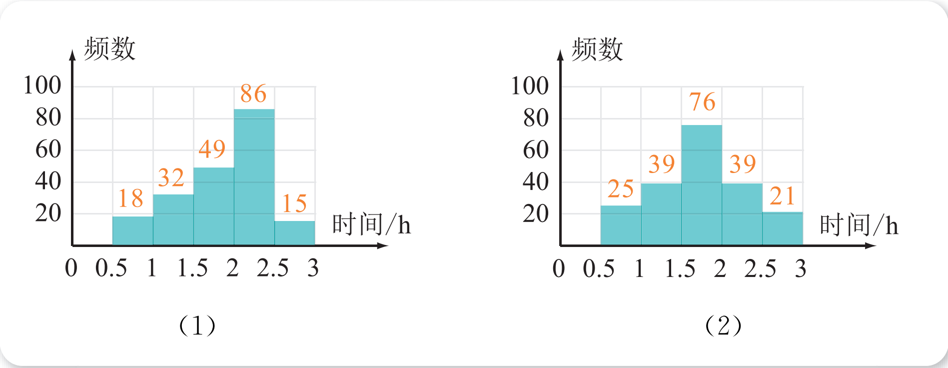


图 5-1-12

解 由 5-1-12（1）可以看出，$x\in[2,\ 2.5)$；由 5-1-12（2）可以看出，$y\in[1.5,\ 2)$. 因此

$$x>y.$$

例 2 某射击运动员一次射击训练的成绩可以整理成图 5-1-13 所示的统计图表，试计算这次成绩的平均数与方差.

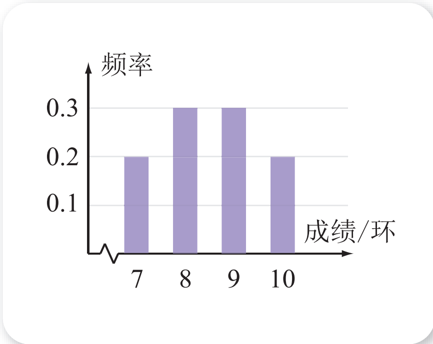


图 5-1-13

解 设运动员共射击了 n 次，则由图可知，射中 7 环与 10 环的次数均为 $0.2n$，射中 8 环与 9 环的次数均为 $0.3n$. 因此平均数为

$$\frac{0.2n\times7+0.3n\times8+0.3n\times9+0.2n\times10}{n}$$
$$=0.2\times7+0.3\times8+0.3\times9+0.2\times10$$
$$=8.5.$$

方差为

$$0.2\times(7-8.5)^2+0.3\times(8-8.5)^2+0.3\times(9-8.5)^2+0.2\times(10-8.5)^2$$
$$=1.05.$$

6. 用信息技术对数据进行整理和作统计图表

借助计算机软件，可以快捷地作出有关统计图表.

例如，本小节一开始的柱形图，在电子表格软件中输入有关数据后，就可以用有关作图命令画出来，而且可以方便地改变呈现形式，请读者自行尝试.

在 GeoGebra 软件中，利用表格区输入数据，然后利用“单变量分析”，可以得到数据的直方图等信息，而且各种参数都可以自行设定. 例如，前面提到的频数分布直方图与折线图可用 GeoGebra 作出，如图 5-1-14 所示.

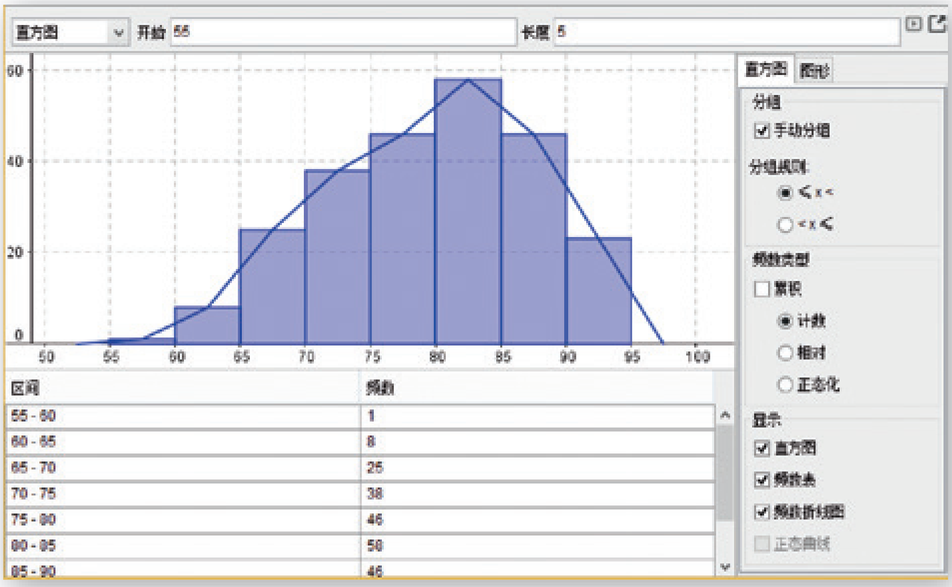


图 5-1-14

练习A

1. 2017 年 1 月，《中国青年报》社会调查中心联合问卷网，对多人进行了一项关于“二十四节气”的调查，请选择合适的图表分别表示以下调查结果：

(1) 全部都知道、大部分知道、少部分知道和完全不知道“二十四节气”日期的受访者分别占 12.6%、49.0%、34.6%和 3.8%；

(2) 调查显示，受访者最敏感的节气是立春（50.9%）、冬至（46.4%）和清明（43.9%）. 其他依次为：立冬（32.2%）、立秋（32.1%）、立夏（29.6%）、夏至（28.5%）、大暑（20.7%）、惊蛰（18.8%）、春分（18.7%）、雨水（18.7%）、大寒（16.4%）、大雪（15.3%）、秋分（14.8%）、小暑（14.0%）、芒种（12.2%）、小满（11.6%）、处暑（11.6%）、白露（11.3%）、霜降（10.7%）和小雪（10.5%）. 最不敏感的节气是谷雨（10.4%）、小寒（9.7%）和寒露（7.9%）.

人民教育出版社

❷ 某次“讲文明、树新风”答题竞赛中，20 名选手答对的题目数分别如下：30，26，23，21，18，27，28，26，23，30，26，28，27，24，21，19，27，28，26，29. 作出这组数的茎叶图.

❸ 设一组观测数据有 n 个不同的结果 x_1，x_2，…，x_n，每一个结果对应出现的频率分别为 p_1，p_2，…，p_n，试用求和符号写出这组观测数据的平均数与方差的计算公式（方差计算公式中，可以出现平均数符号 $\overline{x}$）.

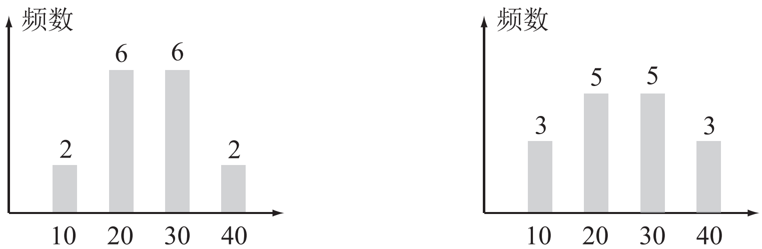
练习B

❶ 已知甲、乙两组数的茎叶图如下，分别计算这两组数的平均数.

甲		乙
	0	8
5 2	1	3 3 4 6
5 4	2	3 6 9
9 7 6 6 1 1	3	3 5 8 9
9 4	4	
0	5	1

（第 1 题）

❷ 已知甲、乙两组数可分别用图（1）（2）表示，分别比较这两组数的平均数的相对大小，以及方差的相对大小.



（1）　　（2）

（第 2 题）

❸ 从标准质量为 500 g 的一批洗衣粉中，随机抽查了 50 袋，测得的质量数据如下（单位：g）：

494	498	493	494	496	492	490	490	500	499
494	495	482	485	502	493	505	485	501	491
493	500	509	512	484	509	510	494	497	498
504	498	483	510	503	497	502	498	497	500
493	499	505	493	491	497	515	503	498	518

人民教育出版社

（1）找出这组数的最值，求出极差；

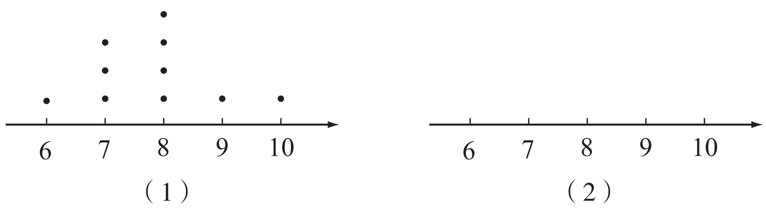
（2）以［480.5，487.5）为第一个分组的区间，作出这组数的频率分布直方图.

4 甲、乙两人某次飞镖游戏中的成绩如下：

甲：8，6，7，7，8，10，9，8，7，8；

乙：9，10，6，7，9，9，10，8，9，10.

其中甲的成绩可用如图（1）所示的打点图（或点状图）表示，每个成绩上面的点的个数表示这个成绩出现的次数. 在图（2）中作出乙的成绩的打点图，并由图写出关于甲、乙成绩比较的两个统计结论.



（第 4 题）

1 51　　**2** 8　　**3** 26　　**4** ［20，30）

5.1.4 用样本估计总体

1. 用样本的数字特征估计总体的数字特征

情境与问题

以下是某学校高一年级 98 位学生的身高（单位：cm）：

161	168	166	168	152	152	163	164	170	167	143	166	153	165
168	167	163	157	160	159	153	169	172	175	165	161	158	172
147	164	171	149	158	155	169	150	173	170	162	157	152	180
178	158	162	164	172	165	165	155	163	178	159	168	161	151
166	168	165	158	162	165	163	166	174	163	163	175	165	160
161	177	163	170	155	156	161	169	167	151	156	158	165	179
161	176	162	168	153	169	155	165	163	166	172	160	173	164

已知这组数的总体平均数为 163.5，总体方差为 56.3.

用简单随机抽样的方法从总体中抽取容量为 10 的样本 3 次，分别计算样本平均数与样本方差，并与总体对应的值进行比较.

一般情况下，如果样本的容量恰当，抽样方法又合理的话，样本的特征能够反映总体的特征. 特别地，样本平均数（也称为样本均值）、方差（也称为样本方差）与总体对应的值相差不会太大.

例如，上述数据中，如果用简单随机抽样抽得的序号分别为 90，35，63，68，66，9，30，56，50，49，则对应的样本为

169，169，163，175，163，170，164，151，155，165，

容易算出，样本均值为 164.4，样本方差为 45.84，它们与总体对应的值差别都不大.

这就说明，在容许一定误差存在的前提下，可以用样本的数字特征去估计总体的数字特征，这样就能节省人力和物力等.

另外，有时候总体的数字特征不可能获得，比如质监部门想知道市场上节能灯的平均使用寿命，不可能把所有节能灯都拿来检测，此时只能用样本的数字特征去估计总体的数字特征.

需要强调的是，估计一般是有误差的. 例如，如果总体平均数记为 μ，样本均值记为 $\bar{x}$，一般来说，$\mu>\bar{x}$，$\mu=\bar{x}$，$\mu<\bar{x}$ 都有可能. 但是，大数定律可以保证，当样本的容量越来越大时，估计的误差很小的可能性将越来越大.

一般来说，在估计总体的数字特征时，只需直接算出样本对应的数字特征即可.

下面我们来讨论一种稍微复杂一点的情况：假设样本是用分层抽样的方法得到的，而且我们知道了每一层样本的数字特征，该怎样估计总体的数字特征呢？

尝试与发现

在考察某中学的学生身高时，如果采用分层抽样的方法，得到了男生身高的平均数为 170，方差为 16；女生身高的平均数为 165，方差为 25.

（1）如果没有其他信息，怎样估计总体的平均数与方差？

（2）如果知道抽取的样本中，男生有 20 人，女生有 15 人，怎样估计总体的平均数与方差？

作为估计来说，我们当然可以选择男生（或女生）样本的平均数与方差

作为总体对应值的估计，但这样的选择没有充分利用已有的数据，显然不够好；另外一种估计的办法是取每一层样本数字特征的算术平均值作为总体的估计，即估计总体平均数为

$$\frac{170+165}{2}=167.5,$$

类似地，总体方差可估计为 1 ________.

但第二种估计方法也还不太理想，因为对于分层抽样来说，每一层所抽取的个体数目一般来说是不相等的，直接求数字特征的算术平均值体现不出这一点．怎样才能体现这一点呢？尤其是，当我们把各层中得到的个体放在一起作为一个样本时，样本均值与样本方差该如何计算呢？此时，当然可以把各层数据集中在一起来重新计算，也可以考虑利用整个样本的数字特征与每一层的数字特征之间的关系来计算，后者在大数据时代的并行计算中经常使用.

我们以分两层抽样的情况为例．假设第一层抽取 m 个数，分别为 x_1，x_2，…，x_m，平均数为 $\overline{x}$，方差为 s^2；第二层抽取 n 个数，分别为 y_1，y_2，…，y_n，平均数为 $\overline{y}$，方差为 t^2．则

$$\overline{x}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i,\quad s^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\overline{x})^2,$$

$$\overline{y}=\boxed{2}\ \underline{\qquad\qquad},\quad t^2=\boxed{3}\ \underline{\qquad\qquad}.$$

如果记样本均值为 $\overline{a}$，样本方差为 b^2，则可以算出

$$\overline{a}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i\right)=\frac{m\overline{x}+n\overline{y}}{m+n},$$

$$b^2=\frac{m[s^2+(\overline{x}-\overline{a})^2]+n[t^2+(\overline{y}-\overline{a})^2]}{m+n}$$

$$=\frac{1}{m+n}\left[(ms^2+nt^2)+\frac{mn}{m+n}(\overline{x}-\overline{y})^2\right].$$

依照上述公式可以算出，前述尝试与发现（2）中总体的平均数可以估计为 167.86，总体的方差可以估计为 25.98.

2. 用样本的分布来估计总体的分布

前面我们已经看到，总体的数字特征可以用样本的数字特征来估计，那么，总体的分布是否也可以用样本的分布来近似刻画呢？这是接下来要讨论的问题.

尝试与发现

通过对某中学 1 257 名高一学生期中考试的数学成绩（具体数据参见这一小节的附录）进行整理，可以得到如下数据，并由此可作出频率分布直方图和折线图，如图 5-1-15 所示.

分组	频数	频率
[40，50)	7	0.01
[50，60)	65	0.05
[60，70)	276	0.22
[70，80)	480	0.38
[80，90)	330	0.26
[90，100]	99	0.08

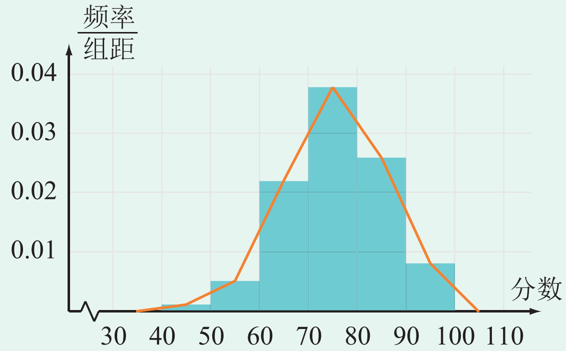


图 5-1-15

从附录的数据中抽取容量为 100 的样本，整理类似的表格，并制作频率分布直方图.

同前面一样，如果样本的容量恰当，抽样方法又合理的话，样本的分布与总体分布会差不多．特别地，每一组的频率与总体对应的频率相差不会太大.

例如，如果从上述尝试与发现中提到的数据中，抽取两个容量为 100 的样本（分别记为样本 A，样本 B，具体数据参见这一小节的附录），则可以得到如下频数、频率对应表，它们的频率分布直方图分别如图 5-1-16（1）（2）所示.

分组	总体		样本 A		样本 B	
	频数	频率	频数	频率	频数	频率
[40，50)	7	0.01	0	0	0	0
[50，60)	65	0.05	5	0.05	8	0.08
[60，70)	276	0.22	23	0.23	21	0.21
[70，80)	480	0.38	37	0.37	43	0.43
[80，90)	330	0.26	27	0.27	19	0.19
[90，100]	99	0.08	8	0.08	9	0.09

这就说明，同前面一样，如果容许有一定误差，则可以用样本的分布去估计总体的分布．而且，在总体的分布不可能获得时，只能用样本的分布去估计总体的分布.

同数字特征的估计一样，分布的估计一般也有误差．如果总体在每一个分组的频率记为 π_1，π_2，…，π_n，样本在每一组对应的频率记为 p_1，p_2，

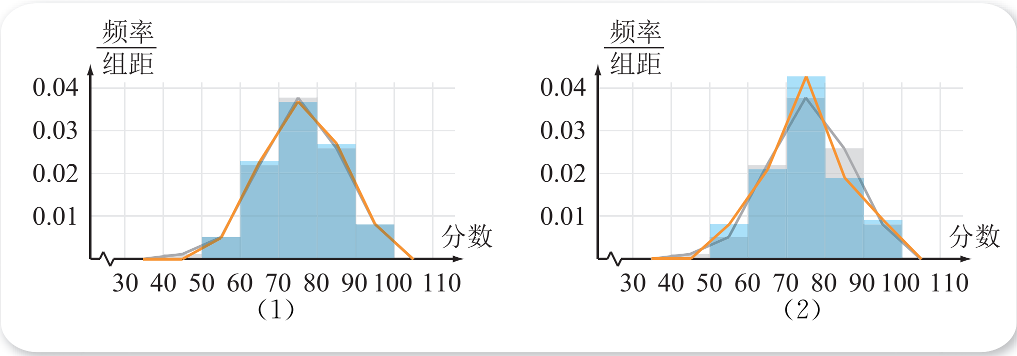


图 5-1-16

…，p_n，一般来说，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\pi_i-p_i)^2=\frac{1}{n}[(\pi_1-p_1)^2+(\pi_2-p_2)^2+\cdots+(\pi_n-p_n)^2]$$

不等于零．同样，大数定律可以保证，当样本的容量越来越大时，上式很小的可能性将越来越大．

例 1 为了快速了解某学校学生体重（单位：kg）的大致情况，随机抽取了 10 名学生称重，得到的数据整理成茎叶图如图 5-1-17 所示．估计这个学校学生体重的平均数和方差．

4	5	9	7	9	6	6
5	1	8	9			
6	0					

图 5-1-17

解 将样本中的每一个数都减去 50，可得

$$-5，-1，-3，-1，-4，-4，1，8，9，10，$$

这组数的平均数为

$$\frac{-5-1-3-1-4-4+1+8+9+10}{10}=1，$$

方差为

$$\frac{6^2+2^2+4^2+2^2+5^2+5^2+0^2+7^2+8^2+9^2}{10}=30.4.$$

因此可估计这个学校学生体重的平均数为 51，方差为 30.4.

例 2 我国是世界上严重缺水的国家之一，某市为了制定合理的节水方案，对家庭用水情况进行了调查，通过抽样，获得了某年 100 个家庭的月均用水量（单位：t），将数据按照 [0，1)，[1，2)，[2，3)，[3，4)，[4，5] 分成 5 组，制成了如图 5-1-18 所示的频率分布直方图．

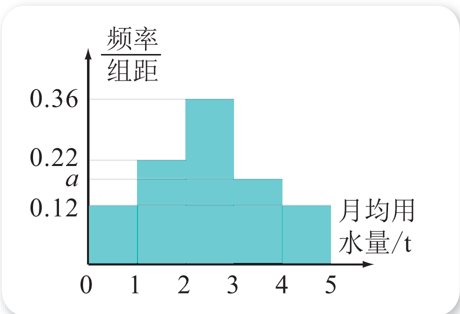


图 5-1-18

人民教育出版社

（1）求图中 a 的值；

（2）设该市有 10 万个家庭，估计全市月均用水量不低于 3 t 的家庭数；

（3）假设同组中的每个数据都用该组区间的中点值代替，估计全市家庭月均用水量的平均数.

解 （1）因为频率分布直方图所有矩形的面积之和为 1，所以

$$(0.12+0.22+0.36+a+0.12)\times 1=1,$$

解得 $a=0.18$.

（2）抽取的样本中，月均用水量不低于 3 t 的家庭所占比例为

$$(a+0.12)\times 1=0.3=30\%,$$

因此估计全市月均用水量不低于 3 t 的家庭所占比例也为 30%，所求家庭数为 $100\ 000\times 30\%=30\ 000$.

（3）因为

$$0.12\times 0.5+0.22\times 1.5+0.36\times 2.5+0.18\times 3.5+0.12\times 4.5=2.46,$$

所以估计全市家庭月均用水量的平均数为 2.46.

拓展阅读

用样本估计总体的失败案例

我们已经知道，用样本估计总体是有可能会犯错误的. 下面是美国总统选举中的两个估计失败的案例.

1936 年美国总统选举前，一家很有名的杂志社，通过电话簿和各种俱乐部信息等抽取了约 240 万人，调查他们的选举意向. 根据调查数据，这家杂志社给出了预测得票率，但选举结果与预测结果相差很大，如下表所示.

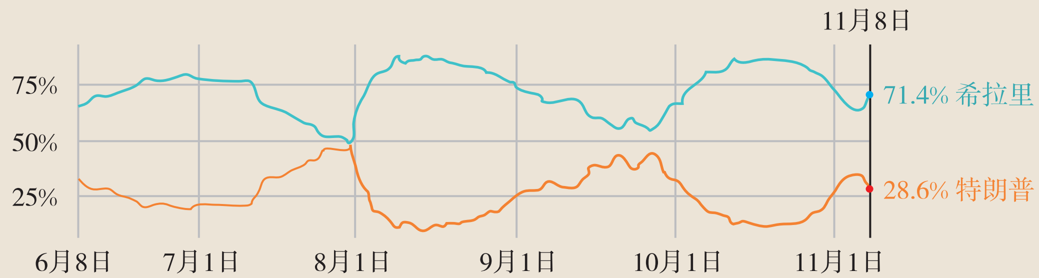
候选人	预测得票率	实际得票率
罗斯福	43%	62%
兰顿	57%	38%

事实上，在 1936 年的美国，一般只有富人才拥有电话、能参加俱乐部，因此这家杂志社所得到的样本不能反映总体的情况.

2016 年美国总统选举前，一个很擅长数据分析的网站，给出了基于民意调查的两位候选人获胜概率预测，如下图所示.

然而，这一次的选举最后以特朗普获胜告终. 实际上，这次选举绝大多数的预测都是错误的！原因都与样本的代表性有关.

失败案例的存在是不是意味着用样本估计总体不科学呢？不是！这只是说明，在用样本估计总体时，要保证抽样方案科学合理. 实际上，美国总统选举的绝大多数预测都是正确的，即使是上述两年所说的选举，也有调查机构根据民意调查正确地预测了结果.



3. “大数据”简介

随着数据收集以及数据存储技术的不断进步，现在人们能够以非常便捷的方式、非常低廉的成本、非常快的速度，收集规模非常宏大的数据集合. “大数据”时代已经悄然来临.

“大数据”的出现，让人们对“数据”本身有了许多新的认识. 除了传统的数值数据外，文本、图像、音频、视频等都可以被“数据化”. 网民的搜索行为和浏览记录、法律判决文书、病人的就诊病历和 CT 影像（即计算机层析成像）、聊天语音、视频监控录像等信息都可以被记录下来并且被“数据化”. 凡是可以被“数据化”的信息载体都可以看成数据. 信息载体包括的数据量达到一定的规模或者达到一定的复杂程度，都可以被认为是“大数据”.

“大数据”的出现，让人们认识到了数据本身的价值：根据网民的搜索行为和浏览记录所反映出来的个人偏好，可以用于精准推送合适的新闻或商品；分析法律判决文书的历史信息，有助于准确识别虚假诉讼、实现案件繁简分离、提高审判效率；将病人的就诊病历、CT 影像数据等与医生的诊断结果结合后，可以用于训练精确的统计模型，实现优质医疗资源共享；准确识别后的语音信息，可以非常快速、便捷地转换为操作指令，提高工作效率；视频监控录像可以为警察破案提供非常重要的线索……

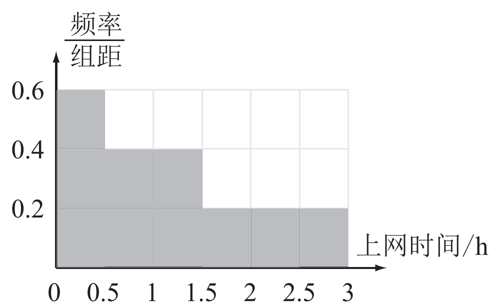
“大数据”的价值远远不止于此. 事实上，“大数据”作为信息资源，与土地、劳动力和资本等生产要素一样，正在成为促进经济增长和社会发展的基本要素. “大数据”已被普遍认为是非常重要的国家战略资源. 未来，作为重要生产要素和国家战略资源的“大数据”资源，将渗透至我们的日常生活、社会经济活动以及政府管理决策之中，进一步提高我们的生活质量，改进企业的生产效率，提升政府部门快速响应和合理决策的能力，等等.

练习A

1. 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1 534 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒内夹谷 28 粒. 估计这批米内所夹的谷有多少石.

2. 代课教师为了了解某班级学生的数学成绩，随机抽查了 5 位学生的成绩，得到的数据为 92，78，56，75，62. 试估计该班学生数学成绩的平均数与方差.

3. 某学校为了了解高中学生用手机上网的时间，随机抽查了若干位学生进行调查，收



（第 3 题）

集到的日平均上网时间（单位：h）都在区间［0，3］内，且频率分布直方图如图所示．分别估计这所学校学生中，日平均上网时间不到 1 h 和超过了 2 h 的学生所占的百分比．

练习B

❶ 为了考察某地 6 月份最高气温的情况，随机抽取了 5 天，所得数据（单位:℃）可以绘制成如图所示茎叶图．估计该地 6 月份最高气温的平均数与方差．

2	8	9	
3	0	1	1

（第 1 题）

❷ 为了了解上、下班时段的交通情况，某市抽取了 12 辆机动车行驶的速度，得到了如下数据（单位：km/h）．

上班时段：30　33　18　27　32　40　26　28　21　28　35　20

下班时段：27　19　32　29　36　29　30　22　25　16　17　30

用茎叶图表示这些数据，并分别估计出该市上、下班时段机动车行驶的平均速度．

❸ 某学校为了调查高一年级学生的体育锻炼情况，从甲、乙、丙 3 个班中，按分层抽样的方法获得了部分学生一周的锻炼时间（单位：h），数据如下．

甲	6	6.5	7	7.5	8			
乙	6	7	8	9	10	11	12	
丙	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	13.5

（1）求三个班中学生人数之比；

（2）估计这个学校高一年级学生中，一周的锻炼时间超过 10 h 的百分比；

（3）估计这个学校高一年级学生一周的平均锻炼时间．

❹ 在了解全校学生每年平均阅读了多少本文学经典名著时，甲同学抽取了一个容量为 10 的样本，并算得样本的平均数为 5，方差为 9；乙同学抽取了一个容量为 8 的样本，并算得样本的平均数为 6，方差为 16．已知甲、乙两同学抽取的样本合在一起组成一个容量为 18 的样本，求合在一起后的样本均值与样本方差．

❺ 记总体在每一个分组的频率为 π_1，π_2，…，π_n，样本在每一组对应的频率记为 p_1，p_2，…，p_n，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}(\pi_i-p_i)=0$．

1 $\dfrac{16+25}{2}=20.5$　　2 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$　　3 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$

附录

某中学 1 257 名高一学生期中考试的数学成绩

69	66	78	78	45	72	89	67	63	71	61	74	77	85	63	76	85
67	59	64	70	79	76	79	62	83	71	65	74	81	98	90	73	89
80	89	78	82	69	78	62	75	70	76	67	66	73	61	80	69	84
58	80	90	78	69	68	81	67	79	68	76	74	71	72	85	80	78
87	97	62	72	69	75	77	67	66	83	80	79	75	87	80	76	74
80	74	53	84	82	72	100	90	76	94	73	73	67	79	82	87	80
68	60	81	64	77	72	69	81	80	58	80	92	58	67	64	100	86
61	64	72	83	60	74	59	74	91	81	70	72	100	90	57	97	74
82	64	68	97	77	89	82	69	67	77	71	69	73	87	83	88	67
78	65	78	72	73	80	74	77	66	80	71	51	75	77	86	60	84
81	79	73	69	75	70	82	68	76	76	92	68	77	89	85	75	73
69	69	77	75	79	64	80	79	55	74	72	82	67	73	70	94	77
64	75	78	73	74	78	84	68	59	79	97	86	81	74	70	76	82
82	75	54	76	85	81	81	79	76	63	76	95	65	83	66	79	83
54	73	62	86	59	96	71	64	80	72	72	89	82	63	58	93	69
89	82	72	71	60	66	60	64	65	74	82	85	73	61	83	78	91
98	74	74	76	85	86	72	51	85	82	80	95	86	58	50	90	91
76	65	91	85	67	90	77	91	80	76	78	76	71	72	82	94	80
79	82	66	65	49	85	82	69	76	85	95	82	74	71	88	65	68
82	86	67	69	71	89	81	85	76	98	94	91	68	78	68	83	87
78	78	71	80	55	73	63	77	73	85	73	70	73	81	79	63	67
67	80	61	57	66	83	82	89	74	72	67	83	92	73	88	81	73
46	76	84	90	62	63	77	61	72	72	49	75	73	90	90	81	63
72	76	65	73	70	78	80	62	90	68	89	82	77	73	84	82	75
74	69	77	84	67	83	93	72	71	75	71	54	74	87	66	70	72
62	91	88	62	79	82	64	75	77	62	77	81	95	78	71	81	84
86	81	71	79	71	78	67	80	83	90	82	62	62	59	79	68	73
85	87	75	67	71	88	58	82	84	63	71	68	95	84	80	60	81
75	86	71	86	81	64	68	70	83	77	84	89	73	87	53	77	82
75	70	73	73	75	66	63	81	76	70	70	59	77	78	71	74	74
83	81	63	79	90	82	75	88	62	81	83	78	67	78	78	64	68
96	75	72	77	60	77	90	77	84	79	62	88	66	78	78	81	84
80	78	61	77	87	55	70	80	71	85	70	75	68	62	68	72	70
70	83	88	73	79	93	76	70	63	79	76	50	74	57	86	75	68
77	74	71	78	83	93	84	70	72	80	70	67	84	95	82	81	77
72	61	80	79	66	68	68	79	76	73	75	82	77	56	66	78	84
60	72	93	65	67	80	93	71	86	73	68	81	66	62	62	53	94
95	83	77	82	79	91	77	77	84	64	85	68	96	56	84	68	85

71	90	48	79	86	72	86	76	67	81	73	75	80	67	71	76	93
78	67	87	78	82	79	70	79	80	82	69	67	88	81	62	77	84
68	57	59	81	77	78	92	89	91	70	85	83	78	72	86	63	83
75	63	68	95	80	81	76	85	68	63	79	69	74	61	77	100	80
84	72	69	82	67	87	69	74	88	75	71	67	75	76	66	79	80
79	72	48	69	82	68	70	65	69	66	76	71	88	74	75	69	79
89	82	80	66	63	76	77	79	68	79	80	73	88	57	81	78	77
69	70	66	69	77	68	54	65	89	66	84	80	76	84	88	71	73
92	67	77	63	90	78	69	81	66	83	67	72	70	93	82	81	64
80	73	92	74	89	87	68	62	89	84	70	76	71	78	72	78	62
67	74	78	72	64	83	80	85	77	88	69	64	70	80	74	57	80
85	82	83	79	69	67	75	81	64	65	64	61	67	88	72	98	76
75	81	84	86	88	80	70	87	67	79	78	70	70	87	74	81	67
65	95	68	63	65	74	82	78	60	67	83	72	85	68	79	85	81
78	92	100	79	62	67	85	75	69	95	69	74	76	69	86	87	78
61	70	83	73	97	74	63	76	82	79	67	79	76	62	83	81	80
79	56	84	92	75	66	99	84	84	73	71	79	73	78	77	93	75
76	73	59	79	70	79	92	64	77	79	60	74	75	56	70	90	59
73	72	68	79	83	83	65	80	86	93	62	75	73	74	73	78	87
75	54	51	73	81	82	95	89	85	77	93	63	54	83	58	68	68
80	77	68	55	68	75	83	79	77	96	73	71	87	60	69	78	84
67	83	89	81	78	77	75	67	62	71	95	83	62	78	90	71	87
81	77	58	55	67	68	88	76	78	67	62	70	80	53	64	71	84
67	86	63	51	75	76	73	71	67	90	78	64	72	59	73	84	93
67	73	84	64	73	75	64	81	77	71	72	83	73	76	93	77	94
69	88	59	73	83	62	64	60	72	62	75	76	76	62	70	84	77
86	76	71	59	96	72	83	87	74	76	69	60	73	78	65	74	85
88	77	74	94	72	74	70	79	92	68	69	47	89	85	87	74	75
70	76	80	69	68	87	63	80	83	56	64	82	80	80	55	59	85
83	73	64	75	67	76	72	81	79	78	90	82	75	79	85	79	68
63	70	82	82	82	57	79	79	71	98	96	78	74	83	70	65	73
70	68	75	59	100	80	55	57	65	80	76	74	55	72	74	70	52
87	85	81	64	68	68	90	70	71	62	72	60	65	78	75	81	73
69	59	75	71	75	70	69	77	80	57	81	93	83	71	87	74	100
70	60	66	70	100	76	89	64	94	77	65	74	74	71	77	57	93
81	78	79	86	82	82	87	78	84	72	54	84	60	56	87	69	

样本 A 的 100 个数据

66	72	71	90	80	76	87	83	87	100	73	87	77	100	91	65	73
77	73	68	76	89	86	80	82	65	69	95	82	73	62	72	78	81
84	78	83	67	75	84	78	61	55	70	88	71	67	66	68	62	77

56	71	81	77	78	63	72	69	89	66	57	80	92	83	65	79	63
83	68	62	69	76	77	56	80	78	75	71	81	77	80	64	73	59
74	85	74	64	72	90	82	74	83	68	83	74	100	71	77		

样本 B 的 100 个数据

70	75	67	73	77	67	59	81	74	77	89	73	87	65	74	51	82
75	69	79	70	94	63	60	51	95	76	86	71	78	87	66	90	77
68	93	75	72	81	71	87	58	63	78	80	71	75	76	77	72	77
93	71	94	68	79	67	79	79	59	81	89	83	84	72	88	81	84
67	87	62	78	64	79	62	54	68	77	68	83	77	90	67	76	90
59	72	94	75	70	78	83	64	75	57	62	78	75	73	64		

习题5-1A

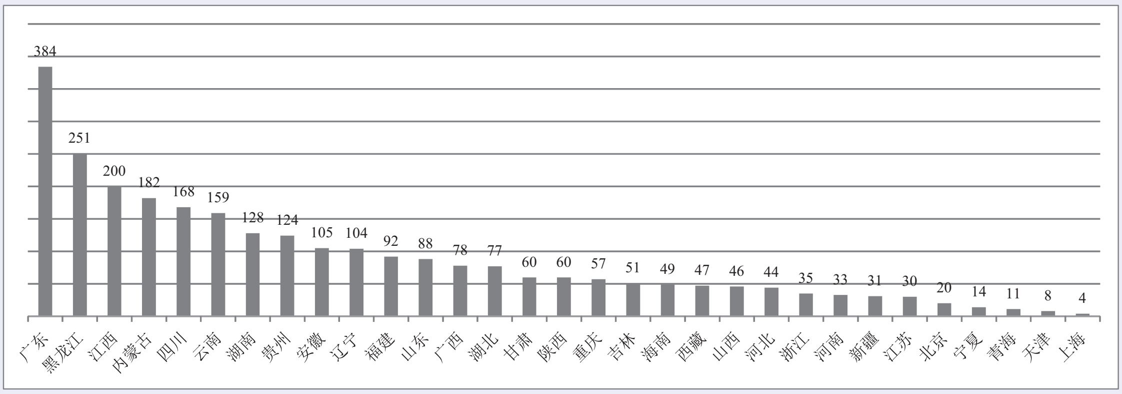
1. 已知总体是由编号为 01，02，…，19，20 的 20 个个体组成. 利用下面的随机数表选取 5 个个体，选取方法是从随机数表第 1 行的第 5 个数字开始，由左到右依次选取两个数字. 写出选取的 5 个个体编号.

7816 6572 0802 6314 0702 4369 9728 0198
3204 9234 4935 8200 3623 4869 6938 7481

2. 已知某地区有小学生 12 000 人，初中生 11 000 人，高中生 9 000 人，现在要了解该地区学生的近视情况，准备抽取 320 人进行调查，那么应该抽取小学生、初中生、高中生各多少人？

3. 《中国青年报》社会调查中心联合问卷网，对 2 000 名 18～35 岁青年进行的一项调查显示，在平时生活中，18.5%的受访青年经常会阅读或学习古典诗词，61.0%的受访青年偶尔会，17.9%的受访青年很少会，仅 2.6%的受访青年表示从不接触古典诗词. 选择合适的统计图表表示上述调查结果.

4. 截至 2015 年年底，我国部分省（自治区、直辖市）自然保护区的数量可用下图表示，写出图中所涉及的这组数的极差和中位数.



（第 4 题）

习题5-1B

1. 某单位共有 500 名职工，其中不到 35 岁的有 125 人，35～49 岁的有 a 人，50 岁及以上的有 b 人，现用分层抽样的方法，从中抽出 100 名职工了解他们的健康情况：

(1) 求不到 35 岁的职工要抽取的人数；

(2) 如果已知 35～49 岁的职工抽取了 56 人，求 a 的值，并求 50 岁及以上的职工要抽取的人数.

2. 已知 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 10，标准差为 3，且 $y_i = x_i + 2$，$i=1$，2，…，n. 求 y_1，y_2，…，y_n 的平均数与方差.

3. 某科技攻关青年团队共有 20 人，他们的年龄分布如下表所示.

年龄	28	29	30	32	36	40	45
人数	1	3	3	5	4	3	1

(1) 求这 20 人年龄的众数、极差、平均数、方差、25%分位数、75%分位数；

(2) 用茎叶图表示这 20 人的年龄.

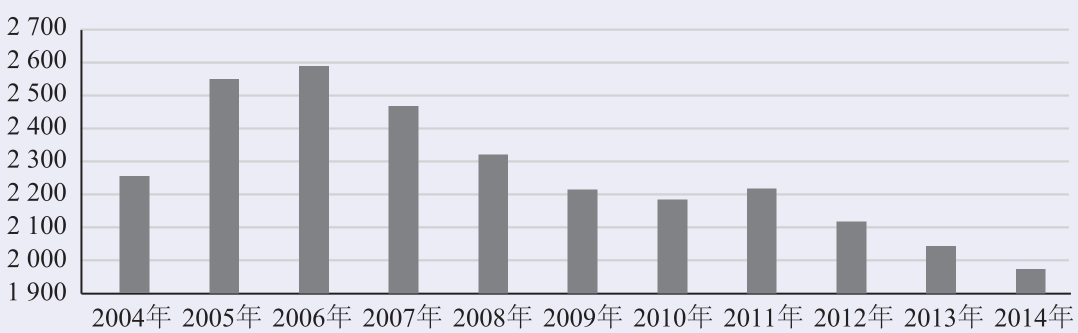
4. 2015 年，31 个省会城市中，区域声环境质量达到一级的城市为 1 个，达到二级的城市为 22 个，达到三级的城市为 8 个. 选择合适的统计图表表示这组数据.

5. 某学校调查了 20 个班中有网上购物经历的人数，得到了如图所示的茎叶图，以 [0，10)，[10，20)，[20，30)，[30，40] 为分组，作出这组数的频率分布直方图，并说明频率分布直方图与茎叶图之间的关系.

0	7 3
1	7 6 4 4 3 0
2	7 5 5 4 3 2 0
3	8 5 4 3 0

（第 5 题）

6. 下图是 2004—2014 年我国二氧化硫年排放量（单位：万吨）的柱形图，据此评价这些年来我国二氧化硫排放的治理效果.

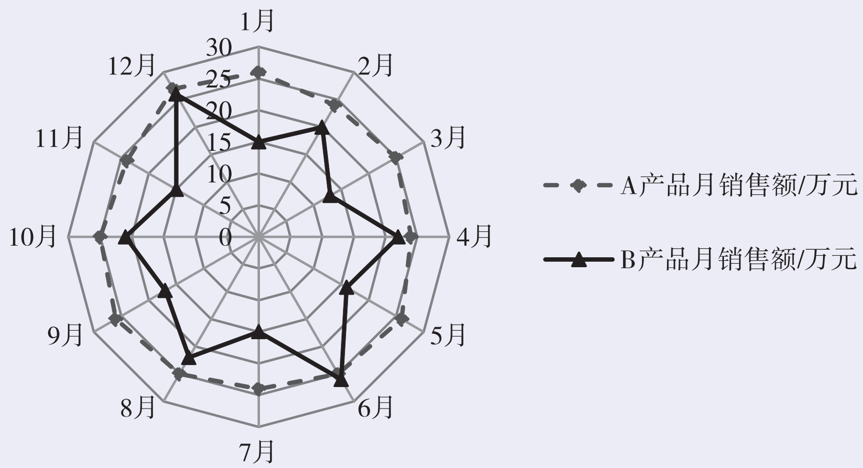


（第 6 题）

习题5-1C

1. 在发生某公共卫生事件期间，有专业机构认为该事件在一段时间内没有发生大规模群体感染的标志为“连续 10 日，每天新增疑似病例不超过 7 人”. 过去 10 日，甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据信息如下：
甲地：总体平均数为 3，中位数为 4；
乙地：总体平均数为 1，总体方差大于 0；
丙地：中位数为 2，众数为 3；
丁地：总体平均数为 2，总体方差为 3.
则甲、乙、丙、丁四地中，一定没有发生大规模群体感染的有哪些?

2. 如图所示是某商家根据去年 A，B 两种产品的月销售额（单位：万元）作出的统计图（称为雷达图），根据图中信息，写出关于 A，B 两种产品销售额比较的两个统计结论.



（第 2 题）

3. 已知
$$\sum_{i=1}^{10} x_i=20,\ \sum_{i=1}^{10} y_i=10,\ \sum_{i=1}^{10} x_i y_i=20,$$
求 $\sum_{i=1}^{10}(x_i-3)(y_i-2)$ 的值.

4. 在分层抽样时，如果总体分为 k 层，而且第 j 层抽取的样本量为 n_j，第 j 层的样本均值为 $\overline{x}_j$，样本方差为 s_j^2，$j=1$，2，…，k. 记 $n=\sum_{j=1}^{k} n_j$. 求证：所有数据的样本均值和方差分别为
$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(n_j\overline{x}_j),\ s^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}[n_j s_j^2+n_j(\overline{x}_j-\overline{x})^2].$$

5.2 数学探究活动：由编号样本估计总数及其模拟

1. 活动背景介绍与要求

日常生活中，为了方便管理，人们经常会对人或物进行连续编号（即编号为 001，002，003，…）. 例如，有些班级学生的学号最后两位是连续编号的，各种会员卡的卡号一般是连续编号的，一个团体（包括学校）在进行资产管理时，会给所涉及的资产一个编号，这个编号的最后几位一般来说也是连续编号的.

当对人或物进行连续编号后，知道编号的最大值就能方便地知道总数是多少. 例如，如果班级学生的学号最后两位是连续编号的，且最后两位最大的编号是 33，那就意味着这个班级有 33 名学生.

在很多情况下，得到最大的编号并不容易，但可以得到一些编号的样本. 此时，能不能根据编号样本的信息，利用有关统计的知识，估计出人或物的总数呢？

类似问题在实际生活中有时是有战略意义的. 例如，第二次世界大战期间，德军生产的坦克是连续编号的，盟军从战场上缴获了一些德军坦克，因此获得了一些坦克编号，盟军希望能根据这些样本数据估计出德军所生产的坦克数量. 后来统计学家们圆满地解决了这一问题，而且，如下表所示，当时统计学家们的估计比情报部门的估计误差小很多！

时间	统计估计/辆	情报估计/辆	实际/辆
1940 年 6 月	169	1 000	122
1941 年 6 月	244	1 550	271
1942 年 8 月	327	1 550	342

请与其他同学分工合作，寻找生活中有连续编号的实例，获取适当容量的编号样本，在此基础上讨论估计总数的多种办法，并用模拟的办法验证估计方法的准确度，将活动过程记录在下表中.

由编号样本估计总数活动记录表

活动开始时间：____________________

（1）成员与分工	
姓　名	分　工
（2）待估计总数的、有连续编号的实例	
（3）获取的编号样本	
（4）估计总数的方法以及计算过程	
（5）采用模拟的方法以及估计结果的验证	
（6）活动总结（包括活动感受等）	

活动结束时间：____________________

2. 活动提示

要完成的任务可以简述为：假设已有的编号样本从小到大依次为

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,$$

由这些样本怎样去估计总数 n.

最大值估计：n 的值一定不会小于编号中的最大值，所以可以用编号中的最大值作为 n 的一个估计，即

$$n \approx x_m.$$

平均数估计：考虑到样本的平均数与总体的平均数应该相差不大，因此可用样本平均数来给出 n 的一个估计．记

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m},$$

又因为 $\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$①，所以有 $\frac{n+1}{2}\approx\bar{x}$，从而可以用大于或等于 $2\bar{x}-1$ 的最小整数作为 n 的估计．

值得注意的是，这种方法得到的 n 的估计与 x_m 的相对大小是不确定的，因此有可能出现 $n<x_m$ 的情况．当然，此时我们可以用 x_m 作为 n 的估计值．

你能想出其他的估计方法吗？你能猜出第二次世界大战期间统计学家采用的方法吗？感兴趣的读者请自行查阅有关资料进行了解．

估计的模拟可以借助计算机来进行．

例如，首先在电子表格中设定一个总数 n，然后用随机数函数产生几个编号样本，最后算出估计值，观察误差．

如图 5-2-1 所示即为验证示意图．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	总数	290											
2												最大值估计	平均数估计
3	所得样本1	237	247	277	44	268	146	123	128	121		277	353
4	所得样本2	123	250	199	20	19	267	1				267	251
5	所得样本3	64	87	58	254	212	95					254	256

图 5-2-1

图 5-2-1 中，B3：J5 有数据的单元格，输入的都是

“＝RANDBETWEEN(1，B1)”，

L3 中输入的是

“＝MAX(B3:J3)”，

M3 中输入的是

“＝ROUNDUP(2＊AVERAGE(B3:J3)－1，0)”．

① 这个式子可以通过归纳的方法得出．

5.3 概率

5.3.1 样本空间与事件

尝试与发现

如果要你将以下日常生活中的现象进行分类，你会依据什么来分？分类的结果是怎样的？

（1）练习投篮 5 次，命中 3 次；

（2）早晨太阳从东边升起；

（3）一个小时内接到 10 个电话；

（4）将一石块抛向空中，石块掉落下来；

（5）走到一个红绿灯路口时，前方正好是绿灯；

（6）实心铁球丢进水里，铁球会沉到水底；

（7）买一张福利彩票，没中奖.

我们日常生活中的现象，根据结果是否可以准确预测，可以分为两类，即随机现象和必然现象. 一定条件下，发生的结果事先不能确定的现象就是**随机现象**（或**偶然现象**），发生的结果事先能够确定的现象就是**必然现象**（或**确定性现象**）. 也就是说，对于随机现象而言，如果在同一条件下进行多次观察，每次观察的结果不一定相同，事先很难确定哪种结果会出现.

上述尝试与发现中，是随机现象的序号为 1 ____________________.

1. 样本点和样本空间

为了方便起见，我们把在相同条件下，对随机现象所进行的观察或实验称为随机试验（简称为试验）. 例如，抛一枚硬币、掷一个均匀的骰子等，都可以看成随机试验.

值得注意的是，虽然每次随机试验的结果是不能确定的，但在多次重复的试验中，其试验结果会呈现出一定的规律性．例如，我们已经知道，抛一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面，在一次试验中，结果不能准确预测，但是如果重复多次，就有正面出现次数与反面出现次数大致相当的规律性．

我们把随机试验中每一种可能出现的结果，都称为**样本点**，把由所有样本点组成的集合称为**样本空间**（通常用大写希腊字母 Ω 表示）．

例如，抛一枚硬币，如果样本点记为“出现正面”“出现反面”，则样本空间为

$$\Omega=\{\text{出现正面，出现反面}\};$$

再例如，掷一个骰子，如果样本点用朝上的面的点数表示，则其样本空间为

$$\Omega= \boxed{2}\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

例 1 先后抛出两枚硬币，观察正反面出现的情况，选择合适的方法表示样本点，并写出样本空间．

解 考虑到有先后顺序，可以用 $\boxed{3}$ ________________ 表示第 1 枚硬币出现正面，第 2 枚硬币出现反面，其他样本点用类似的方法表示，则样本空间为

$$\Omega= \boxed{4}\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

2. 随机事件

如果随机试验的样本空间为 Ω，则**随机事件** A 是 Ω 的一个非空真子集．而且：若试验的结果是 A 中的元素，则称 A 发生（或出现等）；否则，称 A 不发生（或不出现等）．随机事件也可用自然语言描述．

例如，掷一个骰子，观察朝上的面的点数，则样本空间

$$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

此时：若 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$，则 A 就是一个随机事件，而且 A 可以用自然语言描述为“出现的点数为奇数”；若 B 表示随机事件“出现的点数为偶数”，则

$$B= \boxed{5}\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

如果掷骰子得到的点数为 3，则可知上述随机事件 A 发生且随机事件 B 不发生．

显然，任何一个随机事件既有可能发生，也有可能不发生．

另外，任何一次随机试验的结果，一定是样本空间 Ω 中的元素，因此

人民教育出版社

可以认为每次试验中 Ω 一定发生，从而称 Ω 为**必然事件**；又因为空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，所以可以认为每次试验中 $\varnothing$ 一定不发生，从而称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

一般地，不可能事件、随机事件、必然事件都可简称为**事件**，通常用大写英文字母 A，B，C，…来表示事件. 因为事件一定是样本空间的子集，所以可以用表示集合的维恩图来直观地表示事件，如图 5-3-1 所示. 特别地，只含有一个样本点的事件称为**基本事件**.

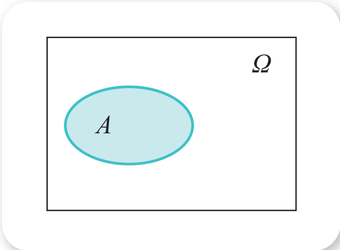


图 5-3-1

事件既可以用集合表示，也可以用自然语言描述，在今后的学习中，要特别注意两者之间的相互转化. 仍以上述掷一个骰子的试验为例，若记

A：出现的点数小于 7，B：出现的点数等于 9，

则不难看出 $A=\Omega$，是必然事件；$B=\varnothing$，是不可能事件.

例 2 张华练习投篮 10 次，观察张华投篮命中的次数，写出对应的样本空间，并用集合表示出事件 A：投篮命中的次数不少于 7 次.

解 样本空间为

$$\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

所要表示的事件为

$A=$ 6 ____________________.

例 3 从含有 3 件次品的 100 件产品中任取 5 件，观察其中次品数，写出对应的样本空间，并说明事件 $A=\{0\}$ 的实际意义.

解 样本空间为

$\Omega=$ 7 ____________________.

事件 $A=\{0\}$ 表示的实际意义是：抽取的 5 件产品中，没有次品.

3. 随机事件发生的概率

在小学和初中我们就已经知道，事件发生的可能性大小可以用该事件发生的概率（也简称为事件的概率）来衡量，概率越大，代表越有可能发生. 事件 A 发生的概率通常用 $P(A)$ 表示.

我们将不可能事件 $\varnothing$ 发生的概率规定为 0，将必然事件 Ω 发生的概率规定为 1，即

$$P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=1.$$

尝试与发现

在这样规定的前提下，你认为任意事件发生的概率应该满足什么条件？说明理由.

对于任意事件 A 来说，显然应该有 $P(\varnothing) \leqslant P(A) \leqslant P(\Omega)$，因此 $P(A)$ 应该满足不等式

8 ______________.

日常生活与应用中，概率值也经常用百分数表示，例如“明天下雨的概率为 70%”等.

拓展阅读

“黄金 72 小时”中的概率

当地震等地质灾害发生后，在媒体上经常可以看到“黄金 72 小时”这几个字．你知道它表示的是什么意思吗？

医学研究和统计表明，在没有食物尤其是没有水的条件下，生命的存续期一般不会超过 3 天．国际救援界认为，在地震等地质灾害发生后的 72 小时内，被救出人员的存活率随时间的消逝呈递减趋势：第一天（即 24 小时内），存活率约为 90%；第二天，存活率为 50%～60%；第三天，存活率为 20%～30%．再往后的话，存活率将进一步减少.

这里的存活率可以用概率来理解：被救出的人员，如果是在 24 小时内被发现的，那么该人员生还的概率约为 90%；如果是在第 24～48 小时内被发现的，那么生还的概率为 50%～60%；如果是第 48～72 小时内发现的，那么生还的概率为 20%～30%．这就意味着，当地震等地质灾害发生后，应该“与时间赛跑”，利用各种手段和机会尽可能早地发现被困人员.

需要注意的是，概率描述的只是事件发生的可能性大小，发生的可能性小（即概率小）并不代表不会发生．统计数据表明，地震六天后，被埋人员生还的概率几乎为零．但是这样的事例并不是没有：2005 年巴基斯坦 7.6 级地震中，一名青年被埋 27 天后获救生还；2008 年我国汶川地震中，一位 60 岁的老人被困 11 天后获救生还；等等．因此，几乎所有的救援工作，在“黄金 72 小时”之外都会继续，以便发现更多生命的奇迹.

例 4 先后两次掷一个均匀的骰子，观察朝上的面的点数.

（1）写出对应的样本空间；

（2）用集合表示事件 A：点数之和为 3，事件 B：点数之和不超过 3；

（3）从直观上判断 $P(A)$ 和 $P(B)$ 的大小（指出 $P(A) \geqslant P(B)$ 或 $P(A) \leqslant P(B)$ 即可）.

解 （1）用（1，2）表示第一次掷出 1 点，第二次掷出 2 点，其他的样本点用类似的方法表示，则可知所有样本点均可表示成（i，j）的形

式，其中 i，j 都是 1，2，3，4，5，6 中的数.

因此，样本空间

$$\Omega=\{(i,\ j)\mid 1\leqslant i\leqslant 6,\ 1\leqslant j\leqslant 6,\ i\in\mathbf{N},\ j\in\mathbf{N}\}①.$$

(2) 不难看出

$$A=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\},$$
$$B=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)\}.$$

(3) 因为 A 事件发生时，B 事件一定发生，也就是说 B 事件发生的可能性不会比 A 事件发生的可能性小，所以直观上可知 $P(A)\leqslant P(B)$.

练习A

1. 选择合适的表示方法，写出下列试验的样本空间：
   (1) 种下一粒种子，观察是否发芽；
   (2) 甲、乙两队进行一场足球比赛，观察比赛结果（可以是平局）.
2. 掷一个骰子，观察朝上的面的点数，写出下列事件的集合表示：
   (1) A：出现奇数点；　　(2) B：点数大于 3.
3. 从含有 5 件次品的 100 件产品中任取 3 件，观察其中的次品数.
   (1) 选择合适的表示方法，写出样本空间；
   (2) 写出事件 A：“取到的 3 件产品中没有次品”的集合表示；
   (3) 说明事件 $B=\{0,\ 1\}$所表示的实际意义.
4. 某同学得出随机事件 A 发生的概率为 $P(A)=1.2$，这可能吗？为什么？

练习B

1. 从 0，1，2 这 3 个数字中，不放回地取两次，每次取一个，构成有序数对 $(x,\ y)$，其中 x 为第 1 次取到的数字，y 为第 2 次取到的数字.
   (1) 写出样本空间；
   (2) 写出“第 1 次取出的数字是 2”这一事件的集合表示.
2. 按先后顺序抛三枚硬币，观察正反面出现的情况，选择合适的方法表示样本点，并写出样本空间.
3. 先后两次掷一个均匀的骰子，观察朝上的面的点数，用集合表示事件 A：点数之和为 6，B：点数之和不超过 6，并从直观上判断 $P(A)$和 $P(B)$的大小（指出 $P(A)\geqslant P(B)$或 $P(A)\leqslant P(B)$即可）.
4. 如果随机试验的样本空间是 Ω，且 A 是一个必然事件，B 是一个不可能事件.
   (1) 写出 A 与 Ω 的关系；　　(2) 写出 B 与$\varnothing$的关系.

---

① 这一结果也经常简写为 $\Omega=\{(i,\ j)\mid i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

⑤ 观察一个日光灯的寿命：

（1）用适当的符号表示这个试验的样本空间，并写出其中含有的样本点个数；

（2）用集合表示事件 A：寿命大于 5 000 h，B：寿命小于 1 000 h.

1 （1）（3）（5）（7）　　2 {1，2，3，4，5，6}　　3 （Z，F）

4 {（Z，Z），（Z，F），（F，Z），（F，F）}①　　5 {2，4，6}

6 {7，8，9，10}　　7 {0，1，2，3}　　8 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

5.3.2 事件之间的关系与运算

情境与问题

某班数学建模课分成 5 个小组（编号为 1，2，3，4，5）采用合作学习的方式进行，课堂上教师会随机选择一个小组的成果进行展示.

不难看出，这一试验的样本空间可记为

$$\Omega = \boxed{1}\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

记事件

$$E=\{1\},\ F=\{1,2\},\ G=\{1,3\},\ H=\{1,2,3\},\ I=\{4,5\},$$

说出每一事件的实际意义，并尝试理解上述各事件之间的关系.

前面我们在事件与集合之间建立了对应关系，从而可用集合的一些术语、符号去描述事件之间的关系与运算.

1. 事件的包含与相等

前述情境与问题中，如果事件 E 发生，那么事件 F 一定发生. 即如果教师选择了第 1 组，那么“选择了第 1 组或者第 2 组”也就一定发生了.

一般地，如果事件 A 发生时，事件 B 一定发生，则称“A 包含于 B”（或“B 包含 A”），记作 $A \subseteq B$（或 $B \supseteq A$），这一关系可用图 5-3-2 表示.

---

① 3 4 的填法不唯一，比如也可填：3 正反；4 {正正，正反，反正，反反}.

$A \subseteq B$ 也可用充分必要的语言表述为：A 发生是 B 发生的 2 ________，B 发生是 A 发生的 3 ________.

如果 $A \subseteq B$，根据定义可知，事件 A 发生的可能性不比事件 B 发生的可能性大，直观上我们就能得到

$$P(A) \leqslant P(B).$$

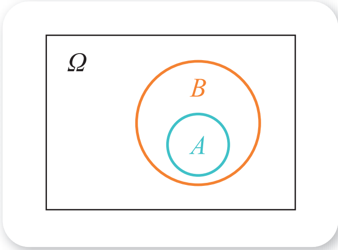


图 5-3-2

此外，如果事件 A 发生时，事件 B 一定发生；而且事件 B 发生时，事件 A 也一定发生，则称"A 与 B 相等"，记作 $A=B$.

不难看出

$$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A.$$

$A=B$ 也可用充分必要的语言表述为：A 发生是 B 发生的 4 ________.

显然，当 $A=B$ 时，应该有

$$P(A)=P(B).$$

2. 事件的和（并）

给定事件 A，B，由所有 A 中的样本点与 B 中的样本点组成的事件称为 A 与 B 的**和**（或**并**），记作

$$A+B \text{（或 } A \cup B\text{）}.$$

事件 A 与 B 的和可以用如图 5-3-3 所示的阴影部分表示.

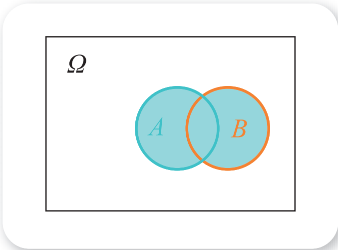


图 5-3-3

按照定义可知，事件 $A+B$ 发生时，当且仅当事件 A 与事件 B 中至少有一个发生.

前述情境与问题中，$H=F+G$.

另外，不难看出，$A \subseteq (A+B)$ 且 $B \subseteq (A+B)$，因此

$$P(A) \leqslant P(A+B) \text{ 且 } P(B) \leqslant P(A+B),$$

而且，直观上可知 $P(A+B)$ 与 $P(A)+P(B)$ 的大小关系为

5 ________________.

3. 事件的积（交）

给定事件 A，B，由 A 与 B 中的公共样本点组成的事件称为 A 与 B 的

积（或交），记作

$$AB\text{（或 }A\cap B\text{）}.$$

事件 A 与 B 的积可以用如图 5-3-4 所示的阴影部分表示.

按照定义可知，事件 AB 发生时，当且仅当事件 A 与事件 B 都发生.

前述情境与问题中，$E=FG$.

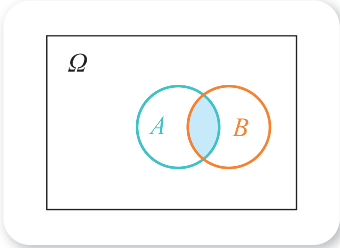


图 5-3-4

尝试与发现

类比前面的情况，得出 $P(AB)$ 与 $P(A)$ 的大小关系，以及 $P(AB)$ 与 $P(B)$ 的大小关系：

$$P(AB)\ \boxed{6}\_\_\_\_\_\_\ P(A),\quad P(AB)\ \boxed{7}\_\_\_\_\_\_\ P(B).$$

事件的和、积可以类似地推广到有限多个的情形，这里不再赘述.

4. 事件的互斥与对立

给定事件 A，B，若事件 A 与 B 不能同时发生，则称 A 与 B 互斥，记作

$$AB=\varnothing\text{（或 }A\cap B=\varnothing\text{）},$$

这一关系可用图 5-3-5 表示.

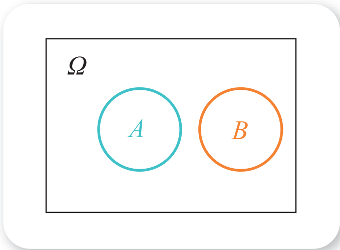


图 5-3-5

不难看出：任意两个基本事件都是互斥的，$\varnothing$与任意事件互斥.

直观上可以看出，当 A 与 B 互斥（即 $AB=\varnothing$）时，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B),$$

这称为互斥事件的概率加法公式.

一般地，如果 A_1，A_2，…，A_n 是两两互斥的事件，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

前述情境与问题中，互斥的事件有 $\boxed{8}$________________.

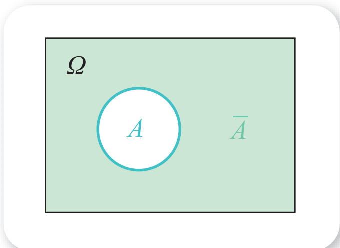


图 5-3-6

给定样本空间 Ω 与事件 A，则由 Ω 中所有不属于 A 的样本点组成的事件称为 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$，用集合的观点来看，$\overline{A}$ 是 A 在 Ω 中的补集，如图 5-3-6 所示. 如果 $B=\overline{A}$，则称

A 与 B 相互对立.

按照定义可知，每次随机试验，在事件 A 与 $\overline{A}$ 中，有一个发生，而且只有一个发生. 注意到必然事件的概率为 1，因此

$$P(A)+P(\overline{A})=\boxed{9}\underline{\qquad\qquad}.$$

前述情境与问题中，相互对立的事件是 $\boxed{10}$________________.

尝试与发现

不难看出，互斥与相互对立是有区别的，试用自己的语言总结出它们之间的关系，并举例说明.

事实上，如果 A 与 B 相互对立，则 A 与 B 互斥，但反之不成立，即"A 与 B 相互对立"是"A 与 B 互斥"的充分不必要条件.

5. 事件的混合运算

前面实际上我们给出了事件的三种运算：求两个事件的和，求两个事件的积，求一个事件的对立事件. 因为事件运算的结果仍是事件，所以可以进行事件的混合运算，例如

$$(A\overline{B})+(\overline{A}B),$$

这表示的是 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 的和，实际意义是：A 发生且 B 不发生，或者 A 不发生且 B 发生，换句话说就是 A 与 B 中恰有一个发生.

同数的加、减、乘、除混合运算一样，事件的混合运算也有优先级，我们规定：求积运算的优先级高于求和运算，因此 $(A\overline{B})+(\overline{A}B)$ 可简写为

$$A\overline{B}+\overline{A}B.$$

例 1 设 A，B 为两个事件，试用 A，B 表示下列各事件：

（1）A，B 两个事件中至少有一个发生；

（2）A 事件发生且 B 事件不发生；

（3）A，B 两个事件都不发生.

解 （1）按照定义有 $A+B$.

（2）因为 B 不发生可以表示为 $\overline{B}$，所以可以写成 $A\overline{B}$.

（3）按照定义有 $\overline{A}\overline{B}$.

例 2 已知数学考试中，李明成绩高于 90 分的概率为 0.3，不低于 60 分且不高于 90 分的概率为 0.5，求：

（1）李明成绩不低于 60 分的概率；

（2）李明成绩低于 60 分的概率.

解 记事件 A：李明成绩高于 90 分，B：李明成绩不低于 60 分且不高于 90 分，则不难看出 A 与 B 互斥，且

$$P(A)=0.3,\ P(B)=0.5.$$

（1）因为“李明成绩不低于 60 分”可表示为 $A+B$，由 A 与 B 互斥可知

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.3+0.5=0.8.$$

（2）因为“李明成绩低于 60 分”可表示为 $\overline{A+B}$，所以

$$P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-0.8=0.2.$$

探索与研究

任意给定两个事件 A，B，考虑

$$P(A+B),\ P(A),\ P(B),\ P(AB)$$

之间的等量关系，得出一般的关系式.

练习A

1. 甲、乙两人各投一次篮，分别记事件 A：甲投中，B：乙投中，试用 A，B 表示下列事件：

   （1）甲投中但乙没投中；

   （2）甲和乙都没投中.

2. 已知事件 A 与 B 互斥，且 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.1$，求 $P(A+B)$.

3. 已知某次比赛中，学校足球队赢的概率为 0.7，打平的概率为 0.2，求学校足球队不输的概率.

练习B

1. 设 A，B 为两个事件，试用 A，B 表示下列各事件：

   （1）A，B 两个事件中至多有一个发生；

   （2）A，B 两个事件中至少有一个发生.

2. 先后掷一个骰子两次，观察出现的面的点数，记事件 A：点数之和等于 5，事件 B：最大点数为 4，试用集合表示事件 A，B，$A+B$，AB.

3. 已知三个事件 A，B，C 两两互斥，且 $P(A)=0.3$，$P(\overline{B})=0.6$，$P(C)=0.2$，求 $P(A+B+C)$.

4. 已知事件 A 与 B 互斥，判断 $\overline{A}$ 与 B 的关系，以及 A 与 $\overline{B}$ 的关系.

5. 设 A，B，C 为三个事件，说明下列各式所表示的意义：

   （1）$\overline{A}BC$；　（2）$\overline{A+B+C}$；　（3）$A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$.

1 {1，2，3，4，5}　2 充分条件　3 必要条件　4 充要条件
5 $P(A+B)\leqslant P(A)+P(B)$　6 $\leqslant$　7 $\leqslant$
8 E 与 I，F 与 I，G 与 I，H 与 I　9 1　10 H 与 I

5.3.3 古典概型

前面我们已经了解了随机试验的样本空间、事件等概念，并且知道了描述事件发生的可能性大小——概率的一些性质，还学习了事件之间的关系以及对应的概率关系等.

但是，到目前为止，除了必然事件和不可能事件外，对于其他事件，我们还没有讨论该怎样确定其发生的概率，这就是本小节和下一小节要学习的内容.

尝试与发现

（1）抛一枚均匀的硬币，观察落地后哪一面朝上. 这个试验的样本空间可以记为

$$\Omega_1=\{正面向上，反面向上\}.$$

记事件 A：正面向上，你认为 $P(A)$ 应该是多少？理由是什么？

（2）掷一个均匀的骰子，观察朝上的面的点数. 这个试验的样本空间可记为

$$\Omega_2=\{1，2，3，4，5，6\}.$$

记事件 B：出现的点数不超过 4，你认为 $P(B)$ 应该是多少？理由是什么？

由以上两个实例，你能总结出一般规律吗？

尝试与发现中的抛硬币试验，因为样本空间含有 2 个样本点，而且因为硬币是均匀的，所以可以认为每个样本点出现的可能性相等，又因为事件 A 包含 1 个样本点，所以

$$P(A)=\frac{1}{2};$$

类似地，掷均匀骰子的试验中，因为样本空间共有 6 个样本点，而且因为骰子是均匀的，所以可以认为每个样本点出现的可能性相等，又因为事件 B 包含 1 ______ 个样本点，所以

$$P(B)=\text{2 ______}.$$

一般地，如果随机试验的样本空间所包含的样本点个数是有限的（简称为有限性），而且可以认为每个只包含一个样本点的事件（即基本事件）发

生的可能性大小都相等（简称为等可能性），则称这样的随机试验为**古典概率模型**，简称为**古典概型**.

古典概型中，事件发生的概率可以通过下述方式得到：假设样本空间含有 n 个样本点，由古典概型的定义可知，每个基本事件发生的可能性大小都相等，又因为必然事件发生的概率为 3 ________，所以由互斥事件的概率加法公式可知每个基本事件发生的概率均为 $\frac{1}{n}$. 此时，如果事件 C 包含 m 个样本点，则再由互斥事件的概率加法公式可知

$$P(C)=\frac{m}{n}.$$

不难看出，古典概型是一种理想化的概率模型. 历史上，利用古典概型确定事件发生的概率的方法在 17 世纪与 18 世纪得到了长足的发展，而且它现在也是一种非常重要的确定事件发生的概率的方法.

一个随机试验是否能归结为古典概型，在于这个试验是否具有古典概型的两个特征——有限性与等可能性. 因此，并不是所有的随机试验都能归结为古典概型. 例如，抛一个瓶盖，观察落地后的状态（如图 5-3-7 所示），就不能归结为古典概型；在一定的条件下，种下一粒种子，观察种子是否发芽，一般也不能归结为古典概型.

（1）　（2）　（3）

图 5-3-7

例 1 某中学举行高一广播体操比赛，共 10 个队参赛，为了确定出场顺序，学校制作了 10 个出场序号签供大家抽签，高一(1)班先抽，求他们抽到的出场序号小于 4 的概率.

解 考虑高一(1)班从 10 个出场序号签中随机抽一个签的试验，其样本空间可记为

$$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\},$$

共包含 10 个样本点.

记 A：抽到的出场序号小于 4，则不难看出

$$A=\{1,\ 2,\ 3\},$$

A 包含的样本点个数为 3，所以 $P(A)=\frac{3}{10}$.

人民教育出版社

例 2 按先后顺序抛两枚均匀的硬币，观察正反面出现的情况，求至少出现一个正面的概率.

解 这个试验的样本空间可记为

$$\Omega=\{(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)\},$$

共包含 4 个样本点.

记 A：至少出现一个正面，则

$$A=\{(正，正)，(正，反)，(反，正)\},$$

A 包含的样本点个数为 3，所以 $P(A)=\dfrac{3}{4}$.

注意，古典概型中的概率也具有前面我们所说的概率的性质. 假设古典概型对应的样本空间含 n 个样本点，事件 A 包含 m 个样本点，则：

（1）由 $0\leqslant m\leqslant n$ 与 $P(A)=\dfrac{m}{n}$ 可知

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1;$$

（2）因为 $\overline{A}$ 中包含的样本点个数为 $n-m$，所以

$$P(\overline{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A),$$

即 $P(A)+P(\overline{A})=1$；

（3）若事件 B 包含 k 个样本点，而且 A 与 B 互斥，则容易知道 $A+B$ 包含 $m+k$ 个样本点，从而

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B).$$

因此，例 2 也可用如下方法来解：因为 $\overline{A}=\{(反，反)\}$，所以 $P(\overline{A})=\dfrac{1}{4}$，从而

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

例 3 从含有两件正品 a_1，a_2 和一件次品 b 的 3 件产品中，按先后顺序任意取出两件产品，每次取出后不放回，求取出的两件产品中恰有一件次品的概率.

解 按照题意，取产品的过程可以用图 5-3-8 所示的树形图直观表示.

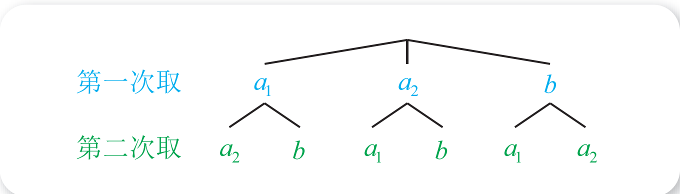


图 5-3-8

因此样本空间可记为

$$\Omega=\{(a_1,\ a_2),\ (a_1,\ b),\ (a_2,\ a_1),\ (a_2,\ b),\ (b,\ a_1),\ (b,\ a_2)\},$$

共包含 6 个样本点.

用 A 表示“取出的两件中，恰好有一件次品”，则

$$A=\{(a_1,\ b),\ (a_2,\ b),\ (b,\ a_1),\ (b,\ a_2)\},$$

A 包含的样本点个数为 4，所以 $P(A)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

值得注意的是，如果把例 3 中的条件“每次取出后不放回”换成“每次取出后放回”，其余不变，则所求事件发生的概率将有所变化.

事实上，此时树形图将有所变化，且样本空间应记为

$$\Omega=\{(a_1,\ a_1),\ (a_1,\ a_2),\ (a_1,\ b),\ (a_2,\ a_1),\ (a_2,\ a_2),$$
$$(a_2,\ b),\ (b,\ a_1),\ (b,\ a_2),\ (b,\ b)\},$$

共包含 9 个样本点. 而事件

$A=$ **4** ________________.

A 包含的样本点个数为 4，所以 $P(A)=$ **5** ____________.

例 4 甲、乙两人玩锤子、剪刀、布的猜拳游戏，假设两人都随机出拳，求：

(1) 平局的概率；　　(2) 甲赢的概率；

(3) 甲不输的概率.

解 因为甲有 3 种不同的出拳方法，乙同样也有 3 种不同的出拳方法，所以一次出拳共有 $3\times3=9$ 种不同的可能.

因为都是随机出拳，所以可以看成古典概型，而且样本空间中共包含 9 个样本点，样本空间可以用图 5-3-9 直观表示.

		甲		
		锤子	剪刀	布
乙	锤子	△	⊙	※
	剪刀	※	△	⊙
	布	⊙	※	△

图 5-3-9

因为锤子赢剪刀，剪刀赢布，布赢锤子，所以若记事件 A 为“平局”，B 为“甲赢”. 则：

(1) 事件 A 包含 3 个样本点（图 5-3-9 中的△），因此 $P(A)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$；

(2) 事件 B 包含 3 个样本点（图 5-3-9 中的※），因此 $P(B)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$；

(3) 因为 $A+B$ 表示“甲不输”，且 A，B 互斥，所以所求概率为

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{3}.$$

例 4 中的图也可以用树形图来表示，而且（3）还有其他解法，请读者自行尝试.

例 5 先后掷两个均匀的骰子，观察朝上的面的点数，记事件 A：点数之和为 7，B：至少出现一个 3 点，求 $P(A)$，$P(\overline{A})$，$P(B)$，$P(AB)$.

解 用数对（x，y）来表示抛掷结果，则样本空间可记为

$$\Omega=\{(i，j) \mid i，j=1，2，3，4，5，6\}，$$

而且样本空间可用图 5-3-10 直观表示.样本空间中，共包含 36 个样本点.

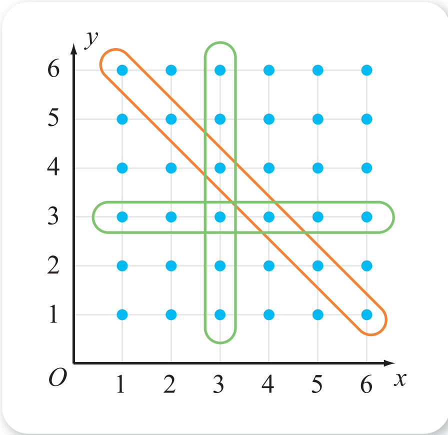


图 5-3-10

不难看出，

$$A=\{(6，1)，(5，2)，(4，3)，(3，4)，(2，5)，(1，6)\}，$$

A 包含 6 个样本点（即图 5-3-10 中橙色框中的点），因此 $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

由对立事件概率之间的关系可知

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

类似地，可以看出，图 5-3-10 中绿色框中的点可以代表事件 B，因此 B 包含 11 个样本点，从而 $P(B)=\dfrac{11}{36}$.

不难知道，$AB=\{(4，3)，(3，4)\}$，因此

$P(AB)=$ 6 ________.

例 6 人的眼皮有单眼皮与双眼皮之分，这是由对应的基因决定的.

生物学上已经证明：决定眼皮单双的基因有两种，一种是显性基因（记为 B），另一种是隐性基因（记为 b）；基因总是成对出现（如 BB，bB，Bb，bb），而成对的基因中，只要出现了显性基因，那么这个人就一定是双眼皮（也就是说，“单眼皮”的充要条件是“成对的基因是 bb”）；如果不发生基因突变的话，成对的基因中，一个来自父亲，另一个来自母亲，但父母亲提供基因时都是随机的.

有一对夫妻，两人成对的基因都是 Bb，不考虑基因突变，求他们的孩子是单眼皮的概率.

解 我们用连着写的两个字母来表示孩子的成对的基因，其中第一个字母表示父亲提供的基因，第二个字母表示母亲提供的基因.

由图 5-3-11 所示的树形图可知，样本空间中共含有 4 个样本点，即

$$\Omega=\{\mathrm{BB}，\mathrm{Bb}，\mathrm{bB}，\mathrm{bb}\}.$$

人民教育出版社

孩子要是单眼皮，成对的基因只能是 bb，因此所求概率为$\frac{1}{4}$.

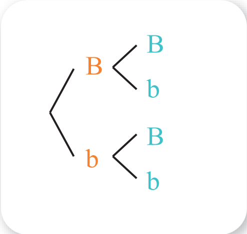


图 5-3-11

例 6 中，若我们考虑的样本空间为 $\Omega=\{BB, Bb, bb\}$，那么事件“他们的孩子是单眼皮”只包含 Ω 中的一个样本点 bb，但由此并不能得出该事件发生的概率为$\frac{1}{3}$，因为样本空间 $\Omega=\{BB, Bb, bb\}$ 中的各个基本事件不具有等可能性. 因此，用古典概型求概率时，要选择合适的方式表示样本点及样本空间，以使得基本事件具有等可能性，并且使所考察的事件能表示为样本空间的子集.

练习A

1. 一般来说，火车上的座位都标有 A，B，C，D，F，其中 A，F 这两个座位是靠窗的，如果随机买一张火车票，则买到靠窗的座位的概率是多少？
2. 某选修课共有 51 人想学，但是因为场地有限，只能容许 36 人选课，学校打算用抽签的方式决定哪些人上这门选修课，则想学的 51 人中，任何一人能上这门课的概率为多少？
3. 从含有三件正品和一件次品的产品中任取两件，求取出的两件中恰有一件次品的概率.

练习B

1. 从 1，2，3，…，30 中任意选一个数，分别求下列事件的概率：
   (1) 取出的数是偶数；
   (2) 取出的数能被 3 整除；
   (3) 取出的数是偶数且能被 3 整除；
   (4) 取出的数是偶数或能被 3 整除.
2. 把一个体积为 64 cm^3 的正方体木块表面涂上红漆，然后锯成 64 个体积为 1 cm^3 的小正方体，从中任取一块，求取到的小正方体只有一面涂有红漆的概率.
3. 从 2，3，8，9 中任取两个不同的数，分别记为 a，b，求使 $\log_a b$ 为整数的概率.
4. 齐王与田忌赛马，田忌的上等马优于齐王的中等马，劣于齐王的上等马；田忌的中等马优于齐王的下等马，劣于齐王的中等马；田忌的下等马劣于齐王的下等马. 现齐王与田忌各出上等马、中等马、下等马一匹，进行三场比赛，每匹马只赛一场，胜两场或两场以上的人获胜. 求田忌获胜的概率.

❺ 甲、乙两校各有 3 名教师报名支教，其中甲校 2 男 1 女，乙校 1 男 2 女.

（1）若从甲校和乙校报名的教师中各任选 1 名，用合适的符号写出样本空间，并求选出的 2 名教师性别相同的概率；

（2）若从报名的 6 名教师中任选 2 名，用合适的符号写出样本空间，并求选出的 2 名教师来自同一学校的概率.

1 4　　2 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$　　3 1　　4 $\{(a_1, b), (a_2, b), (b, a_1), (b, a_2)\}$

5 $\frac{4}{9}$　　6 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

5.3.4 频率与概率

1. 用频率估计概率

我们已经知道，利用古典概型能够方便地确定出有关随机事件的概率. 但是，因为并不是所有的随机试验都能归结为古典概型，所以还要寻求其他的确定随机事件概率的方法.

情境与问题

（1）《中国青年报》社会调查中心联合问卷网，对 2 000 名 18～35 岁的青年进行的一项调查显示，在生活节奏加快的今天，70.0%的受访青年表示仍要培养古典诗词爱好，15.5%的人认为不需要，14.5%的人表示不好说.

随机选取一名 18～35 岁的青年，这名青年认为仍要培养古典诗词爱好的概率为多少？

（2）随机抛一个瓶盖，观察它落地后的状态（参见上一小节的图 5-3-7），怎样确定瓶盖盖口朝下的概率？

情境与问题中的两个问题，如果用古典概型来确定概率，显然是不太合适的，但是我们可以利用有关统计数据得出事件发生的概率的估计值.

例如，可以重复做抛瓶盖试验若干次（设为 n 次），然后观察盖口朝下的

次数（设为 m 次），最后用盖口朝下的频率$\frac{m}{n}$作为盖口朝下的概率的估计值.

尝试与发现

你觉得利用频率来估计概率的办法可靠吗？怎样检验这种方法的可靠性？

为了验证这种确定事件发生的概率的方法的可靠性，历史上很多学者做过成千上万次抛均匀硬币的试验，得到的结果如下表所示.

试验者	抛掷次数 n	正面向上次数 m	正面向上频率$\frac{m}{n}$
棣莫弗	2 048	1 061	0. 518 1
布丰	4 040	2 048	0. 506 9
费勒	10 000	4 979	0. 497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0. 501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0. 500 5

抛均匀硬币观察朝上的面时，利用古典概型可算得正面朝上的概率为$\frac{1}{2}$，不难看出，以上学者们所得到的频率值，都可以较好地作为正面朝上的概率的近似值.

事实上，大数定律能够保证，在大量重复的试验过程中，一个事件发生的频率会很接近于这个事件发生的概率，而且，试验的次数越多，频率与概率之间差距很小的可能性越大.

一般地，如果在 n 次重复进行的试验中，事件 A 发生的频率为$\frac{m}{n}$，则当 n 很大时，可以认为事件 A 发生的概率 $P(A)$的估计值为$\frac{m}{n}$. 不难看出，此时也有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1,$$

而且，可以验证，此时两对立事件的概率和为 1 以及互斥事件的概率加法公式等概率的性质也成立.

这种确定概率估计值的方法称为用频率估计概率，在实践中人们经常采用这种方法来估计事件发生的概率.

例 1 为了确定某类种子的发芽率，从一大批这类种子中随机抽取了 2 000 粒试种，后来观察到有 1 806 粒发了芽，试估计这类种子的发芽率.

解 因为

$$\frac{1\ 806}{2\ 000}=0.903,$$

所以估计这类种子的发芽率为 0.903.

不难看到，在用频率估计概率时，不同的试验结果可能会产生不同的估计值. 例如，如果例 1 中观察到了 1 810 粒种子发了芽，那么得到种子发芽率的估计值将为

$$\frac{1\ 810}{2\ 000}=0.905.$$

需要注意的是，这种现象是正常的. 这就像给定一条线段，谁也不会怀疑它有一个“客观”的长度，但这个长度是多少呢？我们可以用精确度不同的尺或仪器去测量，也可以由不同的人去测量，但不论尺或仪器多么精确，测量的人多么认真，测得的数值可能不会完全相同，但一定都是“客观”长度的近似值.

需要注意的是，即使我们估计出了发芽率为 0.903（或 0.905），我们也不能指望下一次种 10 000 粒种子时，得到发芽的种子正好为 9 030（或 9 050）粒，而只能说发芽的种子接近 9 030 粒（或 9 050 粒）.

例 2 2013 年，北京地区拥有科普人员 48 800 人，其中，科普专职人员 7 727 人，其余均为科普兼职人员. 2013 年 9 月的科普日活动中，到某大学附属中学宣讲科普知识的是科普人员张明，估计张明是科普专职人员的概率（精确到 0.01）.

解 可以算得，2013 年北京地区科普专职人员占所有科普人员的比例为

$$\frac{7\ 727}{48\ 800}\approx 0.16,$$

因此张明是科普专职人员的概率可估计为 0.16.

例 3 某女篮运动员统计了她最近几次参加比赛投篮的得分情况，得到的数据如下表所示.

投篮次数	投中两分的次数	投中三分的次数
75	45	12

注：每次投篮，要么得两分，要么得三分，要么没投中.

记该女篮运动员在一次投篮中，投中两分为事件 A，投中三分为事件 B，没投中为事件 C，试估计 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$.

解 因为

$$\frac{45}{75}=0.6,\quad \frac{12}{75}=0.16,$$

所以可以估计

$$P(A)=\boxed{1}\_\_\_\_\_\_,\quad P(B)=\boxed{2}\_\_\_\_\_\_.$$

注意到 $C=\overline{A+B}$，而且 A 与 B 互斥，因此估计

$$\begin{aligned}P(C)&=1-P(A+B)\\&=1-P(A)-P(B)\\&=\boxed{3}\_\_\_\_\_\_.\end{aligned}$$

例 3 中，$P(C)$ 还有其他算法，请读者自行尝试.

例 4 为了了解某次数学考试全校学生的得分情况，数学老师随机选取了若干名学生的成绩，并以 $[50,\ 60)$，$[60,\ 70)$，…，$[90,\ 100]$ 为分组，作出了如图 5-3-12 所示的频率分布直方图. 从该学校中随机选取一名学生，估计这名学生该次数学考试成绩在 $[90,\ 100]$ 内的概率.

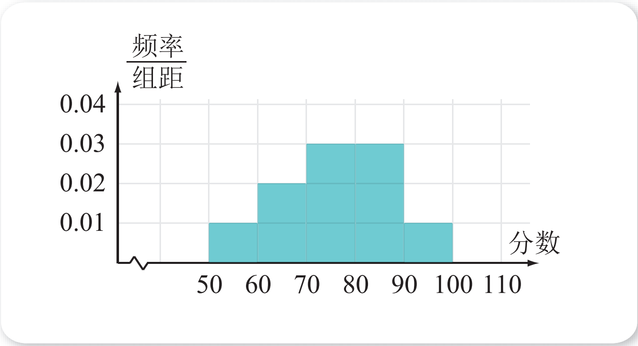


图 5-3-12

解 由频率分布直方图可以看出，所抽取的学生成绩中，在 $[90,\ 100]$ 内的频率为

$$0.01\times(100-90)=0.1.$$

因为由样本的分布可以估计总体的分布，所以全校学生的数学得分在 $[90,\ 100]$ 内的频率可以估计为 $\boxed{4}$______.

根据用频率估计概率的方法可知，随机选取一名学生，这名学生该次数学考试成绩在 $[90,\ 100]$ 内的概率可以估计为 $\boxed{5}$______.

探索与研究

已知某彩票的中奖概率为 $\frac{1}{1\ 000}$，这是否意味着买了 1 000 张彩票就一定能中奖？

试分析各种可能的情况（例如彩票总数正好为 1 000 和超过 1 000 等），给这个问题一个比较完善的解答.

2. 用信息技术模拟抛硬币和掷骰子

利用计算机软件生成随机数的函数，可以模拟抛均匀硬币和掷均匀骰子的试验，从而可以帮助我们更好地理解用频率估计概率的合理性.

例如，如果用 1 表示出现正面，0 表示出现反面，则在电子表格软件中可用函数 RANDBETWEEN 来模拟抛均匀硬币. 图 5-3-13 是模拟的结果，其中产生数据的每个单元格输入的都是“=RANDBETWEEN(0，1)”.

用 RANDBETWEEN 也可以模拟掷均匀骰子的试验，只不过在每个单元格输入的公式应为“=RANDBETWEEN(1，6)”.

当然，用类似方法可以模拟生活中的随机试验，从而得到相关随机事件发生的概率.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN
1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
3	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0
4	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
5	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
7	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
8	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
9	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
10	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
11	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
12	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
13	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
14	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
15	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
16	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1
17	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
18	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
19	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
20	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
21																																								
22	计　数：					800																																		
23	1 的个数：					408																																		
24	1 的频率：					0.51																																		
25																																								

图 5-3-13

练习A

❶ 学生甲在用频率估计事件 A 发生的概率时，算得事件 A 发生的概率 $P(A)=1.1$，学生乙看了后说：“你一定算错了！”乙的依据是什么？

❷ 从一堆苹果中任取 10 个，称得它们的质量如下（单位：g）：

125，120，122，105，130，114，116，95，120，134.

从这一堆苹果中，随机抽出一个，则得到的苹果质量落在 $[114.5，124.5]$ 内的概率可估计为多少？

人民教育出版社

3. 某篮球运动员的投篮命中率是 90%，有同学的理解是：这名运动员如果投篮 100 次，则一定有 90 次投中，10 次没投中. 这种理解对吗？为什么？

4. 抛一枚均匀的硬币，连续 5 次都是正面朝上，小华认为抛下一次时，反面朝上的概率大于$\frac{1}{2}$，你同意吗？为什么？

5. 统计全班同学的生日所在的月份，将数据填入下表：

月份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月	合计
频数													
频率													

由此你能得到什么结论？

练习B

1. 从用频率估计概率的方法说明：
(1) 不可能事件的概率是 0；
(2) 必然事件的概率是 1.

2. 某射击手在同一条件下进行射击训练，结果如下：

射击次数 n	10	20	50	100	200	500
击中靶心次数 m	8	19	44	92	178	455
击中靶心频率 $\frac{m}{n}$						

(1) 求出表中击中靶心的各个频率值；
(2) 这个射击手射击一次，击中靶心的概率可估计为多少？

3. 将一个均匀的骰子掷 600 次，则出现的点数大于 2 的次数大约为多少？一定会出现这么多次吗？

4. 某盒子内装有三种颜色的玻璃球，一位同学每次从中随机拿出一个玻璃球，观察颜色后再放回，重复了 50 次，得到的信息如下：观察到红色 26 次、蓝色 13 次. 如果从这个盒子内任意取一个玻璃球，估计：
(1) 这个球既不是红色也不是蓝色的概率；
(2) 这个球是红色或者是蓝色的概率.

1 0.6　2 0.16　3 0.24　4 0.1　5 0.1

人民教育出版社

5.3.5 随机事件的独立性

尝试与发现

学校放假三天，甲、乙两名同学都打算去敬老院做志愿者，甲同学准备在三天中随机选一天，乙同学准备在前两天中随机选一天．记事件 A：甲选的是第一天，B：乙选的是第一天．

（1）直觉上，你觉得 A 事件是否发生会影响 B 事件发生的概率吗？

（2）求出 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$ 的值，观察这三个值之间的关系．

尝试与发现中，如果用 (i, j) 表示甲选的是第 i 天，乙选的是第 j 天，则样本空间可以记为

$$\Omega=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\},$$

共包含 6 个样本点．

又因为

$$A=\{(1, 1), (1, 2)\},$$

$$B=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

所以，可以算出

$P(A)=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad}$，$P(B)=\boxed{3}\underline{\qquad\qquad}$，$P(AB)=\boxed{4}\underline{\qquad\qquad}$．

一般地，当

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

时，就称事件 A 与 B **相互独立**（简称独立）．事件 A 与 B 相互独立的直观理解是，事件 A 是否发生不会影响事件 B 发生的概率，事件 B 是否发生也不会影响事件 A 发生的概率．

可以证明，如果事件 A 与 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立．

例 1 甲、乙两人各掷一个均匀的骰子，观察朝上的面的点数，记事件 A：甲得到的点数为 2，B：乙得到的点数为奇数．

（1）求 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$，判断事件 A 与 B 是否相互独立；

（2）求 $P(\overline{A}B)$．

解 如果用 (i, j) 表示甲得到的点数为 i，乙得到的点数为 j，则样本空间可以记为

$$\Omega=\{(i, j) \mid i, j=1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

而且这个样本空间可用图 5-3-14 直观表示.

（1）不难看出，图 5-3-14 中，橙色框中的点代表事件 A，绿色框中的点代表事件 B.

因此，可以算出

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}，P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}.$$

又因为 $AB=\{(2，1)，(2，3)，(2，5)\}$，所以

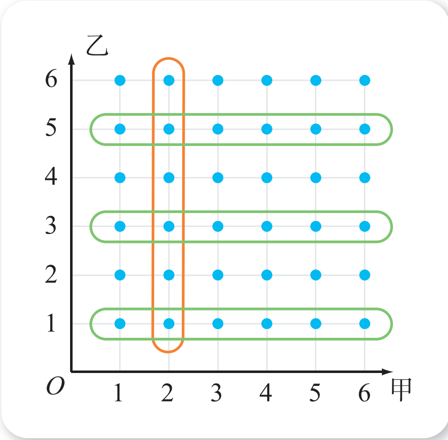


图 5-3-14

$$P(AB)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

因为 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以 A 与 B 相互独立.

（2）由 A 与 B 相互独立可知，$\overline{A}$ 与 B 也相互独立，因此

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=[1-P(A)]P(B)=\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}.$$

因为“A 与 B 相互独立”是“$P(AB)=P(A)P(B)$”的充要条件，所以如果已知两个事件是相互独立的，则由它们各自发生的概率可以迅速得到它们同时发生的概率. 在实际问题中，我们常常依据实际背景去判断事件之间是否存在相互影响，若认为事件之间没有影响，则认为它们相互独立.

例 2 已知甲运动员的投篮命中率为 0.7，乙运动员的投篮命中率为 0.8.

（1）若甲、乙各投篮一次，则都命中的概率为多少？

（2）若甲投篮两次，则恰好投中一次的概率为多少？

解 （1）记事件 A：甲投中，B：乙投中，因为 A 与 B 相互独立，所以

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.7\times0.8=0.56,$$

即都命中的概率为 0.56.

（2）记事件 A_i：甲第 i 次投中，其中 $i=1，2$，则

$$P(A_1)=P(A_2)=0.7.$$

恰好投中一次，可能是第一次投中且第二次没投中，也可能是第一次没投中且第二次投中，即

$$A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2,$$

注意到 A_1 与 A_2 相互独立，且 $A_1\overline{A_2}$ 与 $\overline{A_1}A_2$ 互斥，因此

$$\begin{aligned}P(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2)&=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)\\&=P(A_1)P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(A_2)\end{aligned}$$

人民教育出版社

$$=P(A_1)[1-P(A_2)]+[1-P(A_1)]P(A_2)$$
$$=0.7\times(1-0.7)+(1-0.7)\times 0.7$$
$$=0.42.$$

两个事件相互独立的概念也可以推广到有限个事件，即“A_1，A_2，…，A_n 相互独立”的充要条件是“其中任意有限个事件同时发生的概率都等于它们各自发生的概率之积”．多个事件独立具有与两个事件独立类似的性质．例如，如果 A_1，A_2，A_3 相互独立，则 $\overline{A_1}$，A_2，A_3 也相互独立等．

例 3 某同学在参加一次考试时，有三道选择题不会，每道选择题他都随机选了一个答案，且每道题他猜对的概率均为$\dfrac{1}{4}$．

（1）求该同学三道题都猜对的概率；

（2）求该同学至少猜对一道题的概率．

解 记事件 A_i：该同学第 i 题猜对了，其中 $i=1$，2，3，则

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4}.$$

（1）三道题都猜对可以表示为 $A_1A_2A_3$，又因为 A_1，A_2，A_3 相互独立，所以

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}.$$

（2）“至少猜对一道题”的对立事件是“三道都猜错”，后者可以表示为 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$，所以

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{27}{64},$$

因此所求概率为

$$1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-\frac{27}{64}=\frac{37}{64}.$$

应当注意的是，例 3 的（2）也可不借助对立事件来求，但那样的话会比较烦琐，请读者自行尝试．

练习A

1. 掷一个均匀的骰子，设事件 A 为“掷出的点数小于 4”，B 为“掷出 1 点或 6 点”，判断事件 A 与 $\overline{B}$ 是否独立．
2. 已知甲运动员的投篮命中率为 0.7，若甲投篮两次，则其两次都没投中的概率为多少？
3. 俗话说“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”，从数学角度解释这句话的含义．

人民教育出版社

练习B

1. 从一副不含大小王的 52 张扑克牌中，任意抽出一张来，设事件 A 为“抽到黑桃”，B 为“抽到 Q”，判断 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 是否相互独立.
2. 已知甲运动员的投篮命中率为 0.7，若甲投篮两次，则其至少投中一次的概率为多少？
3. 用定义与概率的性质证明，当事件 A 与 B 相互独立时，$\overline{A}$ 与 B 也独立.（提示：$P(B)=P((\overline{A}+A)B)=P(\overline{A}B+AB)=P(\overline{A}B)+P(AB)$.）
4. 已知某人做某件事，成功的概率只有 0.1. 用计算器计算，如果他尝试 10 次，而且每次是否成功都相互独立，则他至少有一次成功的概率为多少（精确到 0.01）？如果他尝试 20 次呢？如果要保证至少成功一次的概率不小于 90%，则他至少要尝试多少次？

1 {(1，1)，(2，1)，(3，1)}　2 $\dfrac{1}{3}$　3 $\dfrac{1}{2}$　4 $\dfrac{1}{6}$

习题5-3A

1. 从 20 位同学中随机抽取一名，已知抽到男生的概率为 0.3，求这 20 位同学中有多少男生.
2. 从 1，2，3，4，5 这 5 个数字中，任取两个数.
   (1) 用合适的符号写出样本空间；
   (2) 求两个数都是奇数的概率.
3. 将下列说法用概率的知识表达：
   (1) 一位工程师说，他们厂制造的节能灯，1 000 个中平均有 950 个寿命不小于 10 000 h；
   (2) 一位老农民说，十有八九要下雨了.
4. 某同学参加科普知识竞赛，需回答 3 个问题. 假设这名同学答对第一、二、三个问题的概率分别为 0.8，0.7，0.6，且各题答对与否相互之间没有影响. 求这名同学答对第一题、第三题且答错第二题的概率.
5. 已知某一天甲地降雨的概率是 0.2，乙地降雨的概率是 0.3，假定这一天两地是否降雨相互之间没有影响，求：
   (1) 甲乙两地都降雨的概率；
   (2) 甲乙两地都不降雨的概率.

人民教育出版社

6 已知事件 A，B 相互独立，且 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{2}{3}$，求 $P(A\overline{B})$ 及 $P(\overline{A}\overline{B})$.

习题5-3B

1 某市公租房的房源位于甲、乙两个片区．设每位申请人只申请其中一个片区的房源，且申请其中任一个片区的房源是等可能的，现该市有 3 位申请人在申请公租房：

(1) 用合适的符号写出样本空间；

(2) 求没有人申请甲片区房源的概率；

(3) 求每个片区的房源都有人申请的概率.

2 从 1，2，3，4，5，6 这六个数字中，每次任意取出一个数字，有放回地取两次．设事件 A 为“第一次取出的数字为 4”，B 为“两次取出的数字之和等于 7”.

(1) 用合适的符号写出样本空间；

(2) 判断 A 与 B 是否相互独立.

3 掷两个均匀的骰子，观察朝上的面的点数．求点数之和为多少时概率最大.

4 某商场为了吸引大家，规定：购买一定价值的商品可以获得一张奖券，奖券上有一个兑奖号码，可以分别参加两次抽奖方式相同的兑奖活动．已知甲有一张该商场的奖券，且每次兑奖活动的中奖概率都是 0.05，求：

(1) 甲中两次奖的概率；

(2) 甲中一次奖的概率；

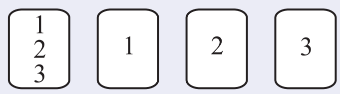
(3) 甲不中奖的概率.

5 已知事件 A，B 相互独立，且 $P(AB)=\frac{1}{4}$，$P(\overline{A}B)=\frac{9}{16}$，求 $P(A)$，$P(B)$.

习题5-3C

1 已知事件 A，B 相互独立，若事件 A 发生的概率为 p，事件 B 发生的概率为 $1-p$，试求 A 与 B 同时发生的概率的最大值.

2 有四张同样大小的卡片，上面标有数字，如图所示．从这四张卡片中任抽一张，令事件 A_i：“抽到卡片上有数字 i”，$i=1$，2，3，试判断 A_1，A_2，A_3 是否相互独立.



（第 2 题）

5.4　统计与概率的应用

利用统计和概率的知识，可以解决日常生活和其他学科中的一些难题，下面我们举例说明.

情境与问题

我国是一个人口众多、人均能源资源非常匮乏的国家. 近些年来，随着经济的持续快速发展，能源的需求越来越大，电力消费也每年都在增长.

我国长期以来实行的是低电价政策，这有效地减轻了人们的负担. 然而，另外一方面，“5%的高收入家庭消费了约 24%的电量，这就意味着低电价政策的福利更多地由高收入群体享受. 这既不利于社会公平，无形中也助长了电力资源的浪费”. 因此，“建立‘多用者多付费’的阶梯价格机制，将有助于形成节能减排的社会共识，促进资源节约型、环境友好型社会的建设”.

某市准备实行阶梯电价，要求约 75%的居民用电量在第一阶梯内，约 20%的居民用电量在第二阶梯内，约 5%的居民用电量在第三阶梯内. 该怎样确定阶梯电价的临界点呢?

不难知道，为了确定临界点，最理想的是首先获取该市所有居民的用电量，然后再将用电量按照从小到大的顺序排列，最后求出这组数的 75%分位数、95%分位数即可.

当然，一般情况下，要获取所有居民的用电量并不容易，此时，我们可以采用随机抽样和用样本估计总体的办法来解决问题.

例如，假设从该市抽取了 200 户居民的用电量（单位：kW·h），所得数据按从小到大排序如下.

8	18	22	31	42	48	49	50	51	56
57	57	60	61	61	61	62	62	63	63
65	66	67	69	70	70	71	72	72	74
76	77	77	78	78	80	80	82	82	82
83	84	84	88	88	89	90	91	93	93
94	95	96	96	96	97	98	98	98	99
100	100	100	101	101	101	105	106	106	106

107	107	107	107	108	108	109	109	110	110
110	111	112	113	113	114	115	116	118	120
120	120	121	123	124	127	127	127	130	130
130	131	131	132	132	132	133	133	134	134
134	135	135	135	135	136	137	137	138	139
139	140	141	142	144	146	146	147	148	149
151	152	154	156	159	160	162	163	163	164
165	167	169	170	170	172	174	174	177	178
178	180	182	182	187	189	191	191	192	194
194	200	201	201	202	203	203	206	208	212
213	214	216	223	224	237	247	250	250	251
253	254	258	260	265	274	274	283	288	289
304	319	320	324	339	462	498	530	542	626

因为

$$200\times75\%=150,$$

所以 75%分位数可取为第 150 个数与第 151 个数的算术平均值，即

$$\frac{178+178}{2}=178.$$

又因为

$$200\times95\%=190,$$

所以 95%分位数可取为第 190 个数与第 191 个数的算术平均值，即

$$\frac{289+304}{2}=296.5.$$

根据计算结果和用样本估计总体的思想可知，用电量数值在 $(0,\ 178]$ 内为第一阶梯，在 $(178,\ 296.5]$ 内为第二阶梯，在 $(296.5,\ +\infty)$ 为第三阶梯.

情境与问题

为了更好地做好鱼食的采购，某池塘的负责人想知道自己的池塘里大概有多少条鱼，你有什么好办法吗?

作为模拟，我们可以思考一个类似的问题：已知一个盒子里装有若干个小玻璃球，在不容许将玻璃球一一拿出来数的情况下，怎样才能估计出玻璃球的个数?

利用统计与概率的知识，可以这样来估计.

再往盒子里放入 m 个带有标记的玻璃球，充分搅拌盒子里的玻璃球之

后，从盒子里取出 n 个玻璃球，数出其中带有标记的球的个数，记为 k. 由此可知，从搅拌后的盒子中随机取出一个球，得到的是有标记的球的概率可以估计为$\frac{k}{n}$.

另外，如果设盒子中原有的玻璃球个数为 x，则从搅拌后的盒子中随机取出一个球，得到的是有标记的球的概率为$\frac{m}{x+m}$.

由

$$\frac{m}{x+m}\approx\frac{k}{n}$$

可得

$$x\approx m\left(\frac{n}{k}-1\right).$$

上述情境中的问题也可以用类似的办法解决，请读者自行叙述解决过程.

情境与问题

人们在接受问卷调查时，通常并不愿意如实回答较为敏感的问题. 例如，对于问题“捡到东西后是否有留下来的行为”，有些人会有说了实话会被人看不起的顾虑；再比如，直接问运动员们是否服用过兴奋剂，一般也难以得到真实的数据. 怎样才能让人们打消顾虑如实回答敏感问题呢？你能想出好办法吗？

下面是一种能解决此类问题的问卷样式.

> 在回答问题前，请自行抛一个硬币：如果得到正面，请按照问题一勾选答案；如果得到反面，请按照问题二勾选答案.（友情提示：为了不泄露您的隐私，请不要让其他人知道您抛硬币的结果.）
>
> 问题一：您的身份证号码倒数第二个数是奇数吗？
>
> 问题二：捡到东西后是否有留下来的行为？
>
> □是　　　□否

你看出了这个问卷的特别之处吗？因为只有答题人自己知道其回答的是哪个题，所以答题人就不会有顾虑了！

对于收集数据的人来说，如果收回的 200 份问卷里，有 62 份答“是”，那么有多少人回答了问题二？其中又有多少人答“是”呢？

由于抛硬币得到正面的概率为$\frac{1}{2}$，因此可估计出回答问题一的人数为

人民教育出版社

$$200\times\frac{1}{2}=100;$$

又因为身份证号码倒数第二个数是奇数与是偶数的概率都可认为是$\frac{1}{2}$，所以回答了问题一的人中，答“是”的人数可估计为 $100\times\frac{1}{2}=50$. 由此可得，大约有 100 人回答了问题二，其中约有 $62-50=12$ 人答“是”. 也就是说，捡到东西后有留下来的行为的比例约为 12%.

例 1 一天，甲拿出一个装有三张卡片的盒子（一张卡片的两面都是绿色，一张卡片的两面都是蓝色，还有一张卡片一面是绿色，另一面是蓝色），跟乙说玩一个游戏，规则是：甲将盒子里的卡片顺序打乱后，由乙随机抽出一张卡片放在桌子上，然后卡片朝下的面的颜色决定胜负，如果朝下的面的颜色与朝上的面的颜色一致，则甲赢，否则甲输.

乙对游戏的公平性提出了质疑，但是甲说：“当然公平！你看，如果朝上的面的颜色为绿色，则这张卡片不可能两面都是蓝色，因此朝下的面要么是绿色，要么是蓝色，因此，你赢的概率为$\frac{1}{2}$，我赢的概率也是$\frac{1}{2}$，怎么不公平？”

分析这个游戏是否公平.

解 （方法一）把卡片六个面的颜色记为

$$G_1，G_2，G_3，B_1，B_2，B_3，$$

其中，G 表示绿色，B 表示蓝色；G_3 和 B_3 是两面颜色不一样的那张卡片的颜色.

游戏所有的结果可以用如图 5-4-1 表示.

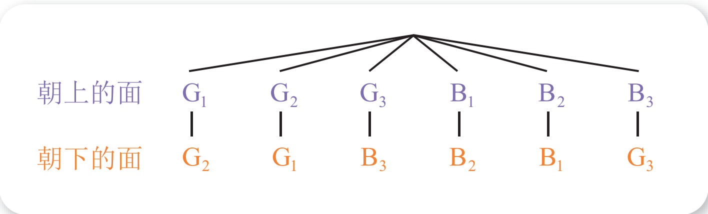


图 5-4-1

不难看出，此时，样本空间中共有 6 个样本点，朝上的面与朝下的面颜色不一致的情况只有 2 种，因此乙赢的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

因此，这个游戏不公平.

（方法二）把三张卡片分别记为

$$G，B，M，$$

人民教育出版社

其中，G 表示两面都是绿色的卡片，B 表示两面都是蓝色的卡片，M 表示一面是绿色另一面是蓝色的卡片.

考虑乙抽取到的卡片只有三种可能，而且只有抽到 M 乙才能赢，所以乙赢的概率为$\frac{1}{3}$.

因此，这个游戏不公平.

例 2 某厂家声称自己的产品合格率为 95%，市场质量管理人员抽取了这个厂家的 3 件产品进行检验，发现 3 件都不合格，厂家所声称的合格率可信吗?

解 如果产品合格率为 95%，则随机抽取一件产品，不合格的概率应为 1−95%=5%.

此时，随机抽取 3 件，都不合格的概率为

$$5\%\times5\%\times5\%=0.0125\%.$$

也就是说，如果厂家所声称的产品合格率可信，那么就发生了一件可能性只有 0.012 5%的事！但是，一件概率只有 0.012 5%的事是不太可能发生的，因此有理由怀疑，厂家所声称的合格率是不可信的.

例 3 人的卷舌与平舌（指是否能左右卷起来）同人的眼皮单双一样，也是由遗传自父母的基因决定的，其中显性基因记作 D，隐性基因记作 d；成对的基因中，只要出现了显性基因，就一定是卷舌的（这就是说，“卷舌”的充要条件是“基因对是 DD，dD 或 Dd”）. 同前面一样，决定眼皮单双的基因仍记作 B（显性基因）和 b（隐性基因）.

有一对夫妻，两人决定舌头形态和眼皮单双的基因都是 DdBb，不考虑基因突变，求他们的孩子是卷舌且单眼皮的概率.（有关生物学知识表明：控制上述两种不同性状的基因遗传时互不干扰.）

解 （方法一）根据题意，这对夫妻孩子的决定舌头形态和眼皮单双的基因的所有可能可以用图 5-4-2 表示.

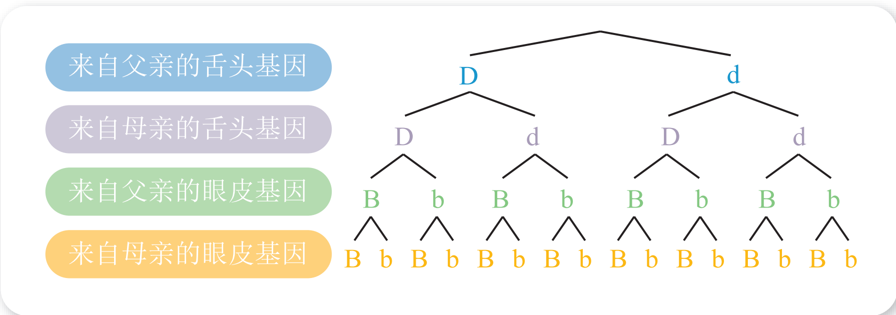


图 5-4-2

不难看出，样本空间中共包含 16 个样本点，其中表示卷舌且单眼皮

的是

$$DDbb,\ Ddbb,\ dDbb,$$

因此，所求概率为$\frac{3}{16}$.

（方法二）先考虑孩子是卷舌的概率.

所有的情况可用图 5-4-3 表示，由图可以看出，孩子是卷舌的概率为$\frac{3}{4}$.

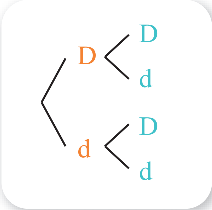


图 5-4-3

同理，孩子是双眼皮的概率为$\frac{3}{4}$，因此是单眼皮的概率为$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

由于不同性状的基因遗传时互不干扰，也就是说是否为卷舌与是否为单眼皮相互独立，因此是卷舌且单眼皮的概率为

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}.$$

习题5-4A

1. 某地区想实行阶梯电价，经调查发现，该地区居民用电量信息如下.

分位数	50%分位数	70%分位数	80%分位数	90%分位数
用电量/(kW·h)	160	176	215	230

如果要求约 70%的居民用电量在第一阶梯内，约 20%的居民用电量在第二阶梯内，该怎样确定阶梯电价的临界点？

2. 某盒子中有若干白色的围棋子，为了估计其中围棋子的数目，小明将 100 颗黑色的围棋子放入了其中，充分搅拌后随机抽出了 30 颗，数得其中有 6 颗黑色的围棋子，试根据这些信息估计白色围棋子的数目.

3. 某厂家声称自己的产品合格率为 99%，市场质量管理人员抽取了这个厂家的 2 件产品进行检验，发现都不合格，厂家所声称的合格率可信吗？

4. 某水产试验场实行某种鱼的人工孵化，10 000 个鱼卵孵出了 8 513 尾鱼苗，据此解答下列问题：

(1) 这种鱼卵的孵化概率可估计为多少？

(2) 30 000 个鱼卵大约能孵化多少尾鱼苗？

(3) 要孵化 5 000 尾鱼苗，大概得备多少鱼卵（精确到百位）？

5. 已知甲、乙、丙三人的投篮命中率分别为 0.8，0.7，0.5，如果他们三人每人投篮一次，则：

(1) 三人都命中的概率是多少？

(2) 恰有一人命中的概率是多少？

习题5-4B

1. 某险种的基本保费为 a（单位：元），继续购买该险种的投保人称为续保人，续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下.

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机调查了该险种的 200 名续保人在一年内的出险情况，得到如下统计表.

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
频数	60	50	30	30	20	10

（1）记 A：一续保人本年度的保费不高于基本保费，求 $P(A)$ 的估计值；

（2）记 B：一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%，求 $P(B)$ 的估计值.

2. 甲、乙两队进行排球决赛，现在的情形是，甲队只要再赢一局就获得冠军，乙队需要再赢两局才能获得冠军. 若两队的水平相当，求甲队获得冠军的概率.

3. 某项选拔共有四轮考核，每轮设有一个问题，能正确回答问题者进入下一轮考核，否则即被淘汰. 已知某选手能正确回答第一、二、三、四轮的问题的概率分别为 $\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{1}{5}$，且各轮问题能否回答正确互不影响.

（1）求该选手进入第四轮才被淘汰的概率；

（2）求该选手至多进入第三轮考核的概率.

4. 甲、乙、丙三台机床各自独立地加工同一种零件，已知甲机床加工的零件是一等品且乙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\dfrac{1}{4}$，乙机床加工的零件是一等品且丙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\dfrac{1}{12}$，甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为 $\dfrac{2}{9}$.

（1）分别求甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的概率；

（2）从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验，求至少有一个一等品的概率.

5. 学校要从甲、乙、丙三名同学中选取两名去参加物理竞赛，因为他们的水平相当，所以准备采取抽签的方式决定. 学校制作了三个签，其中两个写有“参赛”，一个写有“不参赛”. 抽签时，由甲先抽，然后乙抽，最后丙抽. 记事件 A：甲抽中“参赛”，B：乙抽中“参赛”，判断 A，B 是否相互独立，并说明理由.

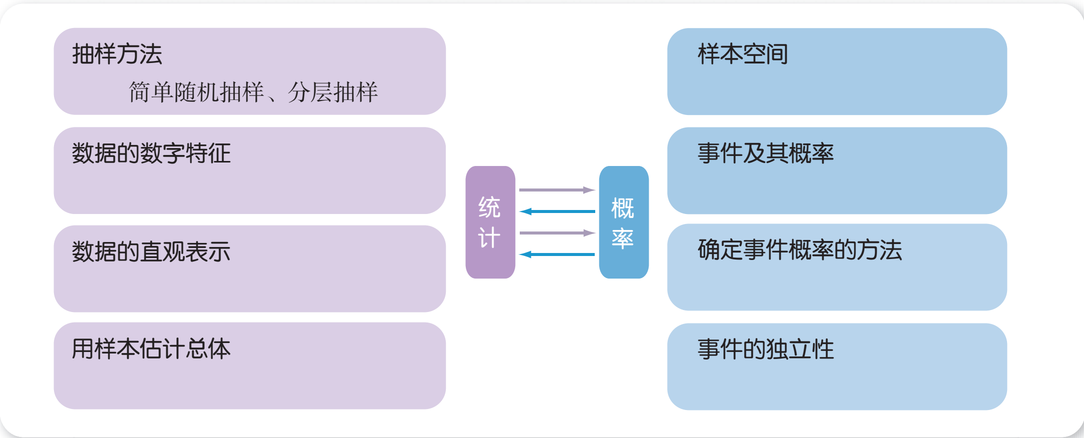
本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章的统计部分我们首先了解了有关抽样的知识，包括简单随机抽样、分层抽样，并学习了数据的数字特征，包括最值、平均数、方差、中位数、百分位数、众数、极差等，还了解了用图表表示统计数据的方法，以及用样本估计总体的方法.

概率部分了解了样本空间、事件以及事件发生的概率，包括事件之间的运算以及对应的概率之间的关系，还探讨了确定随机事件发生的概率的方法，即通过古典概型来计算概率或用频率来估计概率，最后学习了事件的独立性及有关概率的计算.

由此可作出本章的知识结构图主干部分如下. 请按照自己的理解，填写更多细节的内容吧！



当然，我们也可作出其他形式的知识结构图，请大家自己尝试.

02 课题作业

（1）统计与概率虽然联系紧密，但是它们的发展史并不相同. 实际上，统计起源于团体的管理，而概率论发源于赌博问题的研究.

查阅有关资料，了解统计与概率的发展史，写成演讲材料，并与同学交流.

（2）习惯上，由古典概型计算得到的概率称为古典概率，由频率估计得到的概率称为经验概率，这两种概率统称为客观概率.

我们已经知道，要得到古典概率，必须首先有古典概型；要得到经验概率，得做多次试验或者利用已有的经验数据. 然而，对于有一些随机事件而言，既不能建

立古典概型，也没有相关的经验数据可用，更不可能重复做多次试验，这时，可以怎样确定这些随机事件的概率呢?

在这种情况下，有人提出，可以充分利用已有的所有观点和信息，给出随机事件概率的一个估计值——也就是主观上相信该事件会发生的程度的数字度量，这样得到的概率通常称为主观概率.

例如，在参加特定的考试之前，你往往能够根据自己平常的表现，以及对考试难度的了解，来给出通过考试的概率值，这个概率值就是主观概率.

又如，一个人如果认为存在外星人的概率为 0.000 01，那么这个概率也是主观概率，它表示的是这个人很不相信外星人存在，但也没有绝对否认外星人的存在.

查阅书籍和网络，了解更多有关主观概率的内容，并整理成小论文，与同学一起交流.

03 复习题

A 组

1. 有参加夏令营的 500 名学生，他们的编号分别为 001，002，…，500，这 500 名学生住在三个营区，其中 001～200 在第一营区，201～350 在第二营区，351～500 在第三营区. 若准备采用分层抽样的方法从这些学生中抽取一个容量为 50 的样本，求每个营区应抽取的人数.

2. 某小卖部记录的一周内卖出的不同品牌饮料的销售量如下表所示，选择合适的统计图表表示这组数.

饮料品牌	A	B	C	D	E
销售量/瓶	56	20	67	73	12

3. 2015 年，我国共有 321 个地级及以上城市开展了昼间区域声环境质量监测. 其中，昼间区域声环境质量达到一级的城市为 13 个，占 4.05%；二级的城市为 220 个，占 68.54%；三级的城市为 84 个，占 26.17%；四级的城市为 3 个，占 0.93%；五级的城市为 1 个，占 0.31%. 说明上述信息可以用什么统计图表直观表示.

4. 已知 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 3，标准差为 2，求 $5x_1+2$，$5x_2+2$，…，$5x_n+2$ 的平均数与方差.

5. 农科院的专家为了了解新培育的甲、乙两种麦苗的长势情况，从种植有甲、乙两种麦苗的两块试验田中各抽取 6 株麦苗测量株高，得到的数据如下（单位：cm）：

甲：9，10，11，12，10，20；

乙：8，14，13，10，12，21.

（1）选择合适的统计图表表示上述数据；

（2）分别计算两组数据的平均数与方差，并由此判断甲、乙两种麦苗的长势情况.

6. 已知甲、乙、丙、丁四名射击选手在选拔赛中所得的平均环数 $\overline{x}$ 及方差 s^2 如下表所示，如果只能选一人参加决赛，你认为最佳人选是谁？为什么？

选手	甲	乙	丙	丁
$\overline{x}$	7	8	8	9
s^2	0.6	0.6	3.4	1.2

7. 随机地排列数字 1，5，6，得到一个三位数：

（1）写出样本空间；

（2）求所得的三位数大于 400 的概率；

（3）求所得的三位数是偶数的概率.

8. 某金融公司投资失败的概率只有 5%，如果这家公司连续投资 5 次，且每次是否成功相互独立，求这 5 次投资都成功的概率.

B 组

1. 已知甲、乙两组数据可以整理成如图所示的茎叶图，分别求这两组数的中位数、25%分位数、75%分位数、平均数、方差.

甲		乙
8	2	9
9 1	3	4 5
2 5	4	8 2 6
7 8 5	5	3 5
6	6	7

（第 1 题）

2. 某班级某次数学测试的成绩可制成如下的频率分布表，请根据该表估计出此次数学测试的平均分，并说明你的估计方法.

分组	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
人数	5	15	20	10
频率	0.1	0.3	0.4	0.2

3. 如果 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\overline{x}$，即 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2.$$

4. 在一次读书活动中，一位同学从 3 本不同的科技书和 2 本不同的文艺书中任选 2 本，求所选的书中既有科技书又有文艺书的概率.

5. 现有 8 名奥运会志愿者，其中志愿者 A_1，A_2，A_3 通晓日语，B_1，B_2，B_3 通晓俄语，C_1，C_2 通晓韩语．从中随机选出通晓日语、俄语和韩语的志愿者各 1 名，组成一个小组．

（1）求 A_1 被选中的概率；

（2）求 B_1 和 C_1 不全被选中的概率．

6. 一种电路控制器在出厂时，每 3 件一等品应装成一箱．工人装箱时，不小心将 2 件二等品和 1 件一等品装入了一箱，为了找出该箱中的二等品，对该箱中的产品逐件进行测试．假设检测员不知道该箱产品中二等品的具体数量，求：

（1）仅测试 2 件就找到全部二等品的概率；

（2）测试的第 2 件产品是二等品的概率；

（3）到第 3 次才测试出全部二等品的概率．

7. 近年来，某市为促进生活垃圾的分类处理，将生活垃圾分为厨余垃圾、可回收物和其他垃圾三类，并分别设置了相应的垃圾箱，为调查居民生活垃圾分类投放情况，现随机抽取了该市三类垃圾箱中总计 1 000 t 生活垃圾．数据统计如下（单位：t）．

	“厨余垃圾”箱	“可回收物”箱	“其他垃圾”箱
厨余垃圾	400	100	100
可回收物	30	240	30
其他垃圾	20	20	60

（1）试估计厨余垃圾投放正确的概率；

（2）试估计生活垃圾投放错误的概率；

（3）假设厨余垃圾在“厨余垃圾”箱、“可回收物”箱、“其他垃圾”箱的投放量分别为 a，b，c，其中 $a>0$，$a+b+c=600$，当数据 a，b，c 的方差 s^2 最大时，写出 a，b，c 的值（结论不要求证明），并求此时 s^2 的值．

8. 已知 A，B 两组各有 7 位病人．他们服用某种药物后的康复时间（单位：天）记录如下：

A 组：10，11，12，13，14，15，16；

B 组：12，13，15，16，17，14，a．

假设所有病人的康复时间相互独立．从 A，B 两组随机各选 1 人，A 组选出的人记为甲，B 组选出的人记为乙．

（1）求甲的康复时间不少于 14 天的概率；

（2）如果 $a=25$，求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率；

（3）写出 a 为何值时，A，B 两组病人康复时间的方差相等（结论不要求证明）．

人民教育出版社

9. 甲、乙两人轮流投篮，每人每次投一球．约定甲先投且先投中者获胜，一直到有人获胜或每人都已投球 3 次时投篮结束．设甲每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{3}$，乙每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{2}$，且各次投篮互不影响．

（1）求乙获胜的概率；

（2）求投篮结束时，乙只投了 2 个球的概率．

C 组

1. 甲、乙、丙三名射箭运动员在某次测试中各射箭 20 次，三人的测试成绩如下表所示．

甲的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	5	5	5	5

乙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	6	4	4	6

丙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	4	6	6	4

用 s_1，s_2，s_3 分别表示甲、乙、丙三名运动员这次测试成绩的标准差，将 s_1，s_2，s_3 按从小到大的顺序排列．

2. 甲、乙两人在 10 天中每天加工零件的个数用茎叶图表示如下，中间一列的数字表示零件个数的十位数，两边的数字表示零件个数的个位数．记这 10 天甲、乙两人日加工零件的平均数分别为 $\overline{x}_1$ 与 $\overline{x}_2$，求 $\overline{x}_1-\overline{x}_2$ 的值．

甲		乙
9 8	1	9 7 1
0 1 3 2 0	2	1 4 2 4
1 1 5	3	0 2 0

（第 2 题）

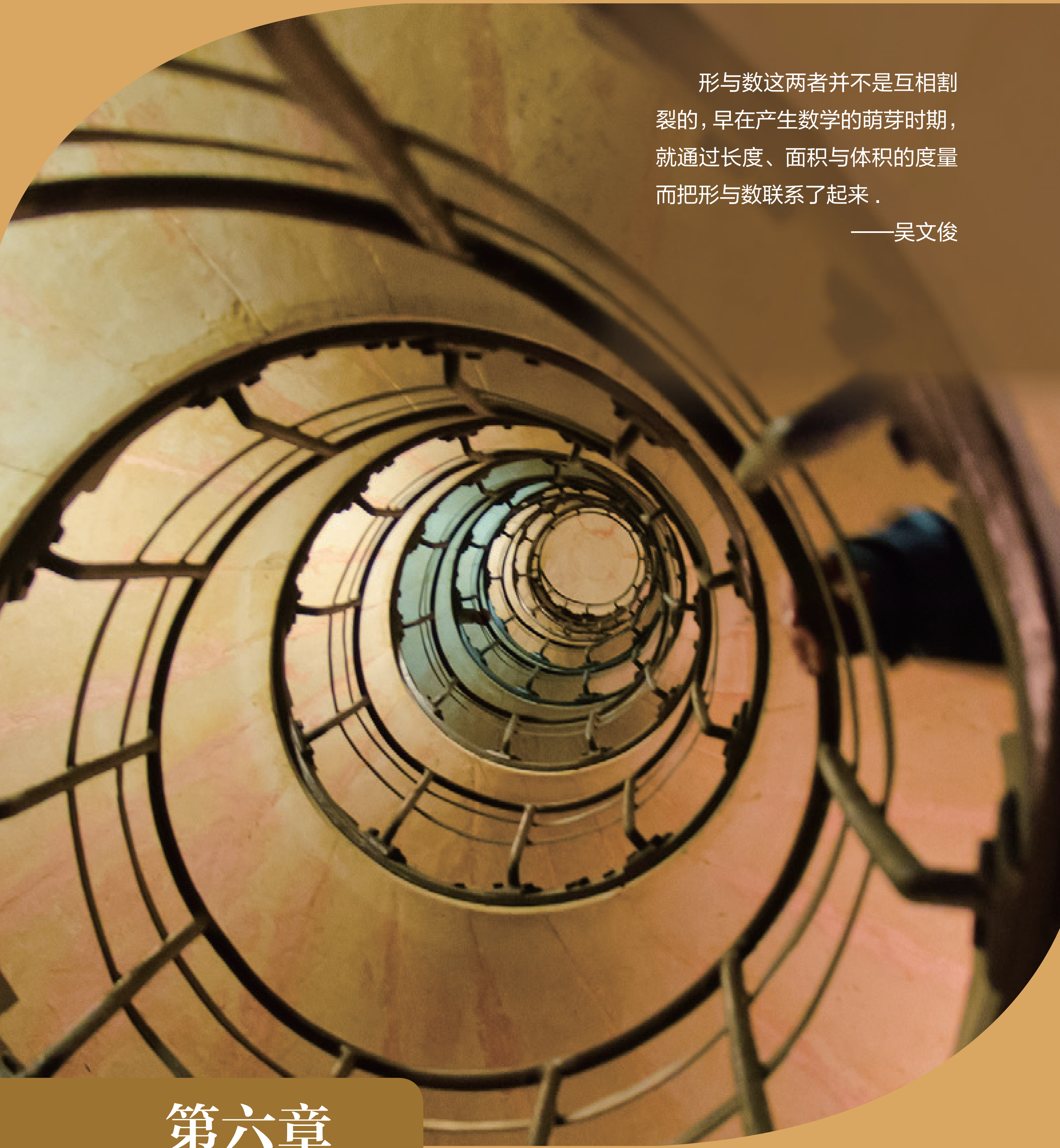
3. 某中学调查了某班全部 45 名同学参加书法社团和演讲社团的情况，数据如下表所示（单位：人）．

	参加书法社团	未参加书法社团
参加演讲社团	8	5
未参加演讲社团	2	30

（1）从该班随机选 1 名同学，求该同学至少参加上述一个社团的概率；

（2）在既参加书法社团又参加演讲社团的 8 名同学中，有 5 名男同学 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，3 名女同学 B_1，B_2，B_3．现从这 5 名男同学和 3 名女同学中各随机选 1 人，求 A_1 被选中且 B_1 未被选中的概率．

人民教育出版社



形与数这两者并不是互相割裂的，早在产生数学的萌芽时期，就通过长度、面积与体积的度量而把形与数联系了起来．

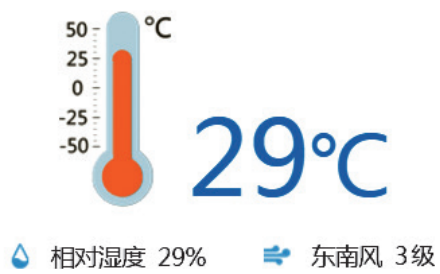
——吴文俊

第六章

平面向量初步

本章导语

你注意过吗？在描述天气的时候，温度和相对湿度都只要用一个实数就可以确切地表达，而风的确切描述，除了用一个实数说明“风力”外，还要给出“风向”，如图所示.



类似有这样差别的量还有很多. 比如，房间的面积、一个储藏室的容积、一个人的身高、一个人的年龄等，用一个实数就能确切地表达；而物体的位移、物体运动的速度、作用在物体上的力等，这些量除了要知道它们的大小外，还必须知道它们的方向，才能确切地描述. 后面这些量，在数学中已经被抽象为向量.

你参加过拔河比赛吗？你在逆风中骑过自行车吗？当你迷路时，你如何走向目的地？在日常生活中，你会经常碰到向量，发现向量是很有用的知识. 向量除了在日常生活中有应用外，在数学的各个分支，例如平面几何、平面直角坐标系等中也都有着重要的应用；向量也是运动学、力学、电学、经济学等许多学科中不可缺少的数学工具.

这一章，我们将带领大家从实例出发，一步一步地把既有大小又有方向的量抽象为向量，并探究如何用数学符号确切地描述向量，再探究向量的运算与应用.

6.1 平面向量及其线性运算

6.1.1 向量的概念

1. 位移与向量

情境与问题

我们在物理学中已经学过位移的有关知识，知道位移是表示物体位置变化的物理量. 如图 6-1-1 所示，当物体从 A 运动到 B 时，不管沿着什么轨迹，它的位移都是一样的，即“向北 300 m”.

（1）图 6-1-1 中，从 B 到 A 的位移是“1 ______”，它与从 A 到 B 的位移有什么关系？

（2）怎样直观地表示位移？用你的方法表示出图 6-1-1 中从 A 到 B，从 A 到 C，从 A 到 D 的位移，说出这三个位移之间的关系.

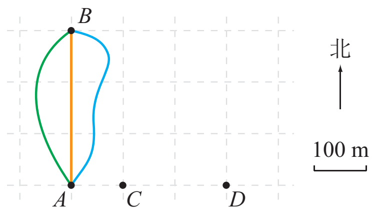


图 6-1-1

位移被“方向”和“距离”唯一确定，其中“距离”也称为位移的大小. 一般地，像位移这样既有大小又有方向的量称为**向量**（也称为矢量），向量的大小也称为向量的**模**（或长度）；只有大小的量称为标量，长度、面积等都是标量.

我们知道，位移可以用带箭头的线段（即有向线段）来直观地表示. 类似地，我们也用有向线段来直观地表示向量，其中有向线段的长度表示向量的大小，有向线段箭头所指的方向表示向量的方向. 而且，通常将有向线段不带箭头的端点称为向量的**始点**（或起点），带箭头的端点称为向量的**终点**. 有向线段始点和终点的相对位置确定向量的大小与方向. 始点为 A 终点为 B 的有向线段表示的向量，可以用符号简记为 $\overrightarrow{AB}$，此时向量的模用 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示.

如图 6-1-2 中，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的方向相同，但是 $\overrightarrow{EF}$ 与它们的方向相反；假设每一小格的边长为 1[①]，则

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{GH}|=2\sqrt{2},\ |\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{EF}|=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad}.$$

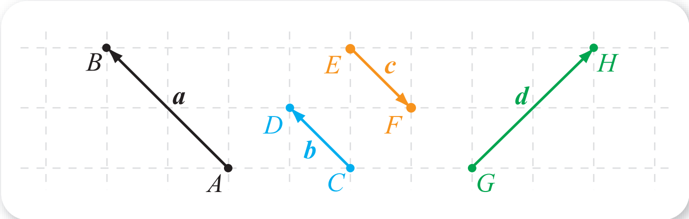


图 6-1-2

除了用始点和终点的两个大写字母来表示向量外，还可用一个小写字母来表示向量：在印刷时，通常用加粗的斜体小写字母如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等来表示向量（如图 6-1-2 所示）；在书写时，用带箭头的小写字母如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 等来表示向量．此时，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模也用 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\vec{a}|$ 来表示．

始点和终点相同的向量称为**零向量**．零向量在印刷时，通常用加粗的阿拉伯数字零表示，即 $\mathbf{0}$；书写时，通常用带箭头的阿拉伯数字零表示，即 $\vec{0}$．不难看出，零向量的模为 0，即

$$|\mathbf{0}|=0.$$

零向量本质上是一个点，因此可以认为零向量的方向是不确定的．模不为 0 的向量通常称为非零向量．

模等于 1 的向量称为**单位向量**．这就是说，如果 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量，则

$$|\boldsymbol{e}|=1;$$

反之也成立．因此，$\boldsymbol{e}$ 是单位向量的充要条件是 $|\boldsymbol{e}|=1$．

例 1 指出图 6-1-3 中，哪些是单位向量．

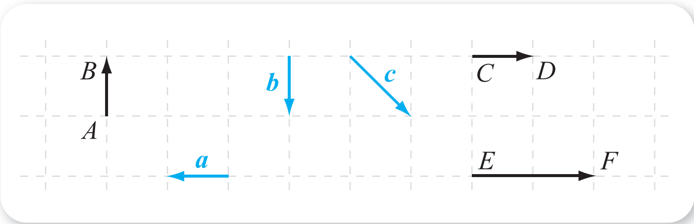


图 6-1-3

解 不难看出

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2},\ |\overrightarrow{EF}|=\boxed{3}\underline{\qquad\quad},$$

且其余向量的模均为 1，因此单位向量有 $\boxed{4}$________________.

① 如不特别声明，本章图中每一小格的边长均默认为 1，下同．

2. 向量的相等与平行

情境与问题

上体育课时，当某一排同学整理好队形，并执行完老师的口令“向前三步走，向右看齐”之后，同学们位移的方向是否相同？位移的大小是否相等？能否认为同学们的位移是相同的？

可以认为，情境中同学们位移的方向和大小都相等，即位移相同.

我们已经知道，向量既有大小又有方向. 一般地，把大小相等、方向相同的向量称为相等的向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}.$$

尝试与发现

图 6-1-4 中，相等的向量有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{EF},\ \boxed{5}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

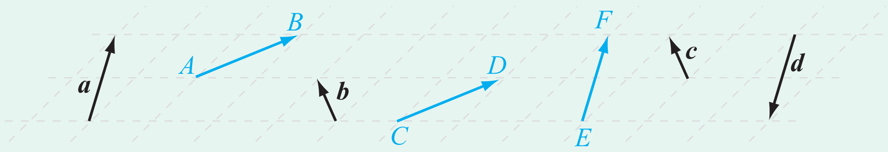


图 6-1-4

例 2 如图 6-1-5，已知四边形 $ABCD$，则“$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的什么条件？

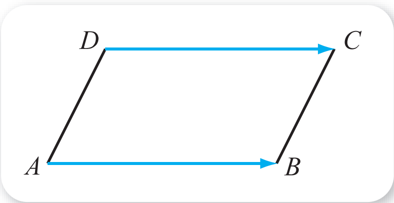


图 6-1-5

解 如果 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，那就表示这两个向量的方向相同而且大小相等，由图可知

$$AB \underline{\parallel} DC,$$

因此四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

反之，如果四边形 $ABCD$ 为平行四边形，则 $AB \underline{\parallel} DC$，因此由图可知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

综上，“$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的充要条件.

例 3 如图 6-1-6 所示，O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，以图中字母为始点或终点，分别写出与向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 相等的向量.

解 因为两个向量相等，只要方向相同大小相等即可，所以

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{DC},$$
$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}.$$

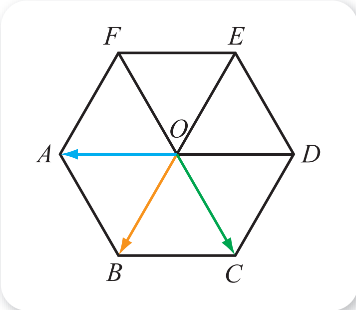


图 6-1-6

如果两个非零向量的方向相同或者相反，则称这两个向量**平行**. 因为零向量的方向不确定，所以通常规定零向量与任意向量平行. 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 两个向量平行也称为两个向量**共线**.

例 4 如图 6-1-7 所示，找出其中共线的向量，并写出共线向量模之间的关系.

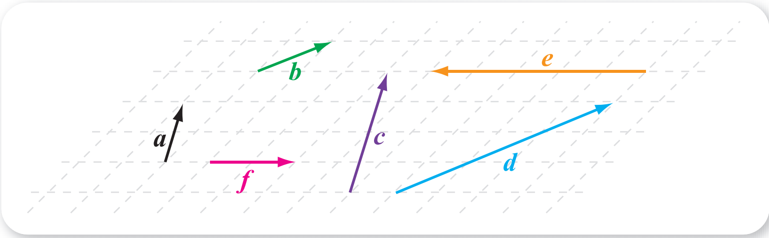


图 6-1-7

解 不难看出

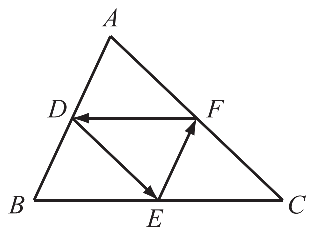
$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c} \text{ 且 } |\boldsymbol{a}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|,$$

$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{d}$ 且 6 ________，

$\boldsymbol{e}/\!/\boldsymbol{f}$ 且 7 ________.

练习A

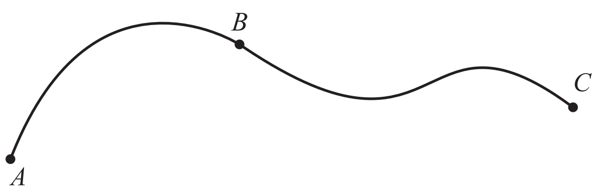
1. 已知 A，B 是平面上两个不同的点，指出向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$ 方向与大小之间的关系.
2. 已知 D，E，F 分别为 $\triangle ABC$ 各边 AB，BC，CA 的中点，以图中字母为始点或终点，分别写出与向量 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FD}$ 相等的向量.
3. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，那么 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 一定成立吗？为什么？



（第 2 题）

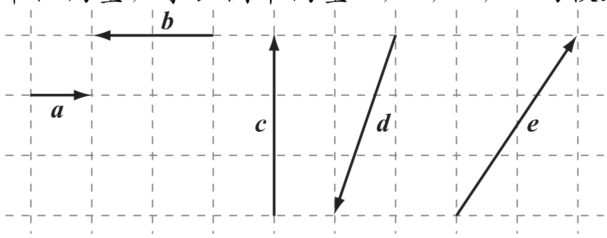
练习B

1. 如图，某人上午从 A 到达了 B，下午从 B 到达了 C，请在图上用有向线段表示出该人上午的位移、下午的位移以及这一天内的位移.



（第 1 题）

❷ 如图，已知 $\boldsymbol{a}$ 是单位向量，求出图中向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{e}$ 的模.



（第 2 题）

❸ (1) “$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行” 是 “$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线” 的什么条件？

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 是 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ 的什么条件？

(3) “$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行” 是 “$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都不是零向量” 的什么条件？

❹ 已知 A，B，C 是平面上三个不同的点：

(1) 如果 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BC}$，那么 A，B，C 三点一定共线吗？

(2) 如果 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不平行，那么 A，B，C 可能共线吗？

❺ 已知 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，那么 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$ 一定成立吗？为什么？

1 向南 300 m　　2 $\sqrt{2}$　　3 2　　4 $\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}$

5 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$　　6 $|\boldsymbol{b}|=\dfrac{1}{3}|\boldsymbol{d}|$　　7 $|\boldsymbol{e}|=\dfrac{5}{2}|\boldsymbol{f}|$

6.1.2 向量的加法

1. 向量加法的三角形法则

情境与问题

如图 6-1-8 所示，假设某人上午从点 A 到达了点 B，下午从点 B 到达了点 C.

(1) 分别用向量表示出该人上午的位移、下午的位移以及这一天的位移；

(2) 这一天的位移与上午的位移、下午的位移有什么联系？试从大小和方向两个角度加以阐述.

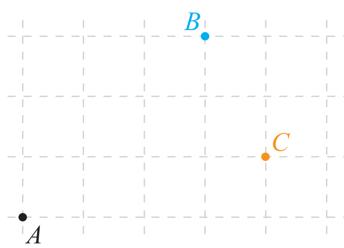


图 6-1-8

位移 $\overrightarrow{AC}$ 可以看成位移 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的和.

一般地，平面上任意给定两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在该平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，作出向量 $\overrightarrow{AC}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**（也称 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和向量**）. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，因此

$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.}$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，求它们的和可用图 6-1-9 所示. 因为此时 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 正好能构成一个三角形，所以上述求两向量和的作图方法也常称为**向量加法的三角形法则**.

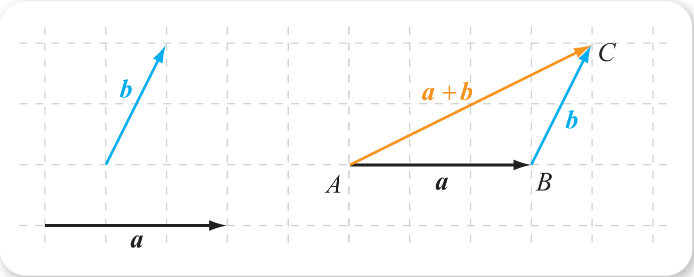


图 6-1-9

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，求它们的和可用如图 6-1-10 表示.

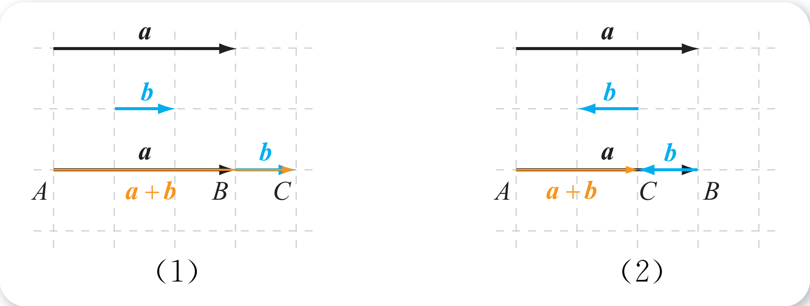


图 6-1-10

值得注意的是，对任意向量 $\boldsymbol{a}$，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

由上可看出，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模之间满足不等式

$$\boxed{\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.}$$

例 1 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最大值和最小值，并说明取得最大值和最小值时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的关系.

解 由

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

可知，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最大值为

$$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=3+4=7,$$

当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时取得最大值.

由

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$$

可知，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最小值为

1 ________，

当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向 2 ________ 时取得最小值.

2. 向量加法的平行四边形法则

情境与问题

从物理学中我们已经知道，力既有大小也有方向，因此力是向量.

当在光滑的水平面上沿两个不同的方向拉动一个静止的物体时，如图 6-1-11 所示，物体会沿着力 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{AC}$ 所在的方向运动吗？如果不会，物体的运动方向将是怎样的？

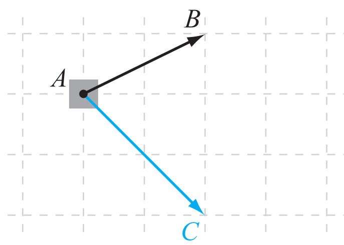


图 6-1-11

我们知道，物理学中力的合成遵循平行四边形法则. 因此，情境中的物体不会沿着 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{AC}$ 所在的方向运动，其会沿着以 AB，AC 为邻边的平行四边形的对角线运动.

一般地，向量的加法也满足类似的法则，这就是说，当两个向量不共线时，可以通过作平行四边形的方法来得到它们的和：如图 6-1-12 所示，平面上任意给定两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在该平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AC 为邻边作一个平行四边形 $ABDC$，作出向量 $\overrightarrow{AD}$，因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$，所以

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

这种求两向量和的作图方法也常称为**向量加法的平行四边形法则**.

由向量加法的平行四边形法则不难看出，向量的加法运算满足交换律，即对于任意的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，都有

$$\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.}$$

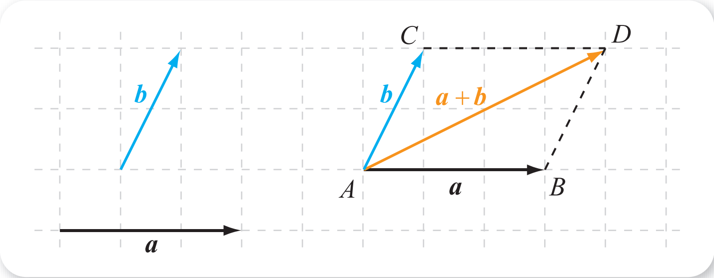


图 6-1-12

3. 多个向量相加

从前面已经知道，两个向量的和还是一个向量，因此我们可以用得到的和向量与另外一个向量相加．而且我们也已经知道，如同数与数的加法一样，向量相加满足交换律，那么向量相加是否满足结合律呢？也就是说，三个向量相加时，最后的结果是否与求和的顺序有关呢？

如图 6-1-13 所示，（1）中给出了三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$；（2）中先作出了向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，然后作出了向量 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$；（3）中首先作出了向量 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，然后作出了向量 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．

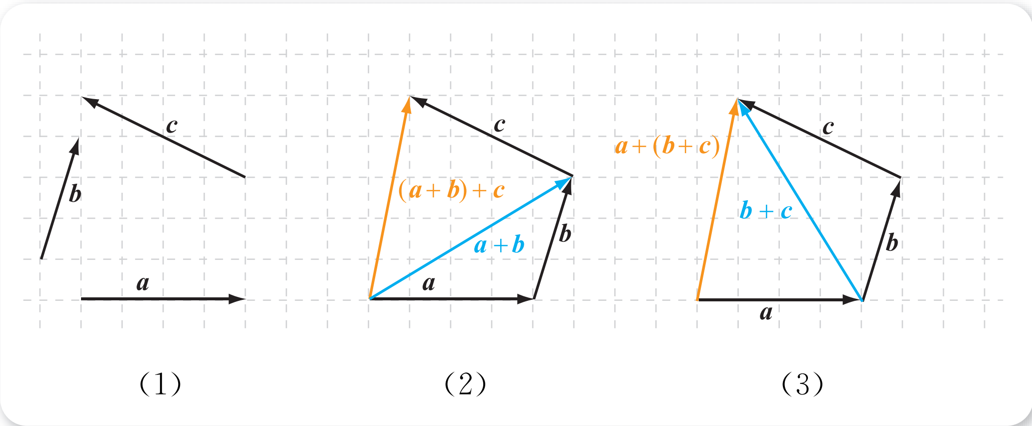


图 6-1-13

不难看出

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),}$$

即向量的加法运算满足**结合律**．

因为向量的加法运算满足交换律和结合律，所以有限个向量相加的结果是唯一的，我们可以任意调换其中向量的位置，也可以任意决定相加的顺序．例如

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})&=\boldsymbol{a}+[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}]\\&=[(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}]+\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

因此，以上运算我们都可用 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ 来表示.

另外，由图 6-1-13 可以看出，为了得到有限个向量的和，只需将这些向量依次首尾相接，那么以第一个向量的始点为始点，最后一个向量的终点为终点的向量，就是这些向量的和，如图 6-1-14 所示.

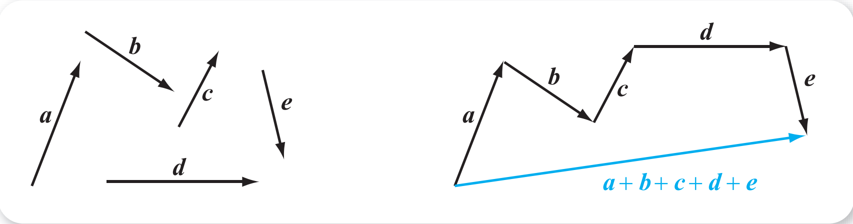


图 6-1-14

想一想

图 6-1-14 中的和，与向量相加的顺序有关吗？为什么？

例 2 化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$；　　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$.

解 (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

(2) $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FA}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF})\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BF}\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})+\overrightarrow{FA}\\&=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FA}\\&=\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

探索与研究

在求作两个向量的和时，可以选择不同的始点. 想一想，选择不同的始点作出的向量和都相等吗？你可能认为，作出的向量和显然都是相等的. 当然，这里你的“显然”是对的，你能根据图 6-1-15 说明这个结论的正确性吗？

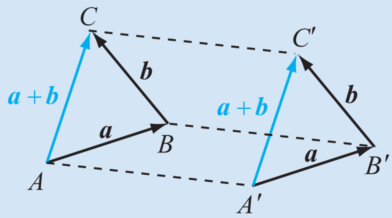


图 6-1-15

练习A

1. 化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}$；　　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}$.

2. 已知 A，B，C 是 $\triangle ABC$ 的三个顶点，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最大值和最小值，并说明取得最大值和最小值时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的关系.

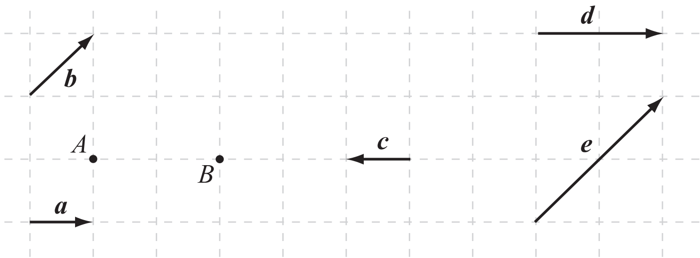
练习B

1. 如图：

(1) 以 A 为始点，作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；

(2) 以 B 为始点，作出 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}$；

(3) 假设 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量，写出 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|$ 和 $|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}|$.



（第 1 题）

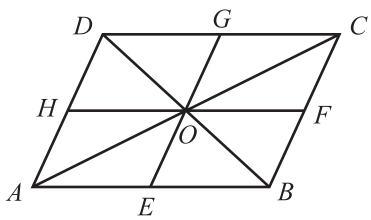
2. 已知 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量，求下列向量的模：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$；　　(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$.

3. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，O 为对角线 AC，BD 的交点，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点. 化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{OD}$；

(2) $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}$.



（第 3 题）

4. (1) 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，那么 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 一定成立吗？

(2) 已知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 一定共线吗？

5. 已知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$，那么 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两一定共线吗？

1 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|3-4|=1$　　2 相反

6.1.3 向量的减法

尝试与发现

已知向量 $\overrightarrow{AD}$ 是向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\boldsymbol{x}$ 的和，如图 6-1-16 所示，你能作出表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的有向线段吗？

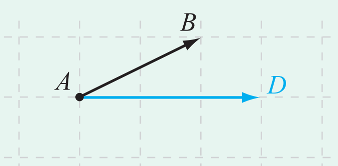


图 6-1-16

一般地，平面上任意给定两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，如果向量 $\boldsymbol{x}$ 能够满足 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，并记作

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

不难看出，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，作出向量 $\overrightarrow{BA}$，注意到 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，因此向量 $\overrightarrow{BA}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差（也称 $\overrightarrow{BA}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量），即

$$\boxed{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.}$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的差可用图 6-1-17 表示，此时向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 正好能构成一个三角形，因此上述求两向量差的作图方法也常称为向量减法的三角形法则.

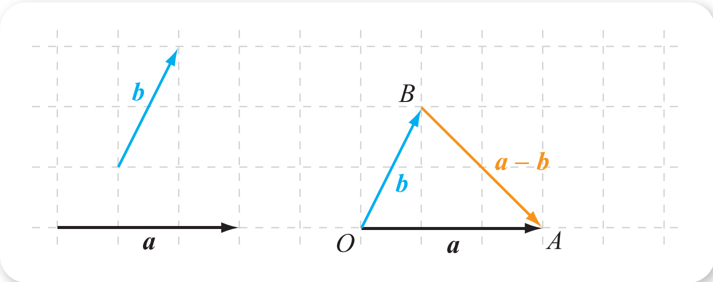


图 6-1-17

类似于 3 的相反数是 -3，给定一个向量，我们把与这个向量方向相反、大小相等的向量称为它的相反向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量记作 $-\boldsymbol{a}$. 因此，$\overrightarrow{AB}$ 的相反向量是 $-\overrightarrow{AB}$，而且 $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. 因为零向量的始点与终点相同，所以 $-\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

不难看出，任何一个向量与它的相反向量的和等于零向量，即

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0},\ \overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AB})=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad}.$$

如同在数的运算中，减法可以看成加法的逆运算，即 $x-y=x+(-y)$ 一样，不难看出，向量的减法也可以看成向量的加法的逆运算，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

也就是：一个向量减去另一个向量，等于第一个向量加上第二个向量的相反向量. 这一结论也可从图 6-1-18 中看出来.

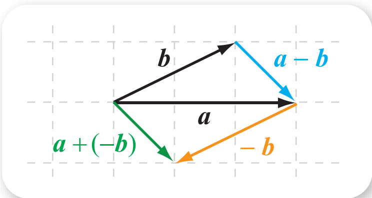


图 6-1-18

例 1 已知平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$.

解 如图 6-1-19 所示，由向量加法的平行四边形法则可知

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

按照减法的定义可知

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

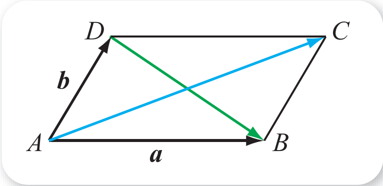


图 6-1-19

例 2 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的取值范围.

解 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，由向量减法的三角形法则可知，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 正好是一个三角形的三条边，从而

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

因此 $1<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<3$.

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，不难看出：

如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，有

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=1;$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反，有

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=\boxed{2}\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

综上有

$$1\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant\boxed{3}\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

练习A

1. 化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{MN}$；

(2) $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{BC}$.

2. 已知四边形 $ABCD$ 是矩形，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$.

3. 如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值.

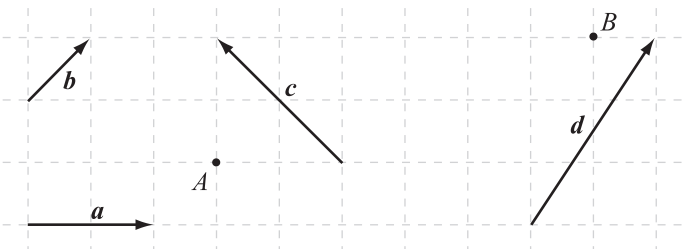
练习B

1. 如图：

(1) 以 A 为始点，作出 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$；

(2) 以 B 为始点，作出 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$；

(3) 假设 $|\boldsymbol{a}|=2$，写出 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}|$.



（第 1 题）

❷ 求证：$\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}$.

❸ 已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示：

（1）$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CB}$；

（2）$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CA}$.

❹ 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=2$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的取值范围.

❺ 说明向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的模之间满足不等式

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

并说明什么时候取等号.

1 **0**　　2 3　　3 3

6.1.4 数乘向量

我们已经知道，多个向量相加，结果是一个向量. 特别地，给定一个向量 $\boldsymbol{a}$，3 个 $\boldsymbol{a}$ 相加 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 的结果，是一个模为 $3|\boldsymbol{a}|$、方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同的向量，如图 6-1-20（1）所示，通常这个向量简记为 $3\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{a};$$

3 个 $-\boldsymbol{a}$ 相加 $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$ 的结果，是一个模为 $3|\boldsymbol{a}|$、方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反的向量，如图 6-1-20（2）所示，通常这个向量简记为 $-3\boldsymbol{a}$，即

$$(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})=-3\boldsymbol{a}.$$

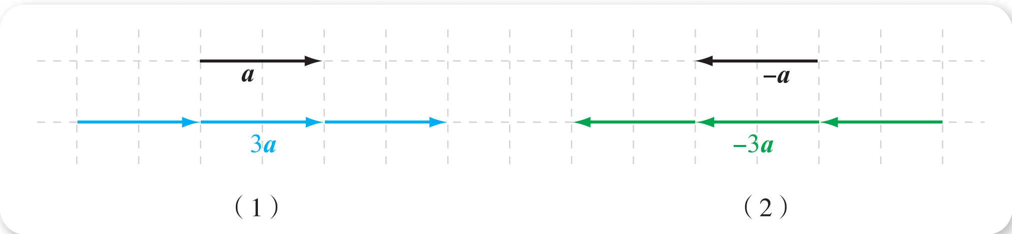


图 6-1-20

尝试与发现

你能根据上述实例，给出实数 λ 与任意一个向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的定义吗？

一般地，给定一个实数 λ 与任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，规定它们的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，其中：

（1）当 $\lambda\neq0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$，而且 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向如下：

① 当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；

② 当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

（2）当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

上述实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 相乘的运算简称为**数乘向量**．由定义不难看出，数乘向量的结果是一个向量，而且这个向量与原来的向量共线（平行），即 $\lambda\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{a}$；数乘向量的几何意义是，把向量沿着它的方向或反方向放大或缩小．特别地，一个向量的相反向量可以看成-1 与这个向量的乘积，即 $-\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a}$.

当 λ 和 μ 都是实数，且 $\boldsymbol{a}$ 是向量时：$\mu\boldsymbol{a}$ 是向量，$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 也是向量；$\lambda\mu$ 是实数，但 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 是向量．可以看出

$$\boxed{\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.}$$

例如，

$$3\times(4\boldsymbol{a})=(3\times4)\boldsymbol{a}=12\boldsymbol{a},$$
$$(-2)\times(-\boldsymbol{a})=[(-2)\times(-1)]\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}.$$

由此可知，$(3\times4)\boldsymbol{a}$ 写成 $3\times4\boldsymbol{a}$ 也不会产生歧义．以后我们常将 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 简单地写成 $\lambda\mu\boldsymbol{a}$.

数乘向量的定义说明，如果存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$.

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{e}$ 为非零向量，判断 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否平行，并求 $|\boldsymbol{a}|:|\boldsymbol{b}|$ 的值.

解 由 $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}$ 得 $\boldsymbol{e}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，代入 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$ 得 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$.

因此 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{a}|=\dfrac{3}{2}|\boldsymbol{b}|$，即 $|\boldsymbol{a}|:|\boldsymbol{b}|=\dfrac{3}{2}$.

利用数乘向量，可以方便地研究三点共线的情形．例如，当 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ 时，A，B，C 三点一定共线，而且点 B 为线段 AC 的中点；当 $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{ON}$ 时，M，N，O 三点共线，而且 N 为线段 OM 的一个三等分点，如图 6-1-21 所示.

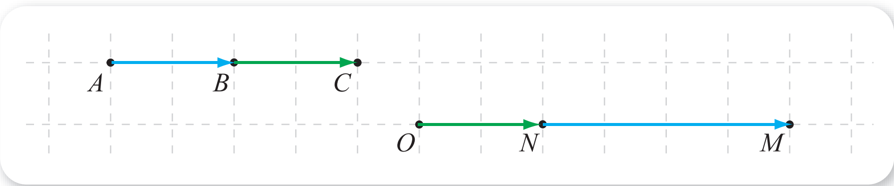


图 6-1-21

一般地，如果存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 平行且有公共点 A，从而 A，B，C 三点一定共线.

例 2 已知 $\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{AC}=5\boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{e}$ 为非零向量，判断 A，B，C 三点是否共线. 如果共线，求出 $AB:AC$.

解 由已知可得

$$\overrightarrow{AC}=\boxed{1}\_\_\_\_\_\_\overrightarrow{AB},$$

因此 A，B，C 三点共线，且 $AC=\boxed{2}\_\_\_\_\_\_AB$，即

$$AB:AC=\boxed{3}\_\_\_\_\_\_.$$

练习A

1. 写出向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $3\boldsymbol{a}$ 的方向之间的关系，以及向量 $-3\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的长度之间的关系.
2. 化简下列各式：

   (1) $\dfrac{1}{2}\times4\boldsymbol{a}$；　　(2) $\dfrac{1}{3}\times2\times9\boldsymbol{a}$；　　(3) $6\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\boldsymbol{a}$.
3. 判断命题 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$ 的真假.
4. 分别指出以下各题中 A，B，C 三点是否一定共线. 如果共线，指出线段 AB 与 BC 的长度之比.

   (1) $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{BC}$；　　(2) $\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

练习B

1. 已知 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，实数 $\lambda\neq0$，判断下列命题的真假：

   (1) $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向一定相同；

   (2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反的充要条件是 $\lambda<0$.
2. 当 M，N，O 三点共线，而且 O 为线段 MN 的最靠近点 M 的五等分点时，写出下列向量之间的关系：

   (1) $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$；　　(2) $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{NO}$.
3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，用 $\boldsymbol{a}$ 表示出与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量，以及与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反的单位向量.
4. 已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，AC 与 BD 相交于 O，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{OB}$.

$\boxed{1}$ -5　　$\boxed{2}$ 5　　$\boxed{3}$ $1:5$

6.1.5 向量的线性运算

1. 向量的加法与数乘向量的混合运算

向量的加法运算、数乘向量运算，它们的结果都是向量，这就是说，这两者可以进行混合运算. 例如，对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，式子（$6\boldsymbol{a}$）+（$2\boldsymbol{a}$）是有意义的.

一般地，一个含有向量加法、数乘向量运算的式子，总是规定要先算数乘向量，再算向量加法. 因此，$(6\boldsymbol{a})+(2\boldsymbol{a})$ 可以简写成 $6\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}$. 另外，不难看出 $6\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{a}$.

一般地，对于实数 λ 与 μ，以及向量 $\boldsymbol{a}$，有

$$\boxed{\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}.}$$

这可以通过对 λ，μ 以及 $\lambda+\mu$ 的符号进行讨论得到. 例如，当 λ，μ 都是正数时，不难看出 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 和（$\lambda+\mu$）$\boldsymbol{a}$ 的方向都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，而且模都等于（$\lambda+\mu$）$|\boldsymbol{a}|$，所以此时 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$.

如图 6-1-22 所示，下面我们来考虑 $3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 之间的关系.

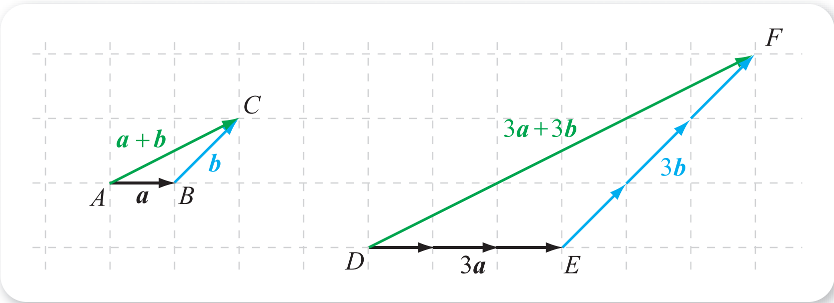


图 6-1-22

在图 6-1-22 中，$\overrightarrow{DE}=3\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{EF}=3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DF}=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$. 注意到 $\angle DEF=\angle ABC$，$|\overrightarrow{DE}|=3|\overrightarrow{AB}|$，$|\overrightarrow{EF}|=3|\overrightarrow{BC}|$，所以 $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$，因此 $\overrightarrow{DF}/\!/\overrightarrow{AC}$，且 $|\overrightarrow{DF}|=3|\overrightarrow{AC}|$，从而有 $\overrightarrow{DF}=3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，即

$$3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

一般地，对于任意实数 λ，以及向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，有

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.}$$

例 1 化简：$5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

解 原式 $=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}$

$=(5+2)\boldsymbol{a}+(1+2)\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

2. 向量的线性运算

不难看出，向量的减法也能与向量的加法、数乘向量进行混合运算．向量的加法、减法、数乘向量以及它们的混合运算，统称为向量的**线性运算**．

向量的线性运算，总规定要先计算数乘向量，再按从左往右的顺序进行计算，若有括号，要先算括号内各项．因此，$[\boldsymbol{a}-(2\boldsymbol{b})]+(6\boldsymbol{a})$ 可以简单地写成 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{a}$．

另外，由于向量的加法满足交换律与结合律，减去一个向量可以看成加上这个向量的相反向量，因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}+(-2\boldsymbol{b})+6\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{a}+(-2\boldsymbol{b})\\&=7\boldsymbol{a}+(-2\boldsymbol{b})=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

事实上，当一个向量的线性运算中含有括号时，我们可以用类似多项式运算中拆括号的方式来去掉其中的括号，例如

$$-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}.$$

例 2 化简下列各式：

(1) $2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　(2) $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $2\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\times3\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\times4\boldsymbol{a}$；　(4) $(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$．

解 (1) 原式 $=2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{b}$．

(2) 原式 $=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$．

(3) 原式 $=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．

(4) 原式
$$\begin{aligned}&=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}-(\lambda+\mu)\boldsymbol{b}+(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}+(\lambda-\mu)\boldsymbol{b}\\&=[(\lambda+\mu)+(\lambda-\mu)]\boldsymbol{a}+[(\lambda-\mu)-(\lambda+\mu)]\boldsymbol{b}\\&=2\lambda\boldsymbol{a}+(-2\mu)\boldsymbol{b}\\&=2\lambda\boldsymbol{a}-2\mu\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

例 3 如图 6-1-23 所示，已知 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，求证：$\overrightarrow{DE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$．

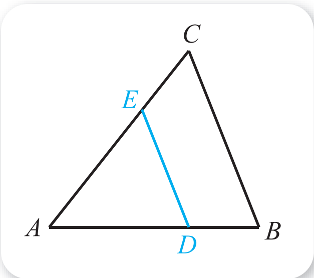


图 6-1-23

证明 由已知得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad}.\end{aligned}$$

例 4 已知 M 为线段 AB 的中点，且 O 为任意一点，求证：

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

证明 由 M 为线段 AB 的中点可知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，因此

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

从而有 $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，即

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

例 5 已知 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，求证：$M$ 为线段 AB 的中点.

证明 由 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ 可知 $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，因此

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

从而有 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，即 M 为线段 AB 的中点.

例 4 与例 5 的结果说明，M 为线段 AB 中点的充要条件是

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

例 6 已知 A，B，C 是三个不同的点，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$. 求证：$A$，$B$，$C$ 三点共线.

证明 因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad},$$

所以 $\overrightarrow{AC}=\boxed{3}\underline{\qquad\qquad}\overrightarrow{AB}$，因此 A，B，C 三点共线.

练习A

1. 化简下列各式：

(1) $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$； (2) $2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$；

(3) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{DA}$； (4) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CD}$.

2. 已知 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}$，求 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，求证：$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

练习B

1. 已知 $\overrightarrow{MP}=4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{PQ}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$. 求证：$M$，$P$，$Q$ 三点共线.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，求 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$ 的最大值和最小值，并说明取得最大值和最小值时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的关系.

3 已知 $3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$，求证：$A$，$B$，$C$ 三点共线.

4 已知$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 中，$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$，求 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{EF}$ 的关系，并求出$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 的面积之比.

1 $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$　　2 $2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$　　3 2

习题6-1A

1 化简下列各式：

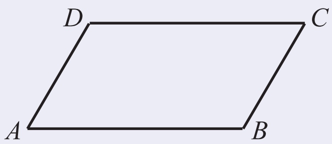
(1) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$；　　(2) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$；　　(4) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$.

2 如图，已知 $ABCD$ 是平行四边形，化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$；

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$.



（第 2 题）

3 任作一非零向量 $\overrightarrow{OA}$，然后作出 $\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

4 把下列向量 $\boldsymbol{a}$ 表示为数乘向量 $\boldsymbol{b}$ 的形式：

(1) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-6\boldsymbol{e}$；　　(2) $\boldsymbol{a}=\frac{3}{4}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}$.

5 化简：

(1) $2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；　　(2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

习题6-1B

1 分别根据下列条件判断四边形 $ABCD$ 的形状：

(1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$；

(2) $\overrightarrow{AD}/\!/\overrightarrow{BC}$，并且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 不平行；

(3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，并且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$.

2 化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$；　　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$；　　(4) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$.

3 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，作图验证：

(1) $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；　　(2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$.

人民教育出版社

4. 解关于向量 $\boldsymbol{x}$ 的方程：

(1) $2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})$； (2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{x})=3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$.

5. 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2$，判断 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是否共线，并说明理由.

6. 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{b}$. 求证：$A$，$B$，$C$ 三点在一条直线上.

习题6-1C

1. 已知点 E，F，G，H 分别是平面四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点，求证：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

2. 已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足条件 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，表示它们的有向线段是否一定能构成三角形？如果不一定，那么 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足什么条件才能构成三角形？

3. 已知 M，N 分别是线段 AB 和 CD 的中点，求证：

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

6.2 向量基本定理与向量的坐标

6.2.1 向量基本定理

1. 共线向量基本定理

前面我们已经看到，当存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 时，$\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$. 那么，这个结论反过来是否成立呢？

例 1　如图 6-2-1 所示，判断向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{e}$ 是否可以写成数与向量 $\boldsymbol{a}$ 相乘. 如果可以，写出表达式；如果不可以，说明理由.

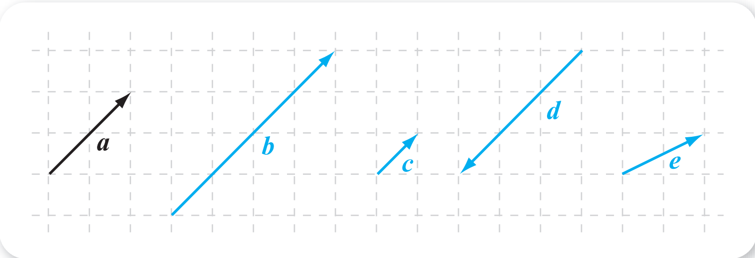


图 6-2-1

解　因为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，而且 $|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，所以 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$；

因为 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，而且 $|\boldsymbol{c}|=$ 1 ________，所以 $\boldsymbol{c}=$ 2 ________；

因为 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，而且 3 ________，所以 4 ________；

因为 $\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不平行，所以 $\boldsymbol{e}$ 不能写成数与向量 $\boldsymbol{a}$ 相乘.

一般地，有如下共线向量基本定理：

如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$，则存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

在共线向量基本定理中：

(1) $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 时，通常称为 $\boldsymbol{b}$ 能用 $\boldsymbol{a}$ 表示.

(2) 其中的“唯一”指的是，如果还有 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则有 $\lambda=\mu$. 这是因为：由 $\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}$ 可知 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，如果 $\lambda-\mu\neq 0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，与已知矛盾，所以 $\lambda-\mu=0$，即 $\lambda=\mu$.

由共线向量基本定理以及前面介绍过的结论可知，如果 A，B，C 是三

个不同的点，则它们共线的充要条件是：存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$.

尝试与发现

如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，什么时候存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$？这样的 λ 有多少个？什么时候不存在这样的实数 λ？

可以看出，此时只有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时才存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，而且这样的 λ 可以是任意实数.

2. 平面向量基本定理

情境与问题

共线向量基本定理的实质是，所有共线的向量中，只要指定一个非零向量，则其他向量都可以用这个向量表示出来．那么，这个结论是否可以推广到所有共面的向量呢？

从前面我们已经看到，如图 6-2-2 所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．也就是说，向量 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{DB}$ 都写成了向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的线性运算.

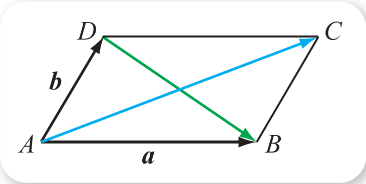


图 6-2-2

尝试与发现

如图 6-2-3 所示，已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{f}$ 的始点相同，你能分别将 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{f}$ 写成向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的线性运算吗？

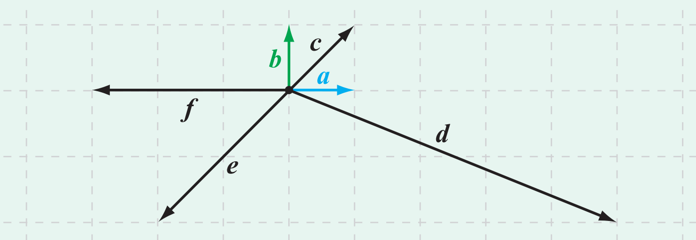


图 6-2-3

不难看出，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{e}=-2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{f}=-3\boldsymbol{a}$.

一般地，有如下平面向量基本定理：

如果平面内两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则对该平面内任意一个向量 $\boldsymbol{c}$，存

在唯一的实数对（x，y），使得

$$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

上述实数对（x，y）可以用如下方式找到：如图 6-2-4 所示，将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的始点平移到一起，假设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，将向量 $\boldsymbol{c}$ 的始点也平移到 O 点，以 OA，OB 所在的直线为相邻的边，以 OC 为对角线作平行四边形 $ODCE$.

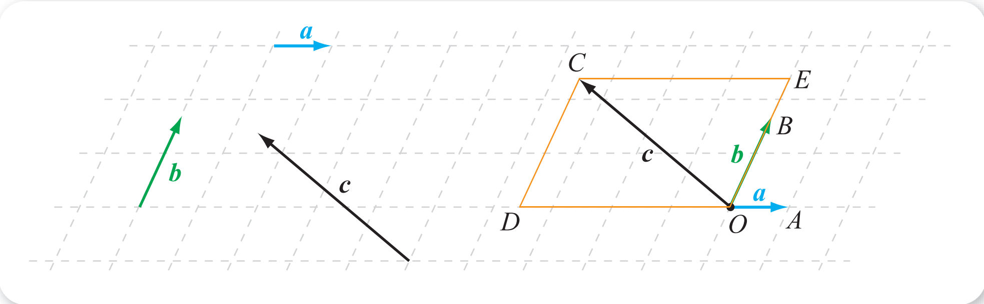


图 6-2-4

因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 又因为 $\overrightarrow{OD}/\!/\boldsymbol{a}$，所以由共线向量基本定理可得，存在唯一的 x，使得 $\overrightarrow{OD}=x\boldsymbol{a}$；同理，存在唯一的 y，使得 $\overrightarrow{OE}=y\boldsymbol{b}$. 又由向量加法的平行四边形法则可知 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$，从而

$$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

想一想：当向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 共线时，如何找到相应的实数对（x，y）?

例 2 如图 6-2-5 所示，用 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{f}$.

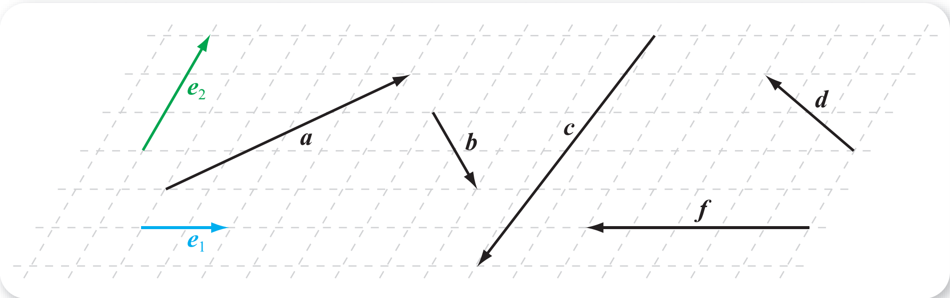


图 6-2-5

解 由图不难看出

$$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{c}=\boxed{5}\underline{\qquad\qquad},$$

$$\boldsymbol{d}=\boxed{6}\underline{\qquad\qquad},\quad \boldsymbol{f}=\boxed{7}\underline{\qquad\qquad}.$$

平面向量基本定理中，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，“唯一的实数对”指的是 $\boldsymbol{c}$ 用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示时，表达式唯一，即如果

$$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b},$$

那么 $x=u$ 且 $y=v$.

这是因为由 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 可知 $(x-u)\boldsymbol{a}=(v-y)\boldsymbol{b}$，如果 $x-u\neq$

0，则

$$\boldsymbol{a}=\frac{v-y}{x-u}\boldsymbol{b},$$

从而可知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，与已知矛盾，因此 $x-u=0$ 即 $x=u$. 同理可得 $y=v$.

特别地，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，因为 $\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}$，所以对于 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 来说，当 $x\neq0$ 或 $y\neq0$ 时，必定有 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 也就是说，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 x 与 y 中至少有一个不为 0.

平面向量基本定理是说，在给定的平面内，当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，任意一个向量 $\boldsymbol{c}$，都可以写成 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的线性运算（简称为用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{c}$），而且表达式唯一. 因此，平面内不共线的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 组成该平面上向量的一组**基底**，记为 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$，此时如果 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则称$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{c}$ 在基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 下的分解式.

例 3 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，而且 $\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}$ 与 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线，求 x 的值.

解 因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，因此由已知可得存在实数 t，使得

$$\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}=t(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}),$$

即 $\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}=3t\boldsymbol{a}+2t\boldsymbol{b}$，从而$\begin{cases}1=3t,\\-x=2t,\end{cases}$ 解得 $x=-\dfrac{2}{3}$.

例 4 如图 6-2-6 所示，已知平面上点 O 是直线 l 外一点，A，B 是直线 l 上给定的两点，求证：平面内任意一点 P 在直线 l 上的充要条件是，存在实数 t，使得

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}.$$

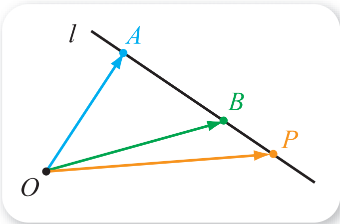


图 6-2-6

证明 先证必要性. 设点 P 在直线 l 上，则由共线向量基本定理知，存在实数 t，使

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB},$$

因此 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，所以

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}.$$

再证充分性. 如果 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，则

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-t\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},$$

从而 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}$，即 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，因此 P，A，B 三点共线，即 P 在直线 l 上.

在例 4 中，如果令 $t=\dfrac{1}{2}$，则可得点 P 是线段 AB 中点的充要条件为

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$

这与前面我们得到的结论是一致的.

例 5 在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，E 是线段 OD 的中点，AE 的延长线与 CD 交于点 F. 若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用基底 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$ 分别表示下列向量：

（1）$\overrightarrow{AE}$；（2）$\overrightarrow{AF}$.

解 （1）如图 6-2-7 所示，由已知有

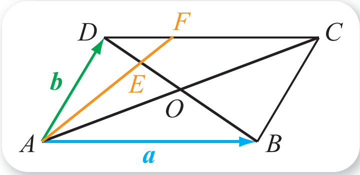


图 6-2-7

$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$，从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}\\&=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

（2）因为 $\triangle DEF\backsim\triangle BEA$，而且

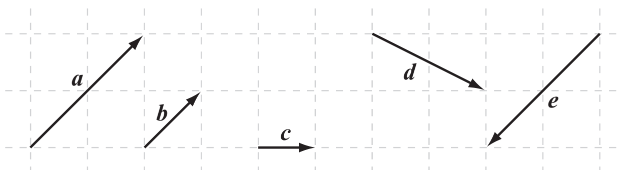
$$\frac{DF}{BA}=\frac{DE}{BE}=\frac{1}{3},$$

所以 $DF=\frac{1}{3}AB$，于是

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{a}.$$

练习A

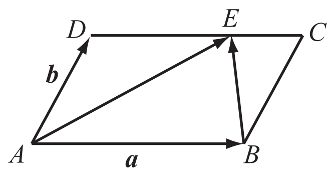
1. 如图，判断向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{e}$ 是否可以写成数与向量 $\boldsymbol{a}$ 相乘. 如果可以，写出表达式；如果不可以，说明理由.



（第 1 题）

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $2\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，求 x，y 的值.

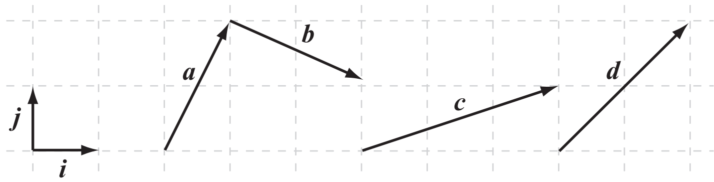
3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$E$ 为 DC 上一点，且 $DE=2EC$，试用基底 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$ 表示 $\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{BE}$.



（第 3 题）

练习B

❶ 如图所示，用 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，并用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$.



（第 1 题）

❷ 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，而且 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{p}=7\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 表示 $\boldsymbol{p}$.

❸ 已知$\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\}$是平面向量的一组基底，下列哪些能组成平面向量的一组基底？哪些不能？说明理由.

（1）$\{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\}$；　　（2）$\{3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\}$；

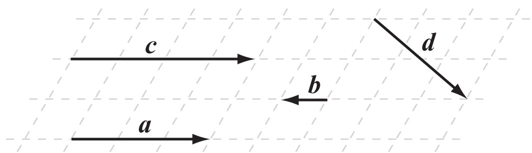
（3）$\{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\}$；　　（4）$\{2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}\}$.

❹ 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，那么 $s\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}$ 一定不共线吗？其中 s，t 都为实数.

❺ 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线：

（1）写出向量 $\boldsymbol{c}$ 用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示的两种方法；

（2）向量 $\boldsymbol{d}$ 能否用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示？为什么？



（第 5 题）

❻ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 可能共线吗？请说明理由.

1 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|$　2 $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$　3 $|\boldsymbol{d}|=\frac{3}{2}|\boldsymbol{a}|$　4 $\boldsymbol{d}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$　5 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$

6 $-\frac{3}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2$　7 $-\frac{5}{2}\boldsymbol{e}_1$

6.2.2 直线上向量的坐标及其运算

本小节我们考察所有始点与终点都在同一条直线上的向量．我们约定，直线上的向量特指始点与终点都在这条直线上的向量.

人民教育出版社

1. 直线上向量的坐标

给定一条直线 l 以及这条直线上一个单位向量 $\boldsymbol{e}$，由共线向量基本定理可知，对于直线 l 上的任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，一定存在唯一的实数 x，使得

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e},$$

此时，x 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**.

值得注意的是，如果直线上向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 x，则 x 既能刻画 $\boldsymbol{a}$ 的模，也能刻画向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向. 事实上，此时

$$|\boldsymbol{a}|=|x\boldsymbol{e}|=|x||\boldsymbol{e}|=|x|;$$

而且：当 $x>0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{e}$ 的方向相同；当 $x=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 是零向量；当 $x<0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{e}$ 的方向相反. 也就是说，在直线上给定了单位向量之后，直线上的向量完全被其坐标确定.

直线上向量的坐标还可以按如下方式来直观理解：如图 6-2-8 所示，在直线 l 上指定一点 O 作为原点，以 $\boldsymbol{e}$ 的方向为正方向，$\boldsymbol{e}$ 的模为单位长度建立数轴，对于 l 上的任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，如果我们把它的始点平移到原点 O，那么 $\boldsymbol{a}$ 的终点对应的数就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

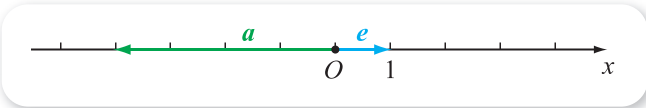


图 6-2-8

图 6-2-8 中，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 -4. 特别地，$\boldsymbol{e}$ 的坐标为 1.

为了方便起见，以后谈到直线上向量的坐标时，总是默认为已经按照上述方式指定了单位向量 $\boldsymbol{e}$，并建立了数轴；而且，谈到数轴时，也默认为已经指定了与数轴正方向同向的单位向量 $\boldsymbol{e}$. 此时：如果数轴上一点 A 对应的数为 x（记为 $A(x)$，也称点 A 的坐标为 x），那么向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的坐标为 x；反之，这一结论也成立.

因此，为了求出直线上向量的坐标，可以选择如下两种方法中的任何一种：

（1）将向量用单位向量 $\boldsymbol{e}$ 表示出来；

（2）将向量的始点平移到原点，读出终点的坐标.

例 1 如图 6-2-9 所示，求出直线上向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标.

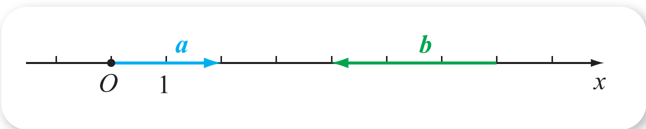


图 6-2-9

解 因为 $\boldsymbol{a}$ 的始点在原点，所以由 $\boldsymbol{a}$ 的终点坐标可知 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 1 ________.

因为 $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}$，所以 $\boldsymbol{b}$ 的坐标为 2 ________.

2. 直线上向量的运算与坐标的关系

尝试与发现

直线上的向量有了坐标之后，向量的相等以及运算与它们对应的坐标之间有什么关系？

假设直线上两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为 x_1，x_2，即

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{e}.$$

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，有 $x_1\boldsymbol{e}=x_2\boldsymbol{e}$，由 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量可知 $x_1=x_2$；反之，结论也成立．这就是说，直线上两个向量相等的充要条件是它们的坐标相等.

另外，因为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{e}+x_2\boldsymbol{e}=(x_1+x_2)\boldsymbol{e},$$

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标是 x_1+x_2，这就是说，直线上两个向量和的坐标等于两个向量的坐标的和.

类似地，可以得出，如果 u，v 是两个实数，那么 $u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 的坐标为 ux_1+vx_2，$u\boldsymbol{a}-v\boldsymbol{b}$ 的坐标为 3 ________.

例 2 已知直线上向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 -2，$\boldsymbol{b}$ 的坐标为 5，求下列向量的坐标：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　（2）$\frac{1}{5}\boldsymbol{b}$；　（3）$-2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

解 （1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $-2+5=3$.

（2）$\frac{1}{5}\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $\frac{1}{5}\times 5=1$.

（3）$-2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $(-2)\times(-2)-3\times 5=-11$.

利用上述直线上向量的运算与坐标之间的关系，由数轴上任意两点的坐标，我们可以求出它们之间的距离，以及它们中点的坐标.

事实上，设 $A(x_1)$，$B(x_2)$ 是数轴上两点，O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{OB}=x_2\boldsymbol{e}$，因此

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=x_2\boldsymbol{e}-x_1\boldsymbol{e}=(x_2-x_1)\boldsymbol{e},$$

所以不难看出

$$\boxed{AB=|\overrightarrow{AB}|=|x_2-x_1|.}$$

这就是数轴上两点之间的距离公式.

另外，假设 $M(x)$ 是线段 AB 的中点，则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{x_1\boldsymbol{e}+x_2\boldsymbol{e}}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}\boldsymbol{e},$$

又因为 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}$，所以

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2}.}$$

这就是数轴上的中点坐标公式.

例 3 设数轴上两点 A，B 的坐标分别为 3，-7，求：

（1）向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标，以及 A 与 B 的距离；

（2）线段 AB 中点的坐标.

解 （1）由题意得 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标为 3，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标为 -7，又因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 $-7-3=-10$，而且

$$AB=|\overrightarrow{AB}|=|-10|=10.$$

（2）设线段 AB 中点的坐标为 x，则

$$x=\frac{3+(-7)}{2}=-2.$$

练习A

1. 已知 $\boldsymbol{e}$ 是直线 l 上的一个单位向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是直线 l 上的向量，分别在下列条件下写出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的坐标：

（1）$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-6\boldsymbol{e}$；　　（2）$\boldsymbol{a}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}$.

2. 写出数轴上零向量的坐标.

3. 设数轴上两点 A，B 的坐标分别为 -1，3，求：

（1）向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标，以及 A 与 B 的距离；　　（2）线段 AB 中点的坐标.

练习B

1. 已知 $\boldsymbol{e}$ 是直线 l 上的一个单位向量，直线 l 上向量 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标为 x，判断下列命题是否正确：

（1）$|\boldsymbol{e}|=1$；　　（2）$|\boldsymbol{a}|=x$.

2. 已知 $\boldsymbol{e}$ 是直线 l 上的一个单位向量，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是直线 l 上的向量，且 $\boldsymbol{a}=\frac{2}{3}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-\frac{5}{6}\boldsymbol{e}$，求 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$.

3. 已知 A，B 都是数轴上的点，$A(3)$，且 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 -5，求点 B 的坐标.

1 2　　2 -3　　3 ux_1-vx_2

6.2.3 平面向量的坐标及其运算

1. 平面向量的坐标

平面上的两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果它们所在的直线互相垂直，我们就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 为了方便起见，规定零向量与任意向量都垂直.

我们已经从平面向量基本定理知道，给定平面内两个不共线的向量（即给定一组基底）后，平面内的任意一个向量都能用这两个向量表示.

如果平面向量的基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 中，$\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$，就称这组基底为正交基底；在正交基底下向量的分解称为向量的正交分解.

尝试与发现

如图 6-2-10 所示，已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个相互垂直的单位向量，将图中的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示.

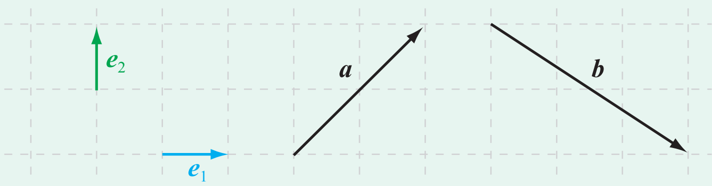


图 6-2-10

可以看出，$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$.

一般地，给定平面内两个相互垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，对于平面内的向量 $\boldsymbol{a}$，如果

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2,$$

则称 (x, y) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=(x, y)$.

因此，图 6-2-10 中 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $(2, 2)$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标为 1 ______.

平面上向量的坐标也可以按照如下方式来直观理解：如图 6-2-11 所示，

在平面上指定一点 O 作为原点，以 $\boldsymbol{e}_1$ 的方向为 x 轴的正方向，以 $\boldsymbol{e}_2$ 的方向为 y 轴的正方向，以 $\boldsymbol{e}_1$（或 $\boldsymbol{e}_2$）的模为单位长度建立平面直角坐标系，对于平面上任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，如果我们把它的始点平移到原点 O，那么 $\boldsymbol{a}$ 的终点对应的坐标就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

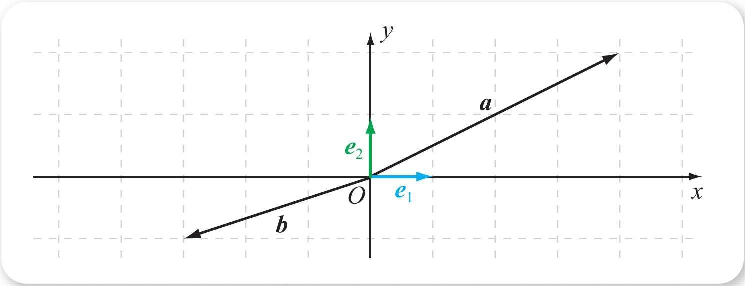


图 6-2-11

图 6-2-11 中，$\boldsymbol{a}=(4, 2)$，$\boldsymbol{b}=$ 2 ________. 特别地，$\boldsymbol{e}_1=(1, 0)$，$\boldsymbol{e}_2=$ 3 ________.

为了方便起见，以后谈到平面上向量的坐标时，总是默认为已经按照上述方式指定了单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，并建立了平面直角坐标系；同时，谈到平面直角坐标系时，默认为已经指定了与 x 轴及 y 轴的正方向同向的两个单位向量. 此时：如果平面上一点 A 的坐标为 (x, y)（通常记为 $A(x, y)$），那么向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的坐标也为 (x, y)，即 $\overrightarrow{OA}=(x, y)$；反之，这一结论也成立.

因此，为了求出平面上向量的坐标，可以选择如下两种方法中的任何一种：

（1）将向量用单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示出来；

（2）将向量的始点平移到原点，读出终点的坐标.

例 1 如图 6-2-12 所示，写出向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标.

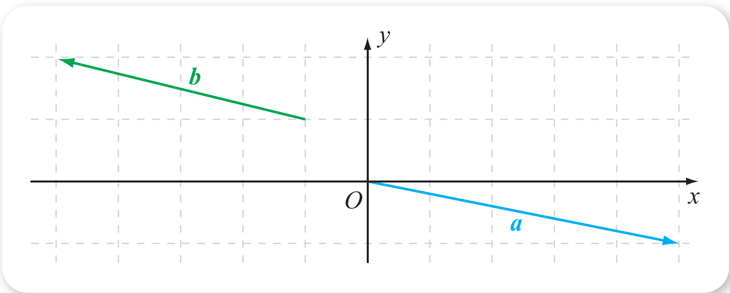


图 6-2-12

解 因为 $\boldsymbol{a}$ 的始点在原点，所以由 $\boldsymbol{a}$ 的终点坐标可知

$$\boldsymbol{a}=(5, -1).$$

又因为 $\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，所以 $\boldsymbol{b}=$ 4 ________.

2. 平面上向量的运算与坐标的关系

尝试与发现

平面上的向量有了坐标之后，向量的相等以及运算与它们对应的坐标之间有什么关系？

假设平面上两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}=(x_1，y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2，y_2)$，也就是说

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2，\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2.$$

则当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，有 $x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2$，由 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是相互垂直的单位向量可知 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$；反之结论也成立. 这就是说，平面上两个向量相等的充要条件是它们的坐标对应相等.

另外，因为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2+x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2=(x_1+x_2)\boldsymbol{e}_1+(y_1+y_2)\boldsymbol{e}_2，$$

所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2，y_1+y_2).$$

类似地，可以得出，如果 u，v 是两个实数，那么

$$u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}=(ux_1+vx_2，uy_1+vy_2)，$$
$$u\boldsymbol{a}-v\boldsymbol{b}=\boxed{5}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

例 2 已知 $\boldsymbol{a}=(-2，3)$，$\boldsymbol{b}=(3，-3)$，求下列向量的坐标：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　　（2）$2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$；　　（3）$\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

解 （1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2，3)+(3，-3)=(-2+3，3-3)=(1，0)$.

（2）$2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}=2(-2，3)-5(3，-3)$

$=(-4，6)-(15，-15)=(-19，21)$.

（3）$\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{3}(3，-3)=(1，-1)$.

由平面上向量的坐标还能得到向量的模.

事实上，如果向量 $\boldsymbol{a}=(x，y)$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 都不共线时，若 $\boldsymbol{a}$ 的始点在原点，则过 $\boldsymbol{a}$ 的终点分别作 x 轴与 y 轴的垂线，可以构造出一个边长分别为 $|x|$ 与 $|y|$ 的矩形，而 $|\boldsymbol{a}|$ 正好等于矩形的对角线长，因此

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 或 $\boldsymbol{e}_2$ 共线时，上述结论显然也成立.

例 3 已知 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(-2\sqrt{3},\ 2)$，求 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$.

解 由已知可得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2,\quad |\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{16}=4.$$

拓展阅读

向量的推广与应用

我们已经知道，平面向量可以用两个实数组成的有序实数对 $(a_1,\ a_2)$ 表示．以后我们还将学习空间向量，空间向量可用三个实数组成的有序实数组 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 来表示.

在实际问题中，我们还会遇到一些需要用更多的实数才能表示的量．例如，期中进行了五门考试，每个学生的考试成绩情况要用五个实数组成的有序实数组才能表示；在汽车生产线上，如果对装配好的汽车进行制动距离、最高车速、每千米油耗量、滑行距离、噪声、废气排放量等六项指标的测试，那么每辆新车质量要用由六个实数组成的有序实数组才能表示．这些量都可以抽象为向量.

由 n 个实数组成的有序实数组 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 称为 n 维向量，它是平面向量与空间向量的推广．给定 n 维向量，我们可以建立与平面向量类似的线性运算，并且可以用它们来解决生活中的一些问题.

例如，假设某班共有 30 位同学，则高一上学期期中考试的五门课程成绩可以用 30 个 5 维向量表示，即

$$\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3},\ a_{i4},\ a_{i5}),$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 30,$$

其中 a_{ij} 表示成绩，i 不同表示不同的同学，j 不同表示不同的课程.

为了得到期中考试每门课程的平均分，我们只需要将这 30 个向量全部加起来，然后再乘以 $\frac{1}{30}$，即只要算出

$$\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}\boldsymbol{a}_i=\left(\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}a_{i1},\ \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}a_{i2},\ \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}a_{i3},\ \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}a_{i4},\ \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}a_{i5}\right)$$

即可，其中 $\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}a_{ij}$ 为第 j 门课程的平均成绩.

如今是计算机普及的时代，上述计算不再令人生畏，向计算机输入数据，计算机能在很短的时间内完成计算任务.

3. 平面直角坐标系内两点之间的距离公式与中点坐标公式

利用平面向量坐标的知识，我们可以得到平面直角坐标系内两点之间的距离公式与中点坐标公式.

事实上，设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 为平面直角坐标系中的两点，则

$$\overrightarrow{OA}=(x_1,\ y_1),\ \overrightarrow{OB}=(x_2,\ y_2),$$

所以

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,\ y_2)-(x_1,\ y_1)=(x_2-x_1,\ y_2-y_1),$$

因此

$$AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

这就是平面直角坐标系内两点之间的距离公式.

另外，设线段 AB 中点为 $M(x, y)$，则 $\overrightarrow{OM}=(x, y)$，又因为

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(x_1+x_2, y_1+y_2)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

所以

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

这就是平面直角坐标系内的中点坐标公式.

例 4 已知 $A(-2, 1)$，$B(1, 3)$，求线段 AB 的中点 M 与三等分点 P，Q 的坐标（如图 6-2-13 所示）.

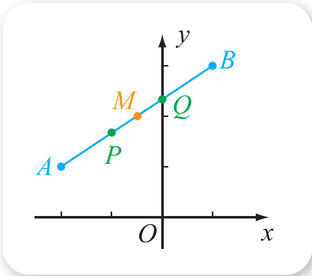


图 6-2-13

解 显然

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}[(-2, 1)+(1, 3)]$$

$$=\left(-\frac{1}{2}, 2\right).$$

因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1, 3)-(-2, 1)=(3, 2),$$

又因为 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，因此

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(-2, 1)+\frac{1}{3}(3, 2)=\left(-1, \frac{5}{3}\right).$$

类似地，有

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(-2, 1)+\frac{2}{3}(3, 2)=\left(0, \frac{7}{3}\right).$$

因此 $M\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$，$P\left(-1, \frac{5}{3}\right)$，$Q\left(0, \frac{7}{3}\right)$.

例 5 已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(-2, 1)$，$B(2, 2)$，$C(3, 4)$，而且 A，B，C，D 按逆时针方向排列，求：

(1) AB，AD；　　(2) D 点的坐标.

解 (1) 不难看出

$$AB=\sqrt{[2-(-2)]^2+(2-1)^2}=\sqrt{17}.$$

又因为 $AD=BC$，所以

$$AD=BC=\sqrt{(3-2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{5}.$$

（2）由题意知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$，因此

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-2,\ 1)+(3,\ 4)-(2,\ 2)=(-1,\ 3),$$

从而 $D(-1,\ 3)$.

4. 向量平行的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，下面我们来考察这两个向量平行时，它们的坐标应该满足的条件.

当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时：

如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，由共线向量基本定理可知存在 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$(x_2,\ y_2)=\lambda(x_1,\ y_1)=(\lambda x_1,\ \lambda y_1),$$

因此 $\begin{cases}x_2=\lambda x_1,\\ y_2=\lambda y_1,\end{cases}$ 从而 $\begin{cases}x_2y_1=\lambda x_1y_1,\\ x_1y_2=\lambda x_1y_1,\end{cases}$ 所以 $x_2y_1=x_1y_2$；

如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，即 $(x_1,\ y_1)=(0,\ 0)$，$x_2y_1=x_1y_2$ 显然也成立.

反过来，当 $x_2y_1=x_1y_2$ 时：

如果 $x_1\neq0$ 且 $y_1\neq0$，则有 $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1}$，设这个比值为 λ，则有 $\begin{cases}x_2=\lambda x_1,\\ y_2=\lambda y_1,\end{cases}$ 从而 $(x_2,\ y_2)=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)=\lambda(x_1,\ y_1)$，即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，因此 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

如果 $x_1=0$ 且 $y_1\neq0$，则有 $x_2=0$，设 $\lambda=\dfrac{y_2}{y_1}$，同样有 $(x_2,\ y_2)=\lambda(x_1,\ y_1)$，即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，因此 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

类似地，如果 $x_1\neq0$ 且 $y_1=0$，设 $\lambda=\dfrac{x_2}{x_1}$，同样有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，因此 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

如果 $x_1=0$ 且 $y_1=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

从而，不管哪种情况都有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

综上有

$$\boxed{\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_2y_1=x_1y_2.}$$

例 6 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,\ 5)$，$\boldsymbol{a}=(1,\ y)$，$\overrightarrow{AB}/\!/\boldsymbol{a}$，求 y 的值.

解 因为 $\overrightarrow{AB}/\!/\boldsymbol{a}$，所以 $1\times5=2\times y$，解得 $y=\dfrac{5}{2}$.

例 7 在平面直角坐标系中，已知 $A(-2,\ -3)$，$B(0,\ 1)$，$C(2,\ 5)$，求证：A，B，C 三点共线.

证明 由已知得

$$\overrightarrow{AB}=(0,\ 1)-(-2,\ -3)=(2,\ 4),$$

$$\overrightarrow{AC}=(2,\ 5)-(-2,\ -3)=(4,\ 8).$$

人民教育出版社

因为 $2\times8=4\times4$，所以

$$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC},$$

因此 A，B，C 三点共线.

练习A

1. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个相互垂直的单位向量，且

$$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-\sqrt{2}\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{c}=-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1,$$

求 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的坐标.

2. 写出平面直角坐标系中零向量的坐标.
3. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.
4. 已知 $A(-1,-3)$，$B(0,-1)$，$C(1,1)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，并判断 A，B，C 三点是否共线.
5. 已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(-1,-2)$，$B(3,-1)$，$C(4,2)$，而且 A，B，C，D 按逆时针方向排列，求：
   (1) AB，AD；
   (2) D 点的坐标.

练习B

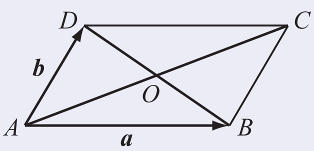
1. 已知 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，分别求与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同及相反的单位向量的坐标.
2. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3,-4)$，$\boldsymbol{b}=(2,y)$，并且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 y.
3. 已知 $A(-5,7)$，$B(-3,1)$，且 C 与 A 关于点 B 对称，求 C 的坐标.
4. 已知 $A(3,-6)$，$B(-5,2)$，$C(6,y)$ 三点共线，求 y 的值.
5. 已知平面直角坐标系中，$A(1,1)$，B 是 x 轴上的点，且 $AB=2$，求 B 的坐标.

1 $(3,-2)$　　2 $(-3,-1)$　　3 $(0,1)$　　4 $(-4,1)$

5 $(ux_1-vx_2,\ uy_1-vy_2)$

习题6-2A

1. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 表示 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$.



（第 1 题）

2 在$\triangle ABC$中，D，E是AB，AC上一点，$DE /\!/ BC$且$AD=\dfrac{1}{3}AB$，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，试用基底$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$表示向量$\overrightarrow{DE}$.

3 已知$\boldsymbol{a}=(1, 2)$，$\boldsymbol{b}=(2, 3)$，实数x，y满足等式$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=(3, 4)$，求$x$，$y$.

4 已知点$A(0, 1)$，$B(1, 0)$，$C(1, 2)$，$D(2, 1)$，求证：$AB /\!/ CD$.

5 已知$A(5, 1)$，$B(1, 3)$，$\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB_1}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，求$\overrightarrow{A_1B_1}$的坐标和模.

习题6-2B

1 如图，已知点C是直线AB上一点，且$AB=2BC$. 用$\overrightarrow{AB}$分别表示$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CB}$.

（第1题）

2 已知点C是直线AB上一点，且$|\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{BC}|$. 若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{BC}$，求$\lambda$的值.

3 已知$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$是平面向量的一组基底，实数$x$，$y$满足

$$3x\boldsymbol{a}+(10-y)\boldsymbol{b}=(4x+7)\boldsymbol{a}+2x\boldsymbol{b}.$$

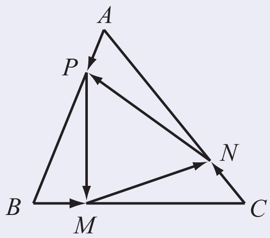
求x，y的值.

4 已知$\boldsymbol{a}=(1, 2)$，$\boldsymbol{b}=(-3, 2)$，当k为何值时，$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$平行?

5 如图，已知M，N，P分别是$\triangle ABC$三边BC，CA，AB上的点，且

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}，\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}，\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}，$$

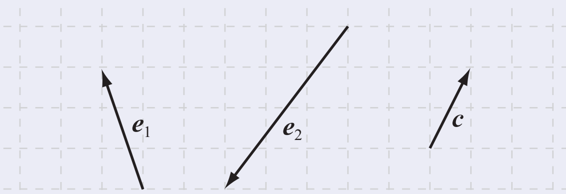
如果$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，试用基底$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$表示向量$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{NP}$，$\overrightarrow{PM}$.



（第5题）

习题6-2C

1 已知向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{c}$在正方形网格中的位置如图所示，试用向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$表示向量$\boldsymbol{c}$.



（第1题）

2 在平行四边形$ABCD$中，E，F分别为DC，BC中点，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}$，试用基底$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$表示向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$.

6.3 平面向量线性运算的应用

1. 向量在平面几何中的应用

在学习向量及其运算时，我们已经看到向量在三角形、平行四边形等平面几何中的应用. 实际上，利用平面向量可以很好地描述有关全等、相似、平行等关系，从而可以求解和证明平面几何问题.

例 1 如图 6-3-1 所示，MN 是$\triangle ABC$ 的中位线，求证：

$$MN /\!/ BC \text{ 且 } MN=\frac{1}{2}BC.$$

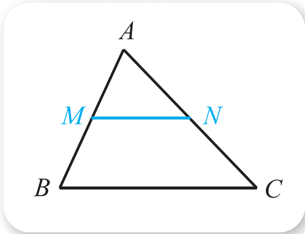


图 6-3-1

证明 因为 M，N 分别是 AB，AC 边上的中点，所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，因此

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

从而可知 $MN /\!/ BC$ 且 $MN=\frac{1}{2}BC$.

例 1 的结论是大家非常熟悉的三角形中位线定理，初中的时候我们是利用平行四边形的性质来证明的，但这里只用到了平面向量的线性运算.

例 2 如图 6-3-2 所示，已知平行四边形 $ABCD$ 中，E，F 在对角线 BD 上，并且 $BE=FD$.

求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

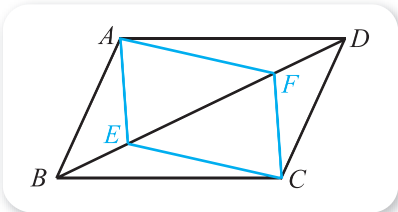


图 6-3-2

证明 由已知可设

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}=\boldsymbol{b},$$

则

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

又因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，所以

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC},$$

因此 $AE \underline{/\!/} FC$，从而可知四边形 $AECF$ 是平行四边形.

例 2 用初中的三角形全等也能证明，但是我们这里还是只用到了平面向

量的线性运算.

例 3 如图 6-3-3 所示，已知△ABC 中，E，F 分别是 AB，BC 的中点，AF 与 CE 相交于点 O，求 $AO:OF$ 与 $CO:OE$ 的值.

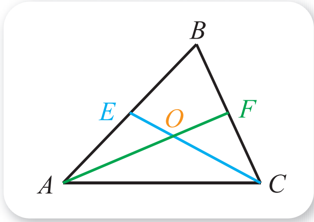


图 6-3-3

解 因为

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC},$$

又因为 E，F 都是中点，所以

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{EF}.$$

另外，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF}$，所以 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{EO}+2\overrightarrow{OF}$. 设 $\overrightarrow{AO}=s\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{CO}=t\overrightarrow{OE}$，则有 $s\overrightarrow{OF}-t\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{EO}+2\overrightarrow{OF}$，即

$$(s-2)\overrightarrow{OF}=(t-2)\overrightarrow{OE}.$$

从而由共线向量基本定理可知 $s=t=$ 1 ______，因此

$$AO:OF=CO:OE= \text{2 \_\_\_\_\_\_}.$$

例 3 中的 O 点是△ABC 的重心. 同样，我们这里是利用平面向量的线性运算得到了三角形重心的一个性质，这个性质如果用相似三角形等知识来证明，需要添加辅助线.

2. 向量在物理中的应用

我们在物理中已经学习过，利用向量可以描述物理学中的位移、力、速度、加速度等，因此，在涉及这些量的运算时，我们都可以借助向量来完成.

例如，从物理学中我们知道，同一个力 $\boldsymbol{F}$ 可以分解成无数对大小、方向不同的分力. 从数学上来说，这是因为对于同一条对角线，可以有无数个平行四边形，如图 6-3-4 所示.

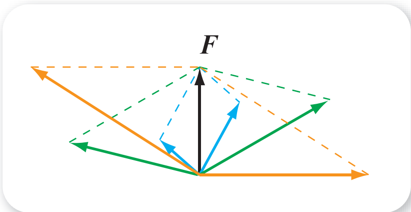


图 6-3-4

又如，如果一个质点 O 处于平衡状态，而且受到多个力的作用，那就是说这些力的合力为零. 特别地，如果两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的合力为零，则

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{0},$$

也就是说，这两个力互为相反向量，如图 6-3-5（1）所示；如果三个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 的合力为零，则

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0},$$

也就是说，其中任意两个力的合力是另外一个力的相反向量，如图 6-3-5（2）所示.

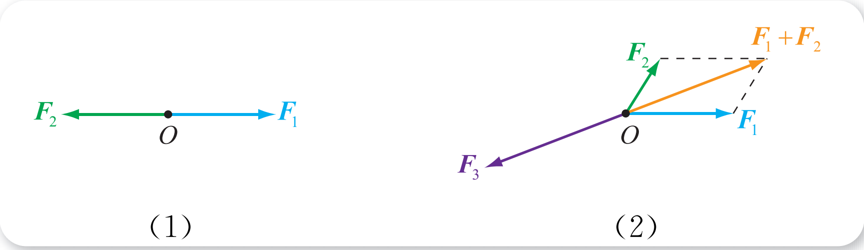


图 6-3-5

例 4 如图 6-3-6 所示，一个物体被两根轻质细绳拉住，且处于平衡状态，已知物体所受的重力大小为 50 N，求每条绳上的拉力大小.

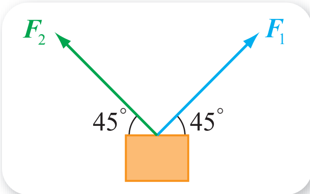


图 6-3-6

解 因为物体处于平衡状态，所以 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 是重力的相反向量，因此 $|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|=50$ N.

又由图与向量加法的平行四边形法则可知，$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 的方向是竖直向上的，且

$$|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|=2|\boldsymbol{F}_1|\sin 45°=2|\boldsymbol{F}_2|\sin 45°,$$

所以

$$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=\frac{50\text{ N}}{2\sin 45°}=25\sqrt{2}\text{ N}.$$

因此，每条绳上的拉力为 $25\sqrt{2}$ N.

例 5 如图 6-3-7（1）所示，把一个物体放在倾角为 30°的斜面上，物体处于平衡状态，且受到三个力的作用，即重力 $\boldsymbol{G}$，沿着斜面向上的摩擦力 $\boldsymbol{F}_1$，垂直斜面向上的弹力 $\boldsymbol{F}_2$. 已知 $|\boldsymbol{G}|=100$ N，求 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的大小.

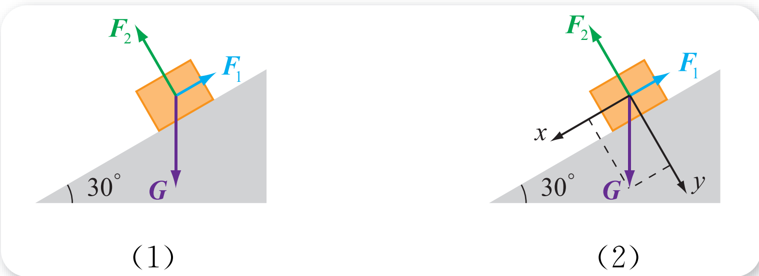


图 6-3-7

解 建立如图 6-3-7（2）所示的平面直角坐标系，则

$$\boldsymbol{F}_1=(-|\boldsymbol{F}_1|,\ 0),\ \boldsymbol{F}_2=(0,\ -|\boldsymbol{F}_2|).$$

又由已知可得

$$\boldsymbol{G}=(100\sin 30°,\ 100\cos 30°)=(50,\ 50\sqrt{3}),$$

且 $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{0}$，所以

$$(50,\ 50\sqrt{3})+(-|\boldsymbol{F}_1|,\ 0)+(0,\ -|\boldsymbol{F}_2|)=(0,\ 0),$$

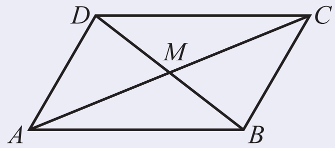
人民教育出版社

从而可知

$$|\boldsymbol{F}_1|=\boxed{3}\underline{\qquad}\text{N},\ |\boldsymbol{F}_2|=\boxed{4}\underline{\qquad}\text{N}.$$

习题6-3A

1 如图，已知四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 M，$AM=MC$，$DM=MB$。用平面向量证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



（第 1 题）

2 在△ABC 中，已知 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 用平面向量证明 $MN/\!/BC$ 且 $MN=\frac{1}{3}BC$.

3 已知向量 $\overrightarrow{OF_1}=(2,\ 2)$，$\overrightarrow{OF_2}=(-2,\ 3)$ 分别表示力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，求 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 的大小.

习题6-3B

1 已知点 $A(-1,\ 1)$，$B(0,\ -2)$，$C(3,\ 0)$，$D(2,\ 3)$，求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

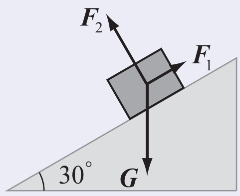
2 已知 $A(7,\ 5)$，$B(2,\ 3)$，$C(6,\ -7)$，求证：△ABC 是直角三角形.

3 在△ABC 中，AD，BE，CF 分别是中线，求证：

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}.$$

4 在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，P，Q 分别是 AC，BD 的中点，用平面向量证明 $PQ/\!/AB$.

5 如图所示，把一个物体放在倾角为 30°的斜面上，物体处于平衡状态，且受到三个力的作用，即重力 $\boldsymbol{G}$，沿着斜面向上的摩擦力 $\boldsymbol{F}_1$，垂直斜面向上的弹力 $\boldsymbol{F}_2$. 已知 $|\boldsymbol{F}_1|=30$ N，求 $\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{F}_2$ 的大小.



（第 5 题）

习题6-3C

1 已知点 O 为△ABC 的重心，求证：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}.$$

2 已知△ABC 的三个顶点坐标分别为 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$，求证：这个三角形重心 G 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

1 2　　2 2∶1　　3 50　　4 $50\sqrt{3}$

本章小结

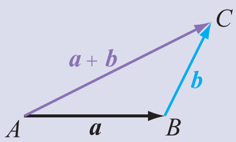
01 知识结构图设计与交流

本章我们学习了一个新的数学对象——向量，并研究了向量之间的加、减与数乘运算，得到了共线向量基本定理与平面向量基本定理．值得注意的是，我们是从几何（有向线段）与代数（坐标）两个角度来学习有关内容的．

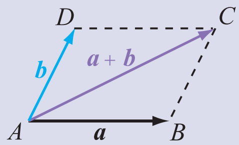
由此可作出本章的知识结构图如下．

平面向量

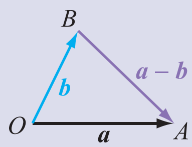
- **概念**：向量；向量的模；零向量；向量相等；向量的平行（共线）；单位向量
- **运算**
  - 加法：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
    - 三角形法则



    - 平行四边形法则



  - 减法：$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$
    - 三角形法则



  - 数乘向量：$\lambda\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{a}$ 且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$
- **定理**：共线向量基本定理；平面向量基本定理
- **坐标**：若 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$ 且 $\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则：
  - $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$
  - $\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$
  - $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2)$
  - $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)$
  - $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

你能作出不同于上图的知识结构图吗？自己动手试一试吧！

02 课题作业

大家已经看到，我们这一章里所学习的平面向量与物理有千丝万缕的联系，位移、力、速度、加速度等都可以用向量来表述，平行四边形法则、三角形法则等在物理中也接触过.

另外，大家可能也注意到了，数学与物理中的向量使用存在细微的差别. 比如，数学中经常要用到向量的坐标表示，而物理中用得比较多的是向量的有向线段表示.

与其他同学合作，回忆本章内容和所学习过的物理知识，整理数学与物理中对于向量处理方式的相同点，以及各自的侧重点等，并写成小论文.

03 复习题

A 组

1. 化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}$；　　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$；　　(4) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}$；

(5) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$；　　(6) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$.

2. 求下面方程组中的向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$：

$$\begin{cases}5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\\3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}.\end{cases}$$

3. 已知$\triangle ABC$中，D 为 BC 的中点，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AD}$.

4. 在正方形 $ABCD$ 中，设 E 为边 AB 的中点，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用基底$\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\}$表示 $\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{DE}$.

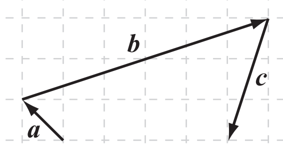
5. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量，$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求证：$A$，$B$，$D$ 三点共线.

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(3，-5)$，$\boldsymbol{b}=(9，11)$，$\boldsymbol{c}=(8，13)$，求：

(1) $-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}$；　　(2) $15\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

7. 已知点 $A(-2，3)$，$B(3，5)$，分别求点 A，B 关于点 $M(1，1)$的对称点 A'，B'的坐标，并说明 $\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$.

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示，若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$（$\lambda$，$\mu\in\mathbf{R}$），求$\dfrac{\lambda}{\mu}$的值.



（第 8 题）

B 组

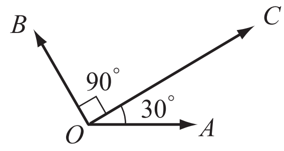
1. 已知 E，F 分别是△ABC 边 AB，AC 上的点，且 $EF/\!/BC$，$AE=\frac{1}{3}AB$. 如果 $\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{CF}$.

2. 设 P 是△ABC 所在平面内的一点，$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$，则（　　）.

（A）$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\mathbf{0}$　　（B）$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\mathbf{0}$

（C）$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$　　（D）$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$

3. 如图所示，已知 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，$\angle AOC=30^{\circ}$，用 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$.



（第 3 题）

4. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 k 的值.

5. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，$\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，其中 λ，$\mu\in\mathbf{R}$，那么 A，B，C 三点共线的充要条件为（　　）.

（A）$\lambda+\mu=2$　　（B）$\lambda-\mu=1$　　（C）$\lambda\mu=-1$　　（D）$\lambda\mu=1$

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,3)$ 与 $\boldsymbol{b}=(-1,\lambda)$ 共线，求实数 λ 的值.

7. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,2)$，且 $k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 平行，求实数 k 的值.

8. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，分别求满足下列各条件的实数 m，n 的值：

（1）$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(m-1)\boldsymbol{a}+(2-n)\boldsymbol{b}$；

（2）向量 $(m-n)\boldsymbol{a}+(m+n)\boldsymbol{b}$ 以 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 为基底的分解式为 $2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.

9. 已知 $A(-1,1)$，$B(3,2)$，$D(0,5)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，$AC$ 与 BD 相交于点 M，求点 C，M 的坐标.

C 组

1. 已知 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，求证：$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$.

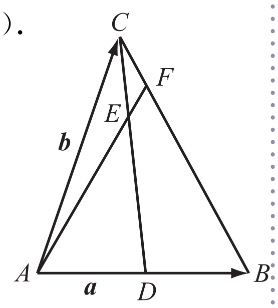
2. 设 O 是正五边形 $ABCDE$ 内任意一点，求证：

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}=2(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{ED}).$$

3. 如图所示，△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$D$ 为 AB 中点，E 为 CD 上一点，且 $DC=3EC$，AE 的延长线与 BC 的交点为 F.

（1）用向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}$；

（2）用向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AF}$，并求出 $AE:EF$ 和 $BF:FC$ 的值.



（第 3 题）

后　记

本套教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组依据教育部《普通高中数学课程标准（2017年版）》编写的，2019年经国家教材委员会专家委员会审核通过.

本套教科书的编写，集中反映了我国十余年来普通高中课程改革的成果，吸取了2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的编写经验，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教材编写专家、教研人员和一线教师，以及教材设计装帧专家的集体智慧.

我们衷心感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的所有编写人员，尤其是因为种种原因未能参加此次教材修订的专家、学者：丁尔陞、江守礼、房艮孙、张润琦、高尚华、万庆炎、魏榕彬、邱万作、陈研、段发善、李沍岸、陈亦飞、刘长明、郭鸿、王池富……

本套教科书在编写过程中，得到了《普通高中数学课程标准（2017年版）》制定组、国家教材委员会专家委员会等的大力支持. 借此机会，向所有制定组成员、专家委员会成员以及其他为我们教材编写提供过帮助的专家表示衷心的感谢!

我们感谢对本套教科书的编写、出版、试教等提供过帮助与支持的所有同仁和社会各界朋友：王跃飞、胡细宝、邵丽云、王晓声、曹付生、侯立伟、王中华、王光图、王秀梅、卞文、邓艳强、田媛、史洪波、付一博、吕希、吕晶、朱明鲜、刘超、闫旭、池洪清、阮征、孙国华、牟柏林、李刚、李广勤、李洪岩、何艳国、张伟、张羽、张明、张文刚、张春青、张晶强、金永涛、郑继平、常丽艳、潘戈、薛达志、郑海军、赵争鸣、吴晖湘、戴莉、金盈、舒风杰、李祥广、胡文亮、王玉洁、杨长智、徐会吉、尹玉柱、尹燕花……

本套教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示衷心的感谢! 同时也向为本书提供照片的单位表示感谢!

本套教科书投入使用后，我们根据各方意见作了修订，真诚希望广大师生和家长继续提出宝贵意见！

本书责任编辑：龙正武、朱春柳；美术编辑：史越；插图绘制：郑海军.

联系方式

电话：010–58758650，010–58758866

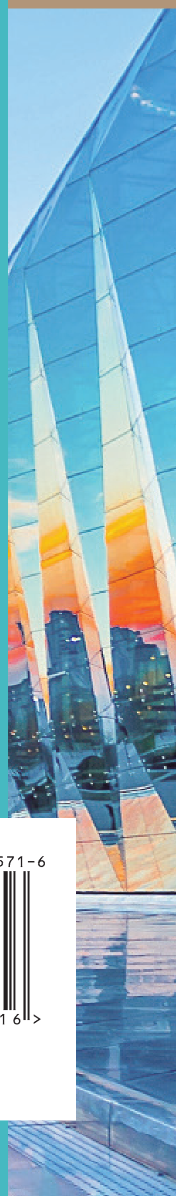
电子邮箱：mathb@pep.com.cn，jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组

PUTONG GAOZHONG JIAOKESHU

SHUXUE



绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-33571-6