国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学

选择性必修

第一册

B版

人民教育出版社

人民教育出版社

普通高中教科书

数学

选择性必修

第一册

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

B版

人民教育出版社
·北京·

人民教育出版社

主　　编：高存明
副 主 编：王殿军　龙正武　王旭刚
本册主编：朱利平　范登晨
其他编者：黄志勇　杨鲜枝　李　诚　祝广文　王洪军　谢李杉

普通高中教科书　数学（B版）　选择性必修　第一册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

出　　版　人民教育出版社
　　　　（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn

前　言

人们喜欢音乐，是因为它拥有优美和谐的旋律；人们喜欢美术，是因为它描绘了人和自然的美；人们喜欢数学，是因为它用空间形式和数量关系刻画了自然界和人类社会的内在规律，用简洁、优美的公式与定理揭示了世界的本质，用严谨的语言和逻辑梳理了人们的思维……

我国著名数学家华罗庚先生曾经指出：数学是一切科学的得力助手和工具；任何一门科学缺少了数学这一工具便不能确切地刻画出客观事物变化的状态，更不能从已知数据推出未知的数据来，因而就减少了科学预见的可能性，或者减弱了科学预见的准确度.

事实上，任何一项现代科学技术的出现与发展，背后都一定有数学知识的支撑. 互联网的普及、共享经济的繁荣、网络支付的便利、物联网的兴起、人工智能的发展、大数据的应用，离开了数学知识都是不可能的！并且，现代生活中，类似“逻辑”“函数”“命题”“线性增长”“指数增长”“概率”“相关性”等数学术语，在政府文件、新闻报道中比比皆是.

正如《普通高中数学课程标准（2017 年版）》（以下简称“课程标准”）所指出的：数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程中发挥着不可替代的作用. 数学素养是现代社会每一个人应该具备的基本素养. 高中生学习必需的数学知识，能为自身的可持续发展和终身学习奠定基础.

为了帮助广大高中生更好地学习相关数学知识，我们按照课程标准的要求编写了这套高中数学教材. 在编写过程中，我们着重做了以下几项工作.

1. 关注学生成长，体现时代特征

教材在选取内容的背景素材时，力图从学生熟悉的情境出发，着力体现时代特征，并为学生的成长提供支撑. 例如，以下内容在本套教材中都有所体现：利用数学知识破解魔术的“秘密”，用生活中的例子说明学习逻辑知识以及理性思考的重要性，从数学角度理解报刊上有关人工智能、新兴媒体等报道中出现的“线性增长”“爆炸式增长”等名词.

教材中还提到了“网络搜索”“人工智能”“环境保护”“大数据”“按揭贷款”“电子商务”“创业创新”等. 我们相信，这些能引起大家的共鸣.

此外，教材中多处出现了借助现代信息技术学习数学知识的内容，包括怎样借助数学软件解方程、不等式，怎样借助信息技术呈现统计结果、展示模拟过程，等等.

在体现时代特征的同时，我们也特别注重对中华优秀传统文化的展示. 例如，教材中精选了多道我国古代数学名题，启发大家从数学角度去理解“失败乃成功之母”“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”等语句的含义，呈现了与二十四节气、古典诗词等有关的调查数据，介绍了《九章算术》在代数上的成就以及我国古代的统计工作，等等.

2. 吸收先进理念，改变呈现方式

在教材编写过程中，编者认真学习和讨论了当前教育学、心理学等学科的先进理念，并通过改变教材呈现方式来加以体现，力图真正做到“以学习者为中心”.

人民教育出版社

例如，教材每一章都引用了一段名人名言，旨在为大家的数学学习提供参考和指引；通过“情境与问题”栏目，展示相关数学知识在现实生活等情境中的应用；利用“尝试与发现”栏目，鼓励大家大胆尝试，并在此基础上进行猜想、归纳与总结；通过填空的方式，培养大家学习数学的信心；选择与内容紧密联系的专题，设置拓展阅读，以拓宽大家的知识面，了解数学应用的广泛性；等等.

3. 遵循认知规律，力求温故知新

数学学习必须循序渐进是一种共识. 基础不扎实是很多人学不好数学的重要原因，本套教材在编写时特别考虑了这一点.

事实上，教材一方面按照课程标准的要求，讲解和复习了高中数学必备的集合、等式、不等式等内容；另一方面，在呈现新知识时，教材注重从已有知识出发，在回顾的基础上通过实际例子逐步引入，尽力展现新旧知识的联系，以达到温故知新的效果.

例如，教材在复习了变量以及初中函数概念的基础上介绍了函数中的对应关系，在回顾了整数指数幂、二次根式等后引入了分数指数幂，等等.

正因为如此，即使是初中数学基础比较薄弱的同学，使用本套教材也能顺利地进行学习，并最终达到理想的效果. 这在本套教材试教过程中已得到印证.

4. 揭示内容本质，重视直观理解

数学知识具有客观性，但数学知识的理解有多种方式与途径. 揭示内容本质，培养大家对数学内容的直观理解，是我们编写本套教材时特别注意的方面之一.

首先，教材内容的安排突出主线，强调“通性通法”. 例如，多次强调了配方法的使用，自始至终贯彻函数的研究应从特殊到一般、从性质到图象，等等.

其次，尽量自然地引入新内容或新方法. 例如，通过实例说明学习中位数、百分位数的必要性，通过对比说明用样本估计总体的合理性，等等.

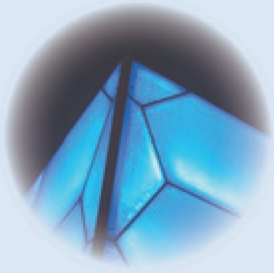
最后，注重培养大家的数学学科核心素养. 课程标准提出的数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析，在教材中都得到了落实. 仅以数学抽象为例，教材处处强调了自然语言与符号语言之间的相互转化等.

总的来说，“引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界”并不容易. 为此，我们在编写教材时做了很多新的尝试，力图给大家提供一套有时代特色、易教易学的数学教材，以帮助大家学习.

本书是这套教材选择性必修部分的第一册，呈现了空间向量与立体几何以及平面解析几何的内容. 通过本书的目录与每章的“本章导语”，可以大致了解本书的全貌，这里不再重复.

由于编写时间有限等原因，书中难免会有疏漏之处，敬请大家多提宝贵意见，以使教材日臻完善.

目录



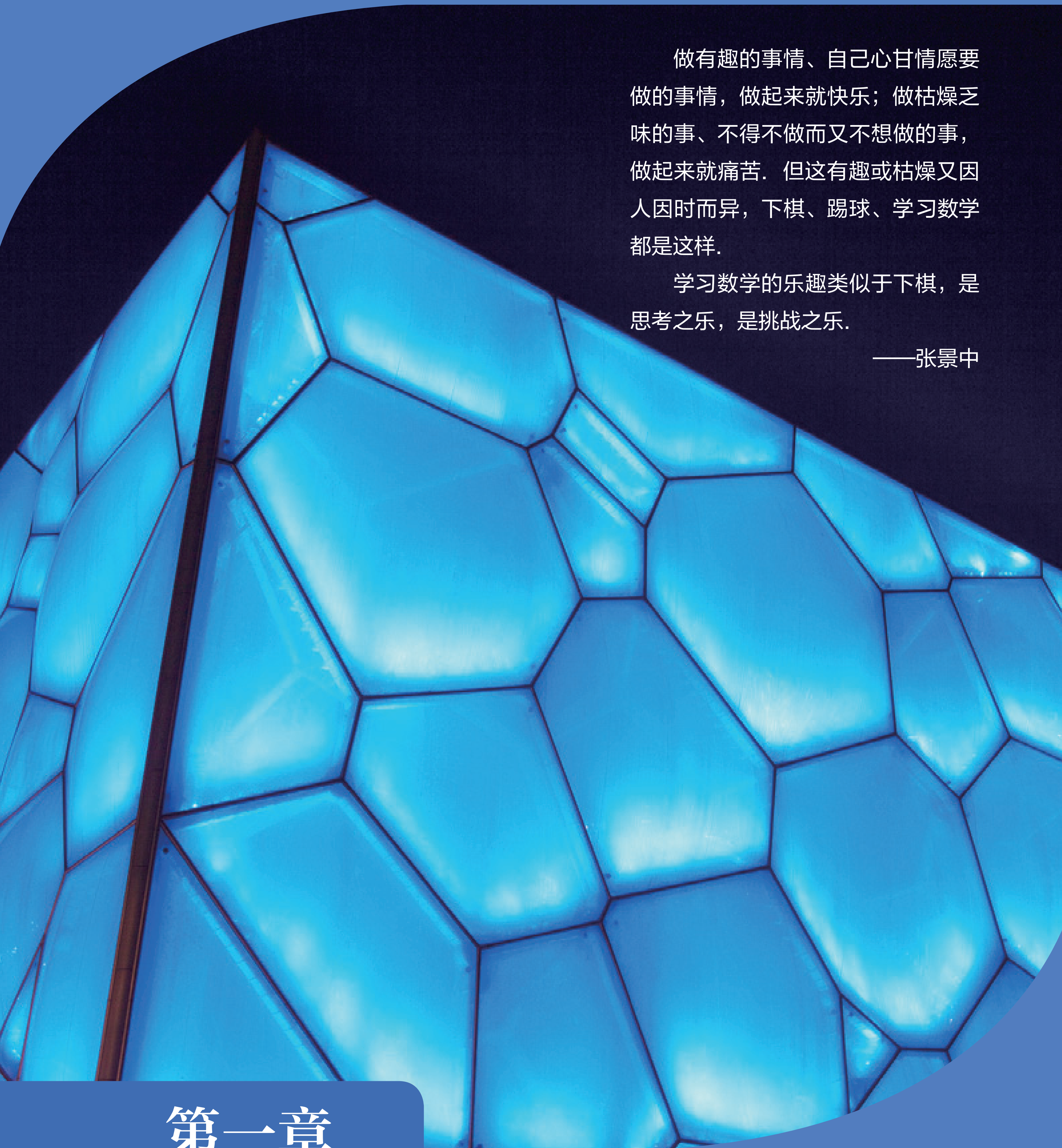
人民教育出版社

本书拓展阅读目录

做有趣的事情、自己心甘情愿要做的事情，做起来就快乐；做枯燥乏味的事、不得不做而又不想做的事，做起来就痛苦．但这有趣或枯燥又因人因时而异，下棋、踢球、学习数学都是这样．

学习数学的乐趣类似于下棋，是思考之乐，是挑战之乐．

——张景中



第一章

空间向量与立体几何

本章导语

在必修的立体几何初步中，我们结合棱柱、棱锥、棱台、圆柱、圆锥、圆台、球等空间几何体，研究了空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面之间平行和垂直的位置关系．不过，现实生活中，上述对象之间既不平行也不垂直的形象随处可见．

图 1

图 2

如图 1 所示，标枪运动员在投掷标枪时，标枪所在直线与地面所在平面既不平行也不垂直，二者呈现出成一定夹角的形象；如图 2 所示，在用太阳能光板吸收太阳光时，光板所在平面与地面所在平面同样既不平行也不垂直，二者也呈现出成一定夹角的形象．

事实上，我们已经学过的必修内容中，类似的关系也比比皆是．如图 3 所示的正四棱锥 O-$ABCD$ 中，直线 OA 与底面 $ABCD$ 既不平行也不垂直，平面 OAD 与底面 $ABCD$ 既不平行也不垂直……

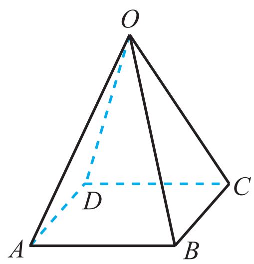


图 3

本章我们要探讨的就是空间中类似的位置关系．为此，我们首先会将必修内容中的平面向量推广到空间向量，然后借助空间向量的运算来讨论上述位置关系以及空间中的距离等．

1.1 空间向量及其运算

1.1.1 空间向量及其运算

1. 空间向量的概念

我们在必修内容中已经学习过平面向量的有关知识，知道在平面内：

既有大小又有方向的量称为**向量**（也称为矢量），向量的大小也称为向量的**模**（或长度）.

可以用有向线段来直观地表示向量，其中有向线段的长度表示向量的大小，有向线段箭头所指的方向表示向量的方向．有向线段不带箭头的端点称为向量的**始点**（或起点），带箭头的端点称为向量的**终点**．有向线段始点和终点的相对位置确定向量的大小与方向．始点为 A 终点为 B 的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$，向量的模用 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示．还可用一个小写字母来表示向量：在印刷时，通常用加粗的斜体小写字母如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 来表示向量；在书写时，用带箭头的小写字母如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 来表示向量．此时，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模也用 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\vec{a}|$ 来表示.

始点和终点相同的向量称为**零向量**，零向量的方向是不确定的．零向量在印刷时，通常用 $\mathbf{0}$ 表示；书写时，用 $\vec{0}$ 表示．零向量的模为 0，即 $|\mathbf{0}|=0$.

模等于 1 的向量称为**单位向量**．因此，$\boldsymbol{e}$ 是单位向量的充要条件是 $|\boldsymbol{e}|=1$.

大小相等、方向相同的向量称为相等的向量．向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

特别地，如图 1-1-1 所示，在平面四边形 $ABCD$ 中，“$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的充要条件.

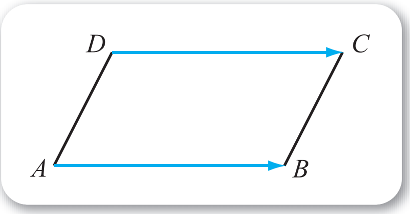


图 1-1-1

如果两个非零向量的方向相同或者相反，则称这两个向量**平行**．通常规定零向量与任意向量平行.

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$．两个向量平行也称为两个向量**共线**.

尝试与发现

观察上述平面向量的有关概念与约定，思考能否将它们从平面推广到空间中. 如果能，尝试说出推广后的不同之处；如果不能，说明理由.

不难看出，上述有关向量的概念与约定，只要去掉“在平面内”的限定，就都可以原封不动地推广到空间中. 因此在空间中，我们仍使用上述向量的概念与约定. 例如，空间中既有大小又有方向的量称为**空间向量**（简称为**向量**），大小相等、方向相同的向量称为相等的向量，方向相同或者相反的两个非零向量互相平行（此时，表示这两个非零向量的有向线段所在的直线平行或重合），等等.

这样一来，如图 1-1-2 所示，对于平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 来说，因为 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 互相平行而且长度都相等，因此

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{DD_1}.$$

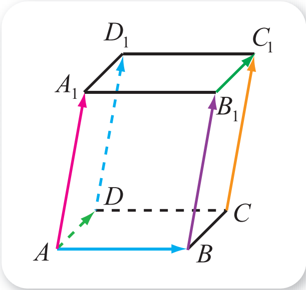


图 1-1-2

空间中的向量，除了共线之外，我们还要讨论共面的情形. 一般地，空间中的多个向量，如果表示它们的有向线段通过平移之后，都能在同一平面内，则称这些向量**共面**；否则，称这些向量**不共面**.

例如，图 1-1-2 中，虽然直线 AA_1 与直线 B_1C_1 异面，但向量 $\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{B_1C_1}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 是共面的，因为 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 经过平移后可以到达 $\overrightarrow{AD}$ 的位置，而 $\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 都在平面 ADD_1A_1 内；向量 $\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 不共面，因为这三个向量有一个公共点 A，而 A，B，D 都在平面 $ABCD$ 内，点 A_1 在平面 $ABCD$ 外.

可以看出，空间中任意两个向量都是共面的，但空间中任意三个向量不一定共面.

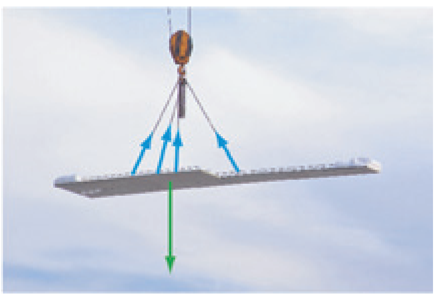


图 1-1-3

空间向量可以用来描述空间中既有大小又有方向的量. 例如，当空间中的物体所受的力不全在同一个平面内时，可以借助空间向量来对该物体进行受力分析，如图 1-1-3 所示是吊在空间中的物体所受力的示意图.

2. 空间向量的加法运算

尝试与发现

回忆平面向量的加法运算，思考如何定义空间向量的加法，并尝试总结空间向量的加法运算与平面向量的加法运算有何不同.

我们知道，给定两个平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在该平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，作出向量 $\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AC}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和（也称 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和向量**）. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，因此

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

当平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 正好能构成一个三角形，如图 1-1-4 所示，因此这种求两向量和的作图方法也常称为**向量加法的三角形法则**.

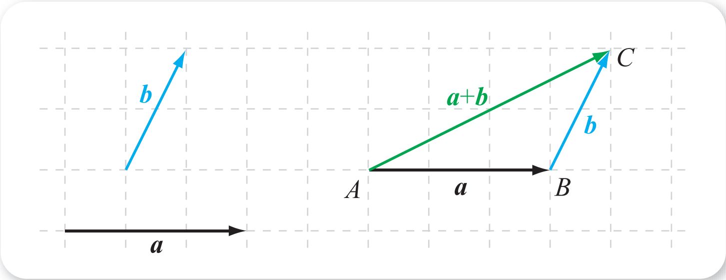


图 1-1-4

因为空间中的任意两个向量都共面，所以空间中两个向量的和，除了 A 点可以在空间中任意选定之外，其他的与平面情形完全一样. 特别地，向量加法的三角形法则在空间中也成立.

例如，图 1-1-5 所示的长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{B_1C_1}$，所以

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{AD_1}.$$

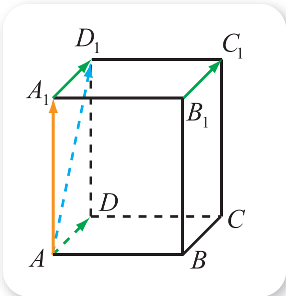


图 1-1-5

空间向量的加法也可用**平行四边形法则**：任意给定两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在空间中任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AC 为邻边作一个平行四边形 $ABDC$，作出向量 $\overrightarrow{AD}$，则

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

例如，图 1-1-5 的长方体中，

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad}.$$

不难看出，空间向量的加法也满足交换律和结合律，即对于任意的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，都有

人民教育出版社

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

空间向量加法的结合律可以借助图 1-1-6 所示的三棱锥 O-ABC 来理解，其中 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CO}=\boldsymbol{c}$，而且

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$

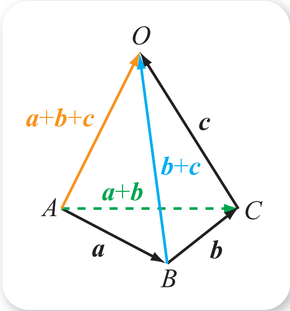


图 1-1-6

所以

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CO}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c},$$
$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

因此

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

从图 1-1-6 也可以看出，为了得到有限个空间向量的和，只需将这些空间向量依次首尾相接，那么以第一个向量的始点为始点，最后一个向量的终点为终点的向量，就是这些向量的和向量. 例如，

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AO}.$$

例 1 如图 1-1-7 所示是一个平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，化简

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}.$$

解 因为底面 $ABCD$ 是一个平行四边形，所以 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$，又因为 $\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BB_1}$，所以

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB_1}$$
$$=\boxed{2}\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

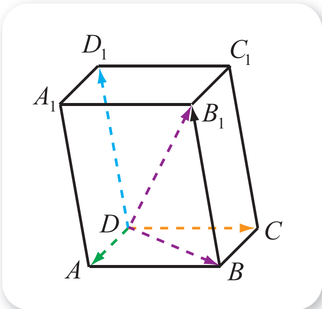


图 1-1-7

例 1 说明，三个不共面的向量的和，等于以这三个向量为邻边的平行六面体中，与这三个向量有共同始点的体对角线所表示的向量.

3. 空间向量的线性运算

任意两个空间向量总是共面的，因此可以用类似平面向量中的方法来定义两个空间向量的减法运算、数乘运算.

在空间中任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，作出向量 $\overrightarrow{BA}$，则向量 $\overrightarrow{BA}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差（也称 $\overrightarrow{BA}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量），即

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 正好能构成一个三角形，因此这种求两向量差的作图方法称为**向量减法的三角形法则**.

例如，图 1-1-8 所示的四棱锥 O-$ABCD$ 中，有

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA},$$

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\boxed{3}\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

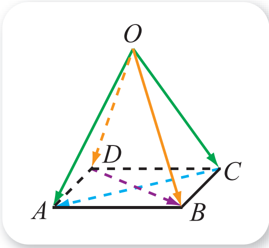


图 1-1-8

同平面中的情形一样，给定一个空间向量，我们把与这个向量方向相反、大小相等的向量称为它的**相反向量**，向量 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量记作 $-\boldsymbol{a}$. 因此，$\overrightarrow{AB}$ 的相反向量是 $-\overrightarrow{AB}$，而且 $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. 因为零向量的始点与终点相同，所以 $-\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

不难看出，空间向量的减法也可以看成向量的加法，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

也就是：一个向量减去另一个向量，等于第一个向量加上第二个向量的相反向量.

同平面中的情形一样，给定一个实数 λ 与任意一个空间向量 $\boldsymbol{a}$，规定它们的乘积是一个空间向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，其中：

（1）当 $\lambda\neq0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$，而且 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：

①当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；

②当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

（2）当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

上述实数 λ 与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 相乘的运算简称为**数乘向量**.

数乘向量的定义说明，如果存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 而且，如果存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 平行且有公共点 A，从而 A，B，C 三点一定共线.

特别地，当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，即 $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 时，B 为线段 AC 的中点.

对于实数 λ 与 μ，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，有如下运算律：

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a},\quad \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

同平面向量一样，空间向量的加法、减法与数乘运算，以及它们的混合运算，统称为空间向量的线性运算.

例 2 设 AB 是空间中任意一条线段，O 是空间中任意一点，求证：M 为 AB 中点的充要条件是

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

证明 因为

$$M\text{ 为 }AB\text{ 中点}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$

所以结论成立.

如图 1-1-9 所示，如果棱锥 O-$ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是一个平行四边形，则 N 既是 AC 的中点，也是 BD 的中点，从而由例 2 的结论可知

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}),\quad \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}).$$

当然，同样也有

$$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})$$

等.

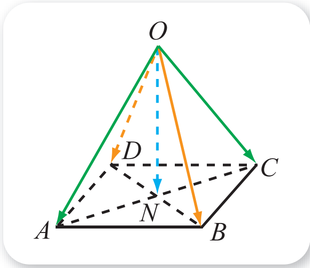


图 1-1-9

例 3 如图 1-1-10 所示三棱锥 A-BCD 中，O 为 CD 的中点，化简

$$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}),$$

并在图中作出表示化简结果的向量.

解 因为 O 为 CD 中点，所以

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{BO},$$

从而有

$$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}+\boxed{4}\underline{\qquad\qquad}=\boxed{5}\underline{\qquad\qquad}.$$

化简结果的向量如图 1-1-10 所示.

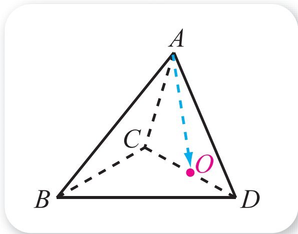


图 1-1-10

4. 空间向量的数量积

平面内，给定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任选一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则大小在$[0, \pi]$内的$\angle AOB$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记作 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

尝试与发现

观察上述平面向量夹角的概念，思考空间中两个非零向量的夹角该如何定义，并尝试总结两者的不同之处.

由于空间中任意两个向量都一定是共面的，因此，空间中两个非零向量

之间的夹角也可按类似上述的方式定义，但“在平面内任选一点”应改成“在空间中任选一点”．特别地，如果$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；为了方便起见，约定零向量与任意向量都垂直．

例 4 如图 1-1-11 所示是一个正方体，求下列各对向量的夹角：

(1) $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A_1C_1}$；

(2) $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{C_1A_1}$；

(3) $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A_1D_1}$；

(4) $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{B_1A_1}$．

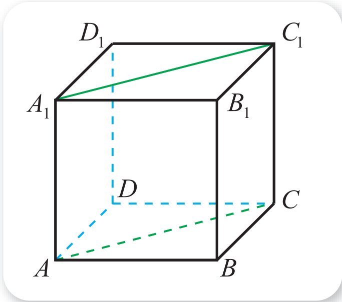


图 1-1-11

解 (1) 由于 $\overrightarrow{A_1C_1}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的方向相同，所以

$\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1C_1}\rangle=\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle=45^\circ$.

(2) $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C_1A_1}\rangle=\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\rangle=135^\circ$.

(3) $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1D_1}\rangle=\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\rangle=$ 6 ________．

(4) $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B_1A_1}\rangle=$ 7 ________．

平面内，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（也称为**内积**）定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle.$$

而且，两个向量数量积的几何意义与投影有关，如图 1-1-12 所示，过 $\boldsymbol{a}$ 的始点和终点分别向 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线作垂线，即可得到向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\boldsymbol{a}'$ 的数量与 $\boldsymbol{b}$ 的长度的乘积．特别地，$\boldsymbol{a}$ 与单位向量 $\boldsymbol{e}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影 $\boldsymbol{a}'$ 的数量．规定零向量与任意向量的数量积为 0．

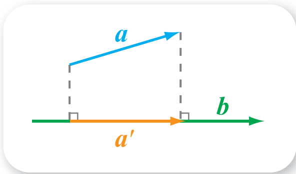


图 1-1-12

尝试与发现

观察上述平面向量数量积的概念与性质，思考能否将它们从平面推广到空间中．如果能，尝试说出推广后的不同之处；如果不能，说明理由．

同样，空间中向量的数量积也是按上述方式定义的，而且空间向量的数量积也具有类似的性质．不过，空间向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\boldsymbol{a}'$，除了按照上述方式得到之外，还可以过 $\boldsymbol{a}$ 的始点和终点分别作与 $\boldsymbol{b}$ 所在直线垂直的平面得到．这可以从图 1-1-13 所示的长方体中看出来，其中向量 $\boldsymbol{b}$ 在棱 AB

上，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{A'C'}$，因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$，$BC\perp AB$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影

$$\boldsymbol{a}'=\overrightarrow{AB}.$$

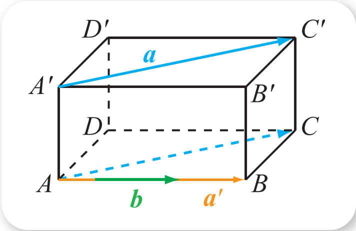


图 1-1-13

一般地，给定空间向量 $\boldsymbol{a}$ 和空间中的直线 l（或平面 α），过 $\boldsymbol{a}$ 的始点和终点分别作直线 l（或平面 α）的垂线，假设垂足为 A，B，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 在直线 l（或平面 α）上的投影.

同平面的情形一样，空间向量的数量积具有以下性质：

（1）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$；

（3）$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；

（4）$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

（5）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（交换律）；

（6）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$（分配律）.

第（6）条性质可以按如下方式理解.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面时，根据平面向量数量积的性质可知，结论成立.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面时，显然 $|\boldsymbol{c}|\neq 0$，设 $\boldsymbol{c}_0=\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$，即 $\boldsymbol{c}_0$ 是与 $\boldsymbol{c}$ 同向的单位向量. 如图 1-1-14 所示，设 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$是一个长方体，点 O 与 $\boldsymbol{c}_0$ 都在直线 AB 上，且

$$\overrightarrow{OA'}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{A'C'}=\boldsymbol{b}.$$

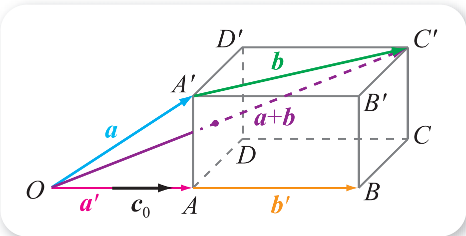


图 1-1-14

因此，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{c}_0$ 上的投影为 $\boldsymbol{a}'=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}_0$ 上的投影为 $\boldsymbol{b}'=\overrightarrow{AB}$，且

$$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'C'}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}_0$ 上的投影为 $\overrightarrow{OB}$.

注意到 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$，这就说明

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}_0,$$

在这个式子两边同时乘以 $|\boldsymbol{c}|$，即可知

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

例 5 如图 1-1-15 所示长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，E 是 AA' 的中点，$AA'=AD=2$，$AB=4$，求：

(1) $\overrightarrow{BC'}\cdot\overrightarrow{AE}$； (2) $\overrightarrow{B'D}\cdot\overrightarrow{AE}$.

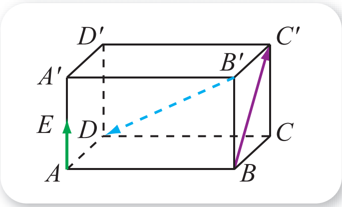


图 1-1-15

解 (1)（方法一）因为是长方体，而且 $AA'=AD=2$，所以

$$\langle\overrightarrow{BC'},\ \overrightarrow{AE}\rangle=\angle B'BC'=45^\circ,$$

$$|\overrightarrow{AE}|=\frac{1}{2}AA'=1,$$

$$|\overrightarrow{BC'}|=BC'=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2},$$

因此

$$\overrightarrow{BC'}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{BC'}||\overrightarrow{AE}|\cos\langle\overrightarrow{BC'},\ \overrightarrow{AE}\rangle=2\sqrt{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2.$$

（方法二）由图可以看出，$\overrightarrow{BC'}$在$\overrightarrow{AE}$ 上的投影是$\overrightarrow{AA'}$，而且

$$|\overrightarrow{AE}|=\frac{1}{2}AA'=1,$$

注意到$\overrightarrow{AA'}$与$\overrightarrow{AE}$ 的方向相同，所以 $\overrightarrow{BC'}\cdot\overrightarrow{AE}$ 等于$\overrightarrow{AA'}$的长，即

$$\overrightarrow{BC'}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AA'}|=2.$$

(2) 由图可以看出，$\overrightarrow{B'D}$ 在$\overrightarrow{AE}$ 上的投影是$\overrightarrow{A'A}$，而且

$$|\overrightarrow{AE}|=\frac{1}{2}AA'=1,$$

注意到 $\overrightarrow{A'A}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 的方向相反，所以 $\overrightarrow{B'D}\cdot\overrightarrow{AE}$ 等于 $\overrightarrow{A'A}$ 的长的相反数，即

$$\overrightarrow{B'D}\cdot\overrightarrow{AE}=-|\overrightarrow{A'A}|=$$ 8 ________.

练习A

1. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，判断下列各组向量是否共面：

(1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{D_1C_1}$； (2) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{A_1D_1}$；

(3) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DD_1}$.

2. 化简：$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})+5\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)-3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

3. 已知 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是一个正方体，写出下列向量夹角的大小：

(1) $\langle\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CC_1}\rangle$； (2) $\langle\overrightarrow{DD_1},\ \overrightarrow{BA_1}\rangle$.

4 如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么这三个向量中能有两个互相平行吗？为什么？

5 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为空间向量，分别判断下列各式是否恒成立：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$；　(2) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

练习B

1 如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是空间向量，判断

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

是否成立，并说明等号何时成立.

2 已知空间四边形 $ABCD$ 中，M，N 分别是棱 AB，CD 的中点，化简下列各向量表达式：

(1) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CN}$；　(2) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

3 构造始点、终点都是平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 顶点的向量，使它与下列各式所表示的向量分别相等：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}$；　(2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A'D'}$；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AA'}$；　(4) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}$；

(5) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}-\overrightarrow{BA}$.

4 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱长为 1，求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B'C'}$；　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'C'}$；

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}$；　(4) $\overrightarrow{B'D}\cdot\overrightarrow{AB}$.

5 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是空间向量，且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

6 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，向量 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=\frac{2\pi}{3}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$ 方向上的投影的数量.

1 $\overrightarrow{AD_1}$　2 $\overrightarrow{DB_1}$　3 $\overrightarrow{DB}$　4 $\overrightarrow{BO}$　5 $\overrightarrow{AO}$　6 90°

7 $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}\rangle=180^\circ$　8 -2

人民教育出版社

1.1.2 空间向量基本定理

1. 共面向量定理

在平面向量中，我们已经学过如下结论.

共线向量基本定理 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，则存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

平面向量基本定理 如果平面内两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则对该平面内任意一个向量 $\boldsymbol{c}$，存在唯一的实数对 (x, y)，使得 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

尝试与发现

上述结论在空间中仍成立吗？如何判断空间中的三个向量是否共面？

可以看出，共线向量基本定理和平面向量基本定理在空间中仍然成立.

例如，如图 1-1-16 所示的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 在直线 AA_1 上的充要条件是，存在实数 λ，使得

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AA_1};$$

如果 M 在底面 $ABCD$ 内，则一定存在实数 s 与 t，使得

$$\overrightarrow{AM}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD},$$

而且，若 $ME\perp AD$，$MF\perp AB$，则

$$\overrightarrow{AF}=s\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AD}.$$

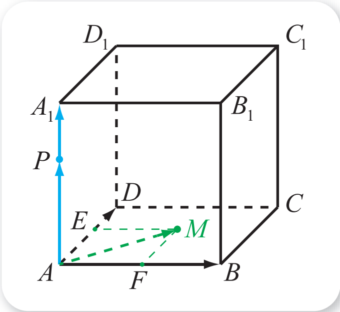


图 1-1-16

另外，在空间中，由平面向量基本定理以及空间向量加法的平行四边形法则，还可以得到如下空间中三个向量是否共面的判别方法.

共面向量定理 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是，存在唯一的实数对 (x, y)，使 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

这个定理的必要性是由平面向量基本定理保证的，而充分性只要注意到当 $x\boldsymbol{a}$ 与 $y\boldsymbol{b}$ 不共线时，$x\boldsymbol{a}$，$y\boldsymbol{b}$，$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 分别是平行四边形的两条邻边和一条对角线即可.

例 1 如图 1-1-17 所示，已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，在 AC_1 上和 BC 上分别有一点 M 和 N，且

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC_1},\ \overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC},$$

其中 $0 \leqslant k \leqslant 1$. 求证：$\overrightarrow{MN}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 共面.

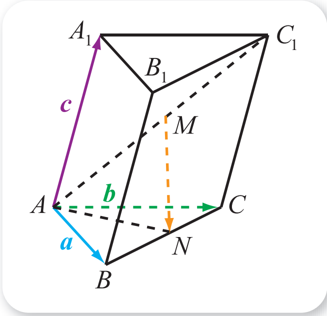


图 1-1-17

证明 因为

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC_1}=k\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\boldsymbol{a}+k\overrightarrow{BC}\\&=\boldsymbol{a}+k(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=(1-k)\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

所以

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(1-k)\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{c}=(1-k)\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{c}.$$

由共面向量定理可知，$\overrightarrow{MN}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 共面.

由共面向量定理还可得到判断空间中四点是否共面的方法：如果 A，B，C 三点不共线，则点 P 在平面 ABC 内的充要条件是，存在唯一的实数对 (x, y)，使

$$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}.$$

2. 空间向量基本定理

尝试与发现

共线向量基本定理表明，给定直线上的一个非零向量 $\boldsymbol{a}$，那么直线上任意一个向量 $\boldsymbol{b}$ 都可以唯一地写成数乘向量 $\boldsymbol{a}$ 的形式；平面向量基本定理表明，在给定的平面内，当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，任意一个向量 $\boldsymbol{c}$ 都可以写成 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的线性运算，而且表达式唯一. 空间向量有没有类似的结论？如果有，尝试归纳出来；如果没有，说明理由.

空间向量基本定理 如果空间中的三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对空间中的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组 (x, y, z)，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

空间向量基本定理可以通过作图的方式来理解.

因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，所以它们两两都不平行，过点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则平面 OAB，OAC，OBC 是两两相交的三个平面，如图 1-1-18 所示.

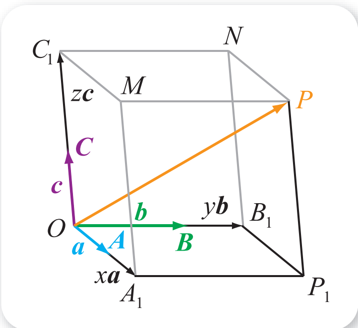


图 1-1-18

如果 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的某两个向量共面，则根据共面向量定理可知结论成立. 否则，作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$，过点 P 作直线 PP_1 平行于 OC，交

平面 OAB 于点 P_1；在平面 OAB 内，过 P_1 作直线 P_1A_1 平行于 OB，作直线 P_1B_1 平行于 OA，且分别与直线 OA，OB 相交于点 A_1，B_1；在 OC 上取一点 C_1，使得 $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{P_1P}$. 于是存在三个实数 x，y，z，使得

$$\overrightarrow{OA_1}=x\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OB_1}=y\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{OC_1}=z\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{c}.$$

作 $\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{B_1N}=\overrightarrow{P_1P}$，则 $OA_1P_1B_1\text{-}C_1MPN$ 是一个平行六面体，因此

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC},$$

即 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

下面来说明定理中的有序实数组 $(x,\ y,\ z)$ 是唯一的. 设

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c} \text{ 且 } \boldsymbol{p}=x'\boldsymbol{a}+y'\boldsymbol{b}+z'\boldsymbol{c},$$

则 $(x-x')\boldsymbol{a}+(y-y')\boldsymbol{b}+(z-z')\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 如果 $x\neq x'$，则

$$\boldsymbol{a}=-\frac{y-y'}{x-x'}\boldsymbol{b}-\frac{z-z'}{x-x'}\boldsymbol{c},$$

由此可知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，这与已知矛盾，因此 $x=x'$. 同理 $y=y'$，$z=z'$.

这也就说明，空间向量基本定理中，$\boldsymbol{p}$ 用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示的表达式 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ 唯一. 特别地，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面时，可知

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow x=y=z=0.$$

表达式 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ 一般称为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的**线性组合**或**线性表达式**. 上述空间向量基本定理说明，如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，则它们的线性组合 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ 能生成所有的空间向量. 因此，空间中不共面的三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 组成空间向量的一组**基底**，记为 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$. 此时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都称为**基向量**；如果 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，则称 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{p}$ 在基底 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ 下的分解式.

例 2 如图 1-1-19 所示平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，试用基底 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{BD'}$，$\overrightarrow{A'C}$，$\overrightarrow{DB'}$.

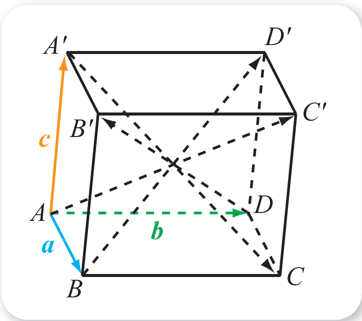


图 1-1-19

解 因为是平行六面体，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\\&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

类似地，有

$$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BC}=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad\qquad},$$

$$\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

例 3 如图 1-1-20 所示，已知直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，D 为 A_1C_1 的中点，$\angle ABC=60^\circ$，$AB=2$，$BC=CC_1=1$，求 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{CD}$.

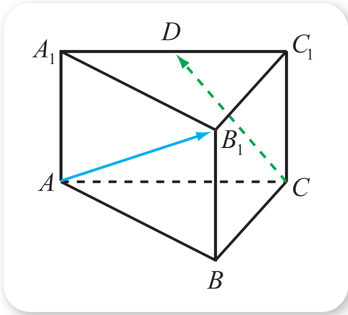


图 1-1-20

解 由题意可知，

$$|\overrightarrow{BA}|=2,\ |\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BB_1}|=1,$$

$$\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle=60^\circ,$$

$$\langle\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BA}\rangle=\langle\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC}\rangle=90^\circ,$$

所以

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times1\times\cos 60^\circ=1,\ \overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

又因为

$$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1D}=\overrightarrow{CC_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{CD}&=(-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1})\cdot\left[\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})\right]\\&=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BB_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\\&\quad\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=\boxed{3}\underline{\qquad\qquad}.\end{aligned}$$

例 3 说明，如果空间向量中，有三个不共面的向量的长度和相互之间的角度都已知，那么以这三个向量为一组基底，可以研究其他向量之间的数量积等问题.

练习A

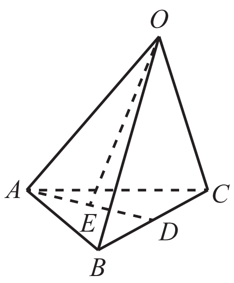
1. 如果空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$，那么这三个向量是否一定共面？
2. 如果 A，B，C 是空间中的三点，且 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，那么这三个点是否一定共线？
3. 如果 A，B，C，D 是空间中的四点，且 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AD}$，那么这四个点是否一定共面？
4. 如果空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\boldsymbol{a}-y\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，求 x，y 的值.

5 如果空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，且 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，求 x，y，z 的值.

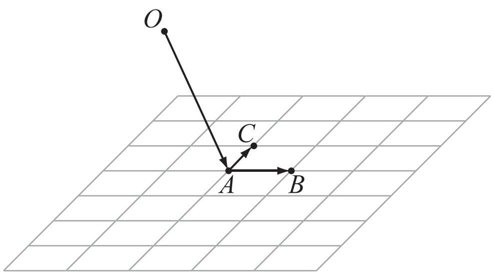
练习B

1 如果 A，B，C，D 是空间中的四点，且 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$，那么这四个点是否一定共线？

2 如图，四面体 $O\text{-}ABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$D$ 为 BC 的中点，E 为 AD 的中点，将 $\overrightarrow{OE}$ 用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示出来.



（第 2 题）



（第 3 题）

3 如图，已知 A，B，C 三点不共线，O 为平面 ABC 外任意一点，且平面 ABC 中的小方格均为单位正方形，在图中标出点 P，Q，R，S，使得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}，\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}，$$

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}，\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}.$$

4 已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，点 E 是上底面 $A'B'C'D'$ 的中心，求下列各题中 x，y 的值：

（1）$\overrightarrow{AC'}=x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})$；　　（2）$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA'}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$.

5 已知直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=60°$，$AB=2$，$BC=CC_1=1$，求 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}$.

1 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　2 $-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

3 $-\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{2}\times1+1=-\frac{1}{2}$

1.1.3 空间向量的坐标与空间直角坐标系

1. 空间向量的坐标

平面向量中，我们借助平面向量基本定理以及两个互相垂直的单位向量，引进了平面向量的坐标. 空间向量是否可以引进类似的坐标？这就是本小节我们要研究的内容.

尝试与发现

如图 1-1-21 所示，已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{e}_3$，且 $OADB$-$CEGF$ 是棱长为 1 的正方体，OF_1E_1A-$A_1D_1C_1B_1$ 是一个长方体，A_1 为 OC 的中点，$F_1O=2$.

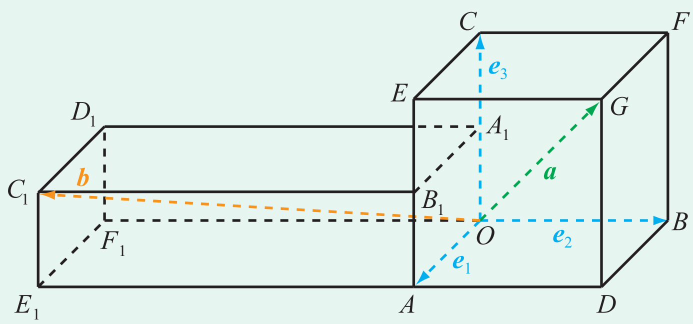


图 1-1-21

（1）设 $\overrightarrow{OG}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC_1}=\boldsymbol{b}$，将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 表示；

（2）如果 $\boldsymbol{p}$ 是空间中任意一个向量，怎样才能写出 $\boldsymbol{p}$ 在基底$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$下的分解式？

不难看出，尝试与发现中，

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3，\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3.$$

而且，对于任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$ 来说，只要将它的始点平移到点 O，然后过它的终点分别作与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 所在直线垂直的平面，就可以写出它在基底$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$下的分解式.

一般地，如果空间向量的基底$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$中，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 都是单位向量，而且这三个向量两两垂直，就称这组基底为**单位正交基底**；在单位正交基底下向量的分解称为向量的**单位正交分解**，而且，如果 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$，则称有序实数组$(x, y, z)$为向量 $\boldsymbol{p}$ 的**坐标**，记作

$$\boldsymbol{p}=(x, y, z),$$

其中 x，y，z 都称为 $\boldsymbol{p}$ 的**坐标分量**.

例 1 已知$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$是单位正交基底，分别写出下列空间向量的坐标：

（1）$\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$；（2）$\boldsymbol{q}=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$；

（3）$\boldsymbol{r}=-2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$；（4）$\boldsymbol{0}$.

解（1）$\boldsymbol{p}=(2, 3, 1)$.

（2）$\boldsymbol{q}=$ 1 ________.

（3）$\boldsymbol{r}=$ 2 ________.

（4）因为 $\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3$，所以 $\boldsymbol{0}=(0, 0, 0)$.

2. 空间向量的运算与坐标的关系

与平面向量的坐标类似，空间向量有了坐标之后，一个自然的问题就是，向量的相等以及运算与它们对应的坐标之间有什么关系？

假设空间中两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，也就是说

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3.$$

则当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，有 $x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3$，由$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$是单位正交基底和空间向量基本定理可知

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2;$$

反之结论也成立. 这就是说，空间中两个向量相等的充要条件是它们的坐标分量对应相等.

另一方面，因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3+x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{e}_1+(y_1+y_2)\boldsymbol{e}_2+(z_1+z_2)\boldsymbol{e}_3,\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2).$$

类似地，可以得出，如果 u，v 是两个实数，那么

$$\boxed{u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}=(ux_1+vx_2, uy_1+vy_2, uz_1+vz_2).}$$

又因为$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$是单位正交基底，所以

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1=0,$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3)\cdot(x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3)\\&=x_1x_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+y_1y_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2+z_1z_2\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3+(x_1y_2+x_2y_1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\\&\quad(y_1z_2+y_2z_1)\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3+(x_1z_2+x_2z_1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

$$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

即

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.}$$

特别地，

$$\boxed{|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.}$$

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由向量数量积的定义可知

$$\boxed{\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.}$$

例 2 已知 $\boldsymbol{a}=(-2,3,5)$，$\boldsymbol{b}=(3,-3,2)$，求下列向量的坐标：

（1）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；（2）$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；（3）$-5\boldsymbol{b}$.

解 （1）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,3,5)-(3,-3,2)$

$=(-2-3,3+3,5-2)=(-5,6,3)$.

（2）$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2(-2,3,5)+(3,-3,2)$

$=(-4,6,10)+(3,-3,2)=(-1,3,12)$.

（3）$-5\boldsymbol{b}=-5(3,-3,2)=$ **3** ________.

例 3 已知 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2,0)$，求 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

解 因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2+0\times(-2)+1\times0=2,$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2},$$

所以

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

因此 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$ **4** ________.

3. 空间向量的坐标与空间向量的平行、垂直

尝试与发现

我们已经知道，如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是空间向量：

（1）当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；

（2）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

如果已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标，即

$$\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1),\ \boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2),$$

那么上述结论怎样用它们的坐标表示？

可以看出，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(x_2,\ y_2,\ z_2)=\lambda(x_1,\ y_1,\ z_1)\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\lambda x_1,\\ y_2=\lambda y_1,\\ z_2=\lambda z_1.\end{cases}$$

更进一步，当 $\boldsymbol{a}$ 的每一个坐标分量都不为零时，有

$$\boxed{\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}.}$$

而且

$$\boxed{\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.}$$

例 4 （1）已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(x,\ y,\ z)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 x，y，z 所要满足的关系式；

（2）已知 $\boldsymbol{c}=(-1,\ -1,\ 1)$，$\boldsymbol{d}=(2,\ -2,\ 6)$，求一个非零空间向量 $\boldsymbol{n}$，使得 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{d}$.

解 （1）因为 $\boldsymbol{a}=(1,\ -1,\ 1)$的每一个坐标分量均不为零，因此

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}\Leftrightarrow x=-y=z.$$

（2）设 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，则

$$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{c}\text{ 且 }\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{d}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x-y+z=0,\\ 2x-2y+6z=0.\end{cases}$$

将 z 看成已知数，求解方程组可得 $x=-z$，$y=2z$. 因此

$$\boldsymbol{n}=(-z,\ 2z,\ z)=z(-1,\ 2,\ 1),$$

取 $z=1$，可得满足条件的一个非零空间向量 $\boldsymbol{n}=(-1,\ 2,\ 1)$.

例 4 的（2）说明，空间中同时垂直于两个不共线向量的空间向量有无数个，而且这无数个向量是相互平行的.

4. 空间直角坐标系

由空间向量坐标的定义可以看出，当单位正交基底的始点是同一个点 O，而且空间向量的始点也是 O 时，空间向量的坐标实际上是由它的终点位置确定的.

情境与问题

（1）如图 1-1-22 所示，怎样才能刻画地球的卫星在空间中的位置？

（2）我们知道，在直线上建立数轴后，就可以用一个数来刻画点在直线上的位置；在平面内建立平面直角坐标系之后，就可以用一对有序实数来刻画点在平面内的位置．那么，怎样才能刻画空间中点的位置呢？

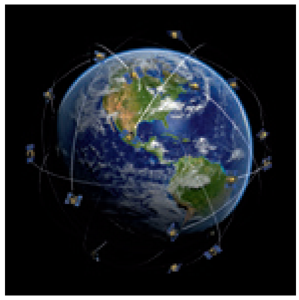


图 1-1-22

为了刻画空间中点的位置，我们可以按照如下方式建立**空间直角坐标系**：在空间中任意选定一点 O 作为坐标原点，选择合适的平面先建立平面直角坐标系 xOy，然后过 O 作一条与 xOy 平面垂直的数轴 z 轴．这样建立的空间直角坐标系记作 $Oxyz$．

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，x 轴、y 轴、z 轴是两两互相垂直的，它们都称为**坐标轴**；通过每两个坐标轴的平面都称为**坐标平面**，分别记为 xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面．z 轴的正方向一般按照如下方式确定：在 z 轴的正半轴看 xOy 平面，x 轴的正半轴绕 O 点沿逆时针方向旋转 $90°$ 能与 y 轴的正半轴重合．

在平面内画空间直角坐标系 $Oxyz$ 时，一般把 x 轴、y 轴画成水平放置，x 轴正方向与 y 轴正方向夹角为 $135°$（或 $45°$），z 轴与 y 轴（或 x 轴）垂直，如图 1-1-23（1）（2）所示．

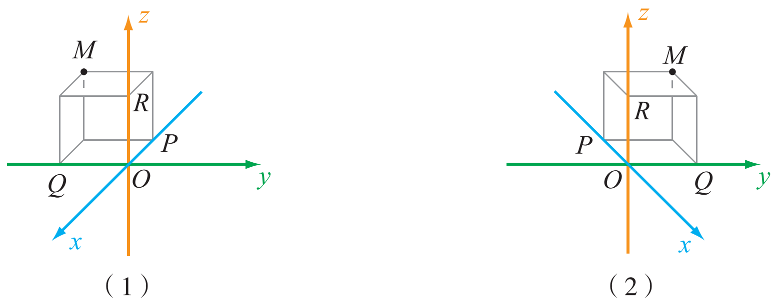


图 1-1-23

建立了空间直角坐标系 $Oxyz$ 之后，如图 1-1-23 所示，设 M 为空间中的一个点，过 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，设这些平面与 x 轴、y 轴、z 轴依次交于点 P，Q，R，且 P，Q，R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x，y，z，那么点 M 就对应唯一确定的有序实数组 (x, y, z)；反过来，给定有序实数组 (x, y, z)，可以在 x 轴、y 轴、z 轴上依次取坐标为 x，y，z 的点 P，Q，R，分别过 P，Q，R 作垂直于 x 轴、y 轴、

z 轴的一个平面，则有序实数组 (x, y, z) 就与这三个平面唯一的公共点对应.

这样一来，空间中的点与三个实数组成的有序实数组之间，有了一一对应关系，空间一点 M 的位置完全由有序实数组 (x, y, z) 确定，因此将 (x, y, z) 称为点 M 的**坐标**，记作 $M(x, y, z)$. 此时，x，y，z 都称为点 M 的坐标分量，且 x 称为点 M 的**横坐标**（或 x 坐标），y 称为点 M 的**纵坐标**（或 y 坐标），z 称为点 M 的**竖坐标**（或 z 坐标）.

另外，空间中建立了空间直角坐标系之后，三个坐标平面将不在坐标平面内的点分成了八个部分，如图 1-1-24 所示. 习惯上，每一部分都称为一个**卦限**，按逆时针方向，在坐标平面 xOy 的上方，分别是第Ⅰ卦限、第Ⅱ卦限、第Ⅲ卦限、第Ⅳ卦限；在 xOy 的下方，分别是第Ⅴ卦限、第Ⅵ卦限、第Ⅶ卦限、第Ⅷ卦限. 事实上，根据点的坐标的特征，第Ⅰ卦限的点集用集合可表示为

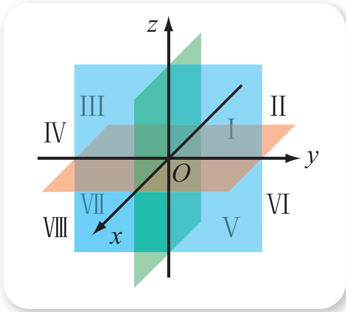


图 1-1-24

$$\{(x, y, z) \mid x>0, y>0, z>0\},$$

其他卦限的点集可用类似的方法表示. 由此可以看出，图 1-1-23（1）中的点 M 在第Ⅲ卦限，图 1-1-23（2）中的点 M 在第Ⅱ卦限.

例 5 已知棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 CC_1 的中点，F 是 A_1B_1 的中点. 以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图 1-1-25 所示的空间直角坐标系. 求以下各点的坐标：A，B，B_1，E，F.

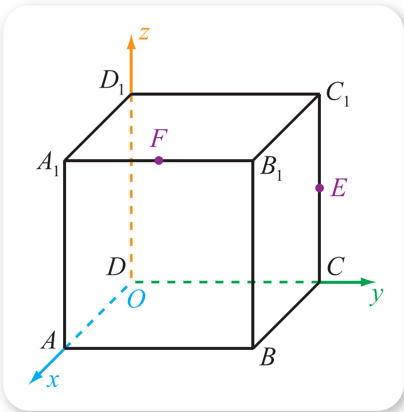


图 1-1-25

解 注意到正方体的棱长为 1，因此

$A(1, 0, 0)$，$B(1, 1, 0)$，$B_1(1, 1, 1)$.

又因为 E，F 分别是 CC_1，A_1B_1 的中点，所以

$$E\left(0, 1, \frac{1}{2}\right), F\left(1, \frac{1}{2}, 1\right).$$

可以看出，在空间中建立了空间直角坐标系之后，如果指定空间中的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的始点都在原点 O，且它们的方向分别与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向相同，则 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 是单位正交基底，且向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标与 P

点的坐标相同，即

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=(x,\ y,\ z)\Leftrightarrow P(x,\ y,\ z);$$

反之，如果$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$为单位正交基底，则任意选定一点作为原点$O$，并使得$x$轴、$y$轴、$z$轴的正方向分别与$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$的方向相同，则可以建立空间直角坐标系，而且其中向量$\overrightarrow{OP}$的坐标与P点的坐标仍然相同.

为了方便起见，以后谈到空间直角坐标系时，总是默认为已经按照上述方式指定了单位正交基底$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$；谈到空间中向量的坐标时，总是认为已经按照单位正交基底$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$建立了空间直角坐标系. 可以看出，在空间直角坐标系中，同样可以讨论轴对称、中心对称等，它们的意义与平面直角坐标系中的类似. 与两点关于直线对称类似，如果连接两点的线段的中点在一个平面内，且这两点确定的直线垂直于该平面，则称这两点关于该平面对称.

5. 空间向量坐标的应用

利用空间向量的坐标与空间直角坐标系的关系，我们可以得到空间直角坐标系中两点之间的距离公式与中点坐标公式.

事实上，设$A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$为空间直角坐标系中的两点，则$\overrightarrow{OA}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,\ y_2,\ z_2)-(x_1,\ y_1,\ z_1)\\&=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),\end{aligned}$$

因此

$$\boxed{AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$

这就是空间直角坐标系中两点之间的距离公式. 上面的推导过程也说明，**空间向量在空间直角坐标系中的坐标，等于表示这个空间向量的有向线段的终点坐标减去始点坐标.**

另一方面，设线段AB的中点为$M(x,\ y,\ z)$，则$\overrightarrow{OM}=(x,\ y,\ z)$，又因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)\\&=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right),\end{aligned}$$

所以M的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

这就是空间直角坐标系中的中点坐标公式.

例 6 在空间直角坐标系中，已知 $A(-2, -3, 5)$，$B(0, 2, 2)$，$C(2, 7, -1)$，求证：A，B，C 三点共线.

证明 因为

$$\overrightarrow{AB}=(0+2, 2+3, 2-5)=(2, 5, -3),$$

$$\overrightarrow{AC}=\boxed{5}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

所以 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$，因此 $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{AB}$，又因为这两个向量有公共的始点，所以 A，B，C 三点共线.

例 7 如图 1-1-26 所示，已知直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB=C_1C=2$，$AC\perp CB$，且 D，E 分别是棱 AB，B_1C_1 的中点. 建立适当的空间直角坐标系，求 A_1B 与 DE 的长.

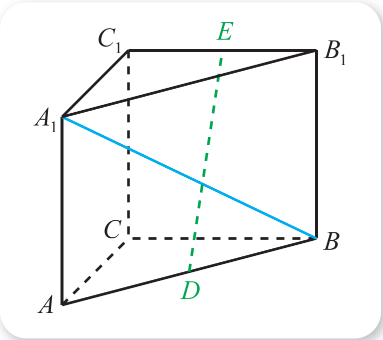


图 1-1-26

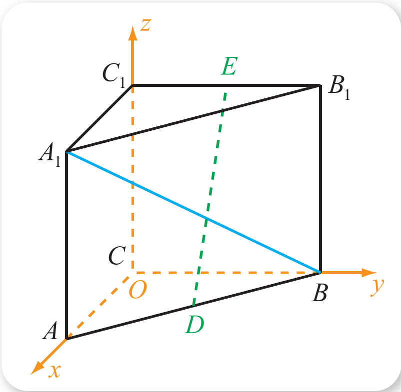


图 1-1-27

解 以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图 1-1-27 所示的空间直角坐标系. 由题意可知

$$C(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(0, 2, 0),$$

$$A_1(2, 0, 2), B_1(0, 2, 2), C_1(0, 0, 2).$$

因此

$$A_1B=\sqrt{(0-2)^2+(2-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{3}.$$

又因为 D 是 AB 的中点，所以 D 的坐标为

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+0}{2}\right)=(1, 1, 0),$$

即 $D(1, 1, 0)$. 同理可得 $E(0, 1, 2)$. 从而

$$DE=\boxed{6}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

例 7 说明，给定空间几何体后，建立适当的空间直角坐标系，就可以借助点的坐标研究有关的几何问题.

练习A

1. 已知$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$是单位正交基底，分别写出下列空间向量的坐标：

(1) $\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$；　(2) $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$；　(3) $\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$.

2. 已知$\boldsymbol{a}=(3, 2, -1)$，$\boldsymbol{b}=(5, -3, 2)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$；　(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　(3) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

3. 分别判断下列各对向量是否平行：

(1) $(0, 0, 5)$，$(0, 0, 7)$；　(2) $(4, 0, 3)$，$(8, 0, 6)$.

4. 分别判断下列各对向量是否垂直：

(1) $(3, 4, 0)$，$(0, 0, 5)$；　(2) $(3, 1, 3)$，$(1, 0, -1)$.

5. 根据点的特征，用集合分别表示空间直角坐标系中：

(1) 第Ⅱ卦限、第Ⅲ卦限、第Ⅵ卦限、第Ⅶ卦限、第Ⅷ卦限的点集；

(2) y 轴、xOy 平面、yOz 平面的点集.

6. 已知$M(x, y, z)$为空间直角坐标系中的一点，O为坐标原点，求OM的长.

7. 已知点$A(1, 5, 3)$，$B(3, 1, 4)$，求线段AB中点的坐标.

8. 分别求满足下列条件的向量$\boldsymbol{x}$：

(1) $2(-1, 5, 1)+4\boldsymbol{x}=(2, 14, -2)$；

(2) $(3, 7, 1)+2\boldsymbol{x}=(6, 10, 4)-\boldsymbol{x}$.

9. 根据下列条件，分别求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标：

(1) $A(2, -3, -1)$，$B(-6, 5, 3)$；

(2) $A(-2, 3, 6)$，$B(-8, -6, 4)$.

练习B

1. 已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是空间向量，根据下列各条件分别求$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$：

(1) $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=1$；　(2) $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=-1$；　(3) $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=0$；

(4) $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{1}{2}$；　(5) $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；　(6) $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 已知$\boldsymbol{a}=(2, -3, 1)$，$\boldsymbol{b}=(2, 0, 3)$，$\boldsymbol{c}=(0, 0, 2)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　(2) $(\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b})$.

3. 求下列两个空间向量夹角的余弦：

(1) $\boldsymbol{a}=(2, -3, \sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(1, 0, 0)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(-1, -1, 1)$，$\boldsymbol{b}=(-1, 0, 1)$.

4. 已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是空间向量，根据下列各条件分别求$\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$：

(1) $\boldsymbol{a}=(1, 2, 0)$，$\boldsymbol{b}=(2, 0, 5)$；　(2) $\boldsymbol{a}=(3, 4, 5)$，$\boldsymbol{b}=(2, -1, 0)$.

5 已知 $\boldsymbol{a}=(x,-2,5)$ 与 $\boldsymbol{b}=(1,y,-3)$ 平行，求 x，y.

6 已知 $\boldsymbol{a}=(-2,x,5)$ 与 $\boldsymbol{b}=(-8,y,0)$ 垂直，求 x，y 应满足的条件.

7 已知 $\boldsymbol{a}=(5,-3,12)$，$\boldsymbol{b}=(-2,0,5)$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$.

8 已知 $\boldsymbol{a}=(-2,1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2,1)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$，求实数 λ 的值.

9 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,-1)$，求一个空间向量 $\boldsymbol{n}$，使 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$.

1 $(-1,1,-2)$　2 $(0,-2,-1)$　3 $(-15,15,-10)$　4 60°

5 $(2+2,7+3,-1-5)=(4,10,-6)$　6 $\sqrt{(0-1)^2+(1-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$

习题1-1A

1 已知四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{BD_1}=$（　　）.

(A) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　(B) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　(C) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　(D) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

2 分别求下列各组向量夹角的余弦值：

(1) $\boldsymbol{a}=(3,-5,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,2,0)$；

(2) $\boldsymbol{c}=(-1,3,-5)$，$\boldsymbol{d}=(3,12,0)$.

3 一个棱长为 1 的正方体，对称中心在原点且每一个面都平行于坐标平面，写出这个正方体 8 个顶点的坐标.

4 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱长为 1，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　(4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5 已知点 $A(1,0,1)$，$B(1,1,1)$，$C(-3,1,5)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的长度.

6 分别求与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量：

(1) $\boldsymbol{a}=(2,-3,5)$；　(2) $\boldsymbol{a}=(0,-3,4)$.

7 在空间直角坐标系中，已知点 $P(x,y,z)$，下列叙述正确的序号有____________.

①点 P 关于 x 轴的对称点是 $P_1(x,-y,z)$

②点 P 关于 yOz 平面的对称点是 $P_2(x,-y,-z)$

③点 P 关于 y 轴的对称点是 $P_3(x,\ -y,\ z)$

④点 P 关于原点的对称点是 $P_4(-x,\ -y,\ -z)$

8 已知 AB，AC，AD 为长方体的三条棱，且 $A(1,\ 2,\ 1)$，$B(1,\ 5,\ 1)$，$C(1,\ 2,\ 7)$，$D(3,\ 2,\ 1)$，求长方体这三条棱的长和体对角线的长.

9 任作一个平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，分别作出向量 $\overrightarrow{AM}$，使它等于如下向量：

(1) $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；　　(2) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$；　　(3) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

习题1-1B

1 在空间四边形 $ABCD$ 中，连接 AC，BD，设 M，G 分别是 BC，CD 的中点，化简下列各向量表达式：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$；　　(2) $\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

2 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是空间向量，且 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$，求 $\langle 2\boldsymbol{a},\ -3\boldsymbol{b}\rangle$.

3 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，且它们的夹角为 $60°$，求 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|$.

4 如果 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，那么一定有 $x=1$，$y=2$，$z=-3$ 吗？为什么？

5 已知空间直角坐标系中，平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 满足：$A(-2,\ 1,\ 3)$，$B(2,\ 2,\ 1)$，$C(3,\ 4,\ 2)$，$D(-1,\ 3,\ 4)$，且平行六面体的体对角线的交点为 $M(1,\ 1,\ 1)$，求 A_1，B_1，C_1，D_1 的坐标.

6 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M，N 分别是面对角线 A_1B 与 B_1D_1 的中点，若 $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DD_1}=\boldsymbol{c}$，将 $\overrightarrow{MN}$ 用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示出来.

7 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是非零空间向量，根据下列各条件分别求 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；　　(2) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

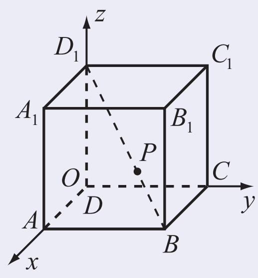
(3) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；　　(4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

8 已知 $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ 为单位正交基底，且非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$.

(1) 求证：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=a_1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=a_2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=a_3$；

(2) 分别求 $\boldsymbol{a}$ 与基向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 夹角的余弦.

9 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 为 BD_1 上一点，且 $BP=\frac{1}{3}BD_1$. 建立如图所示的空间直角坐标系，求点 P 的坐标.



（第 9 题）

⑩ 已知点 $A(2, 3, -1)$，$B(8, -2, 4)$，$C(3, 0, 5)$，是否存在实数 x，使 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$ 垂直？

⑪ 若 $ABCD$ 为平行四边形，且 $A(4, 1, 3)$，$B(2, -5, 1)$，$C(-3, 7, -5)$，求顶点 D 的坐标.

⑫ 已知 $A(2, -5, 1)$，$B(2, -2, 4)$，$C(1, -4, 1)$，求：

(1) $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle$；

(2) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影的数量.

⑬ 已知 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 是长方体，$AB=AA'=2$，$AD=4$，且 E 为侧面 $AA'B'B$ 的中心，F 为 $A'D'$ 的中点，分别求 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED'}$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB'}$，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC'}$.

习题1-1C

① 如果存在三个不全为 0 的实数 x，y，z，使得 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是否一定共面？为什么？

② 已知空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，且 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，判断向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ 是否共面，并说明理由.

③ 已知向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 可以构成空间向量的一组基底，则这三个向量中哪一个向量可以与向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 和向量 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 构成空间向量的另一组基底？

④ 已知 A，B，C 是空间中不共线的三点，O 是空间中任意一点，求证：P 在平面 ABC 内的充要条件是，存在满足 $x+y+z=1$ 的实数 x，y，z，使得

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}.$$

⑤ 已知四面体 $ABCD$ 的每条棱长都等于 a，点 E，F，G 分别是棱 AB，AD，DC 的中点，求下列向量的数量积：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$；　(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$；　(3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}$；

(4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}$；　(5) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BA}$；　(6) $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF}$.

人民教育出版社

1.2 空间向量在立体几何中的应用

从本章前面的内容中，我们已经初步学会怎样用空间向量处理立体几何问题，这里我们将探讨怎样借助空间向量来处理立体几何中更复杂的问题. 由于立体几何主要研究的是空间中点、线、面的位置关系以及空间几何体的性质等，因此我们首先要了解怎样用空间向量来刻画空间中点、线、面的位置.

1.2.1 空间中的点、直线与空间向量

1. 空间中的点与空间向量

尝试与发现

（1）如图 1-2-1 所示的四面体 A-BCD 中，怎样借助空间向量来描述 A，B，C 在空间中是不同的点？

（2）一般地，怎样借助空间向量来刻画空间中点的位置？

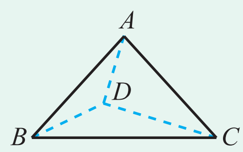


图 1-2-1

在图 1-2-1 中，可以借助向量 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$ 的不同，来描述 A，B，C 在空间中是不同的点.

一般地，如果在空间中指定一点 O，那么空间中任意一点 P 的位置，都可以由向量 $\overrightarrow{OP}$ 唯一确定，此时，$\overrightarrow{OP}$ 通常称为点 P 的位置向量. 特别地，空间直角坐标系中的任意一点都由它的位置向量唯一确定，从而也就由它的坐标唯一确定.

2. 空间中的直线与空间向量

尝试与发现

（1）如图 1-2-2 所示的长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{v}$. 如果只借助 $\boldsymbol{v}$，能不能确定直线 AB 在空间中的位置？

（2）一般地，怎样借助空间向量来刻画空间中直线的位置？

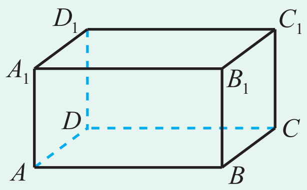


图 1-2-2

图 1-2-2 中，因为

$$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D_1C_1},$$

所以只借助向量 $\boldsymbol{v}$ 不能确定直线 AB 在空间中的位置，但是向量 $\boldsymbol{v}$ 可以描述所有与直线 AB 平行或重合的直线.

一般地，如果 l 是空间中的一条直线，$\boldsymbol{v}$ 是空间中的一个非零向量，且表示 $\boldsymbol{v}$ 的有向线段所在的直线与 l 平行或重合，则称 $\boldsymbol{v}$ 为直线 l 的一个**方向向量**. 此时，也称向量 $\boldsymbol{v}$ 与直线 l 平行，记作 $\boldsymbol{v}/\!/l$.

按照空间中直线的方向向量的定义可知：

（1）如果 A，B 是直线 l 上两个不同的点，则 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{AB}$ 就是直线 l 的一个方向向量；

（2）如果 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的一个方向向量，则对任意的实数 $\lambda\neq0$，空间向量 $\lambda\boldsymbol{v}$ 也是直线 l 的一个方向向量，而且直线 l 的任意两个方向向量都平行；

（3）如果 $\boldsymbol{v}$ 为直线 l 的一个方向向量，A 为直线 l 上一个已知的点，则对于直线 l 上任意一点 B，向量 $\overrightarrow{AB}$ 一定与非零向量 $\boldsymbol{v}$ 平行，从而可知存在唯一的实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{v}$，这就是说，空间中直线 l 的位置可由 $\boldsymbol{v}$ 和点 A 唯一确定；

（4）如果 $\boldsymbol{v}_1$ 是直线 l_1 的一个方向向量，$\boldsymbol{v}_2$ 是直线 l_2 的一个方向向量，则

$$\boxed{\boldsymbol{v}_1/\!/\boldsymbol{v}_2\Leftrightarrow l_1/\!/l_2\text{，或 }l_1\text{ 与 }l_2\text{ 重合.}}$$

例 1 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 C_1D_1 的中点，求证：直线 BD_1 与直线 CE 不平行.

证明 以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，正方体的棱长为单位长度，建立如图 1-2-3 所示的空间直角坐标系. 则

$$B(1,\ 1,\ 0),\ D_1(0,\ 0,\ 1),$$

$C(0, 1, 0)$，$E\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$，

所以 $\overrightarrow{BD_1}=(-1, -1, 1)$，$\overrightarrow{CE}=\left(0, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

又因为 $\frac{0}{-1}\neq\frac{-\frac{1}{2}}{-1}$，所以 $\overrightarrow{BD_1}$ 与 $\overrightarrow{CE}$ 不平行.

因为 $\overrightarrow{BD_1}$ 为直线 BD_1 的一个方向向量，$\overrightarrow{CE}$ 为直线 CE 的一个方向向量，当 $BD_1/\!/CE$ 时，必有 $\overrightarrow{BD_1}/\!/\overrightarrow{CE}$. 由上可知直线 BD_1 与直线 CE 不平行.

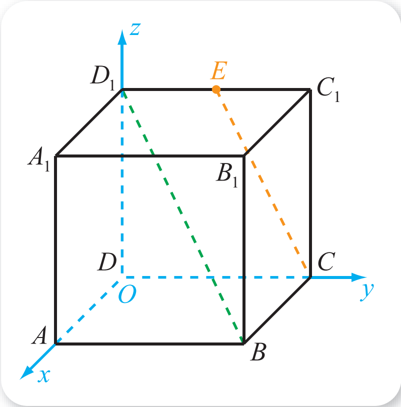


图 1-2-3

3. 空间中两条直线所成的角

我们已经知道，空间中两条相交直线所成角的大小，指的是它们相交所得到的不大于直角的角的大小；两条异面直线 a，b 所成角的大小，等于两条相交直线 a'，b'所成角的大小，其中 a'与 a 平行或重合，b'与 b 平行或重合；空间中两条平行直线所成角的大小规定为 0°. 这就是说，空间中任意两条直线所成角（即它们之间的夹角）的大小都是确定的. 特别地，当空间中两条直线 l，m 所成角的大小为 90°时，l 与 m 垂直，记作 $l\perp m$.

尝试与发现

设 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 分别是空间中直线 l_1，l_2 的方向向量，且 l_1 与 l_2 所成角的大小为 θ，通过作图讨论 θ 与 $\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$的关系.

如图 1-2-4（1）（2）所示，可以看出

$$\boxed{\theta=\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle \text{或} \theta=\pi-\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle.}$$

特别地，

$$\sin\theta=\sin\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle, \quad \cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle|.$$

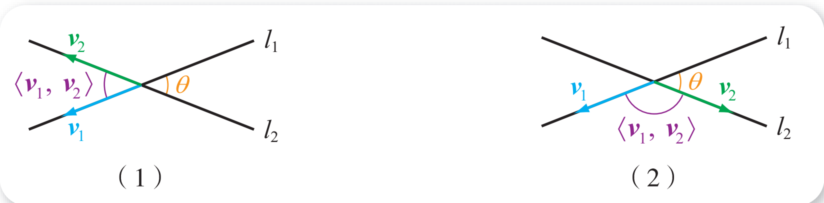


图 1-2-4

而且

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0.$$

利用上述直线与直线所成的角与它们的方向向量的夹角之间的关系，可以方便地证明我们在必修部分中归纳出的线面垂直的判定定理：如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则这条直线与这个平面垂直．证明过程如下．

例 2 已知 a，b 是平面 α 内的两条相交直线，直线 n 满足 $n \perp a$，$n \perp b$．求证：$n \perp \alpha$．

证明 设 m 是 α 内的任意一条直线，且 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{m}$ 分别为直线 n，a，b，m 的方向向量，如图 1-2-5 所示．则根据已知有

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = 0, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} = 0.$$

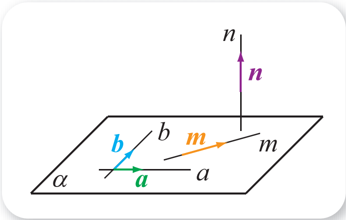


图 1-2-5

因为 a 与 b 相交，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，又因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{m}$ 共面，所以由共面向量定理可知，存在唯一的实数对(x, y)，使$\boldsymbol{m} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$，因此

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m} = x\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} + y\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} = 0,$$

从而可知 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{m}$，所以 $n \perp m$．

因为直线 n 垂直于平面 α 内的任意一条直线，所以 $n \perp \alpha$．

例 3 如图 1-2-6 所示，在三棱锥 O-ABC 中，OA，OB，OC 两两互相垂直，E 为 OC 的中点，且 $OB = OC = 2OA = 2$，求直线 AE 与 BC 所成角的大小．

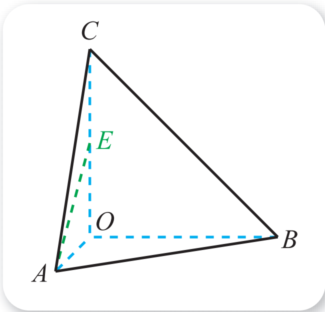


图 1-2-6

解 （方法一）根据已知可得 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 不共面，且

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, \quad |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2,$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0.$$

又因为

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB},$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= 2.\end{aligned}$$

类似地，

$$|\overrightarrow{AE}|^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}^2=2,$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OC}^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2=8.$$

所以

$$\cos\langle\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{8}}=\frac{1}{2},$$

因此$\langle\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\pi}{3}$，即直线 AE 与 BC 所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$.

（方法二）因为 OA，OB，OC 两两互相垂直，所以能以 O 为原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图 1-2-7 所示空间直角坐标系. 则由 $OB=OC=2OA=2$ 可知

$$A(1,\ 0,\ 0),\ E(0,\ 0,\ 1),$$

$$B(0,\ 2,\ 0),\ C(0,\ 0,\ 2),$$

所以 $\overrightarrow{AE}=$ 1 ________________，$\overrightarrow{BC}=$ 2 ________________，因此

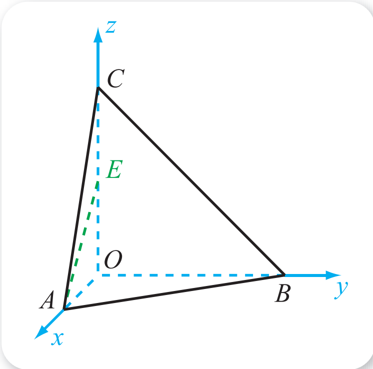


图 1-2-7

$$\cos\langle\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{BC}|}$$

$$=\frac{1\times2}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\times\sqrt{(-2)^2+2^2}}=\frac{1}{2},$$

从而$\langle\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\pi}{3}$，即直线 AE 与 BC 所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$.

（方法三）设 OB 的中点为 F，连接 EF，AF. 由 E，F 分别为 OC，OB 中点可知 EF 为$\triangle OBC$ 的中位线，从而 $EF\parallel BC$，因此直线 AE 与 BC 所成角的大小等于直线 AE 与 EF 所成角的大小.

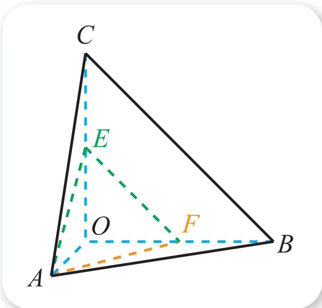


图 1-2-8

又易知 $OA=OE=OF=1$，而且 OA，OE，OF 两两互相垂直，因此

$$AE=EF=AF=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

所以$\triangle AEF$ 是等边三角形，从而$\angle AEF=\frac{\pi}{3}$.

因此，直线 AE 与 BC 所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$.

例 3 说明，在解决空间中直线与直线所成角的问题时，既可以根据有关几何条件直接构造出相应的角求解，也可以借助空间向量求解．在使用空间向量求解时，既可以选择合适的基底来计算，也可以通过建立空间直角坐标系来计算．请大家自行总结这些方法的优缺点以及一般步骤．

拓展阅读

立体几何与物质的性质

从化学学科中可以知道，即使组成物质的元素完全一样，物质的性质也有可能完全不一样．

例如，石墨和金刚石都是由碳元素组成的，但是它们的性质差异很大：石墨是一种有金属光泽且不透明的细鳞片状固体，石墨很软；纯净的金刚石是无色透明的正八面体形状的固体，金刚石是天然存在的最硬的物质．为什么会这样呢？这是因为组成这两种物质的碳原子在空间中的排列方式不同，如图 1 所示是组成石墨的碳原子在空间中排列的结构示意图，如图 2 所示则是组成金刚石的碳原子在空间中排列的结构示意图．

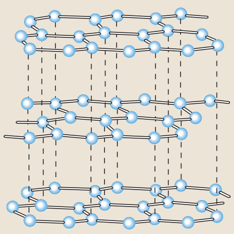


图 1

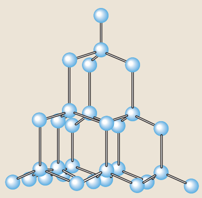


图 2

事实上，组成金刚石的每个碳原子，都与其相邻的 4 个碳原子以完全相同的方式连接．从立体几何的角度来看，可以认为 4 个碳原子分布在一个所有棱长都相等的正三棱锥的 4 个顶点处，而中间的那个碳原子处于与这 4 个碳原子距离都相等的位置，如图 3 所示．

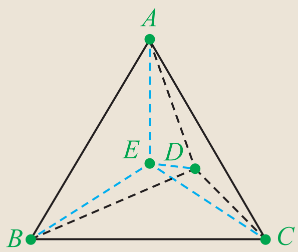


图 3

这就是说，图 3 中有 $AE=BE=CE=DE$．有意思的是，再根据 $A\text{-}BCD$ 是边长都相等的正三棱锥，借助立体几何的知识，就可以算出图 3 中以点 E 为顶点的 6 个角的余弦值均为 $-\dfrac{1}{3}$（即大小约为 $109°28'$，请读者自行计算）．

从化学学科的物质结构与性质中，可以找到很多与立体几何有关的知识，感兴趣的读者可以进一步查阅有关资料．

4. 异面直线与空间向量

我们已经知道，异面直线指的是空间中既不平行也不相交的直线．这里我们要讨论的是怎样用空间向量来研究异面直线．

尝试与发现

设 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 分别是空间中直线 l_1，l_2 的方向向量.

（1）如果 l_1 与 l_2 异面，那么 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 可能平行吗？

（2）如果 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不平行，那么 l_1 与 l_2 一定异面吗？

显然，如果 l_1 与 l_2 异面，则 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 是不可能平行的；反之，如果 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不平行，则 l_1 与 l_2 可能异面，也可能相交. 这就是说，“$\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不平行”是“l_1 与 l_2 异面”的必要不充分条件.

更进一步，如图 1-2-9（1）（2）所示，如果 $A\in l_1$，$B\in l_2$：则 l_1 与 l_2 异面时，可知 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\overrightarrow{AB}$ 是不共面的；反之，如果 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\overrightarrow{AB}$ 不共面，则 l_1 与 l_2 是异面的. 也就是说，此时，“$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\overrightarrow{AB}$ 不共面”是“l_1 与 l_2 异面”的充要条件.

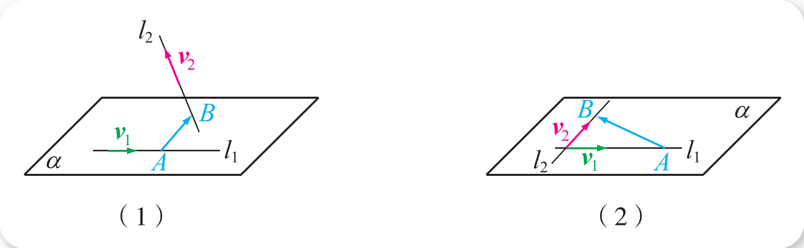


图 1-2-9

例 4 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，判断满足下列条件的点 M，N 是否存在：$M\in AD_1$，$N\in BD$，$MN\perp AD_1$，$MN\perp BD$.

解 以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，正方体的棱长为单位长度，建立如图 1-2-10 所示的空间直角坐标系. 则

$A(1,\ 0,\ 0)$，$D_1(0,\ 0,\ 1)$，

$B(1,\ 1,\ 0)$，$D(0,\ 0,\ 0)$，

所以 $\overrightarrow{AD_1}=(-1,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,\ -1,\ 0)$，$\overrightarrow{AB}=(0,\ 1,\ 0)$.

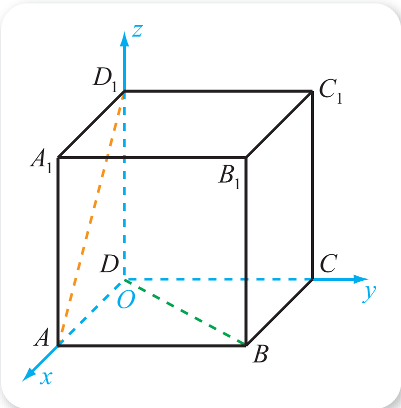


图 1-2-10

假设满足条件的 M，N 存在，而且

$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AD_1}=$ **3** __________，

$\overrightarrow{BN}=s\overrightarrow{BD}=$ **4** __________，

则

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=(t-s,\ -s+1,\ -t).$$

人民教育出版社

因为 $MN\perp AD_1$，$MN\perp BD$，所以 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AD_1}$，$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BD}$，从而

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-(t-s)-t=0,\\ -(t-s)-(-s+1)=0,\end{cases}$$

解得 $t=$ 5 ________，$s=$ 6 ________.

因此，满足条件的 M，N 是存在的.

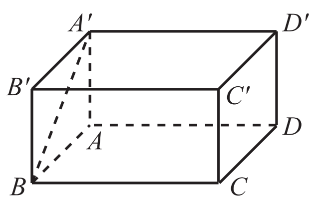
一般地，如果 l_1 与 l_2 是空间中两条异面直线，$M\in l_1$，$N\in l_2$，$MN\perp l_1$，$MN\perp l_2$，则称 MN 为 l_1 与 l_2 的**公垂线段**. 利用例 4 中的方法，可以证明空间中任意两条异面直线的公垂线段都存在并且唯一. 两条异面直线的公垂线段的长，称为这两条异面直线之间的距离.

练习A

1. 设(2，−2，1)，(3，−3，1)是空间直线 l 上的点，求直线 l 的一个方向向量.
2. 设 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 分别是空间中两条不重合的直线 l_1，l_2 的方向向量，分别根据下列条件判断直线 l_1，l_2 的位置关系.
   (1) $\boldsymbol{v}_1=(0,\ 0,\ 1)$，$\boldsymbol{v}_2=(0,\ 0,\ -3)$；
   (2) $\boldsymbol{v}_1=(2,\ -1,\ -2)$，$\boldsymbol{v}_2=(6,\ -3,\ -6)$.
3. 设 $\boldsymbol{v}_1=(1,\ 2,\ -2)$，$\boldsymbol{v}_2=(-2,\ 3,\ 2)$分别是空间中直线 l_1，l_2 的方向向量，求直线 l_1，l_2 所成角的大小.
4. 已知点 $A(3,\ 4,\ 5)$，$B(3,\ 4,\ 0)$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OA}$，且 O 为坐标原点，求点 C 的坐标.
5. 如果直线 l 与直线 m 平行，$\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的一个方向向量，那么 $\boldsymbol{v}$ 也是直线 m 的一个方向向量吗？

练习B

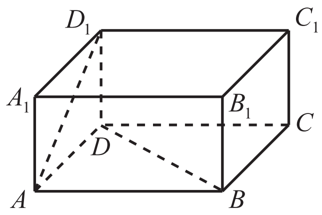
1. 已知非零向量 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 分别有 $\boldsymbol{v}_1/\!/l$，$\boldsymbol{v}_2/\!/l$，是否一定存在非零实数 λ，使得 $\boldsymbol{v}_2=\lambda\boldsymbol{v}_1$？为什么？
2. 已知点 $A(-2,\ 3,\ 0)$，$B(1,\ 3,\ 2)$，P 为线段 AB 上一点，且 $AP:PB=2:3$，求点 P 的坐标.
3. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中：
   (1) 哪些棱所在直线与直线 AA' 互为异面直线且互相垂直？
   (2) 若 $AB=\sqrt{3}$，$AA'=1$，求向量 $\overrightarrow{BA'}$ 分别与 $\overrightarrow{CC'}$，$\overrightarrow{D'C'}$，$\overrightarrow{B'C'}$ 的夹角.



（第 3 题）

④ 如图，已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=AB=2DD_1$，判断满足下列条件的点 M，N 是否存在：$M\in AD_1$，$N\in BD$，$MN\perp AD_1$，$MN\perp BD$.

⑤ 已知空间四边形 $ABCD$ 中，$AD\perp BC$，$AB\perp CD$，求证：$AC\perp BD$.



（第 4 题）

1 $(-1,\ 0,\ 1)$　　2 $(0,\ -2,\ 2)$　　3 $(-t,\ 0,\ t)$　　4 $(-s,\ -s,\ 0)$

5 $\dfrac{1}{3}$　　6 $\dfrac{2}{3}$

1.2.2 空间中的平面与空间向量

1. 平面的法向量

尝试与发现

我们已经知道，空间中的直线，根据它的方向向量和一个点，可以描述这条直线的位置．那么，对于空间中的平面，能否引进类似的向量来描述其位置？

如果 α 是空间中的一个平面，$\boldsymbol{n}$ 是空间中的一个非零向量，且表示 $\boldsymbol{n}$ 的有向线段所在的直线与平面 α 垂直，则称 $\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的一个**法向量**．此时，也称 $\boldsymbol{n}$ 与平面 α 垂直，记作 $\boldsymbol{n}\perp\alpha$.

例如，如图 1-2-11 的长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AA_1}$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量，$\overrightarrow{AA_1}$ 也是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的一个法向量；类似地，$\overrightarrow{AB}$ 是平面 ADD_1A_1 和平面 BCC_1B_1 的一个法向量.

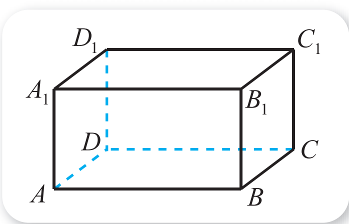


图 1-2-11

根据定义可知，平面的法向量有如下性质：

（1）如果直线 l 垂直平面 α，则直线 l 的任意一个方向向量都是平面 α 的一个法向量；

（2）如果 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，则对任意的实数 $\lambda\neq0$，空间向量 $\lambda\boldsymbol{n}$ 也是平面 α 的一个法向量，而且平面 α 的任意两个法向量都平行；

（3）如果 $\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的一个法向量，A 为平面 α 上一个已知的点，则对于平面 α 上任意一点 B，向量 $\overrightarrow{AB}$ 一定与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即 $\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0$，从而可知平面 α 的位置可由 $\boldsymbol{n}$ 和 A 唯一确定.

尝试与发现

（1）如果 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的一个方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，分别探讨 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{v}$ 时，直线 l 与平面 α 的关系；

（2）如果 $\boldsymbol{n}_1$ 是平面 α_1 的一个法向量，$\boldsymbol{n}_2$ 是平面 α_2 的一个法向量，分别探讨 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$ 与 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$ 时，平面 α_1 与平面 α_2 的关系.

作图 1-2-12（1）（2）探讨尝试与发现（1）中直线 l 与平面 α 的关系，可以看出：当 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{v}$ 时，l 与 α 垂直；当 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{v}$ 时，l 与 α 平行，或者 l 在 α 内.

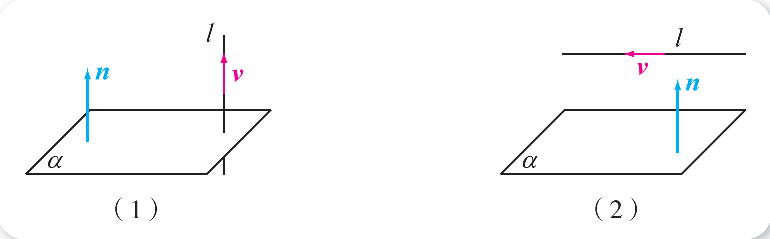


图 1-2-12

作图 1-2-13（1）（2）探讨尝试与发现（2）中平面 α_1 与平面 α_2 的关系，可以看出：当 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$ 时，α_1 与 α_2 垂直；当 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$ 时，α_1 与 α_2 平行，或者 α_1 与 α_2 重合.

图 1-2-13

例 1 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是 A_1B 与 A_1C_1 的中点. 求证：$MN/\!/$平面 ADD_1A_1.

证明 以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，正方体的棱长为单位长度，建立如图 1-2-14 所示的空间直角坐

标系. 则

$B(1, 0, 0)$, $A_1(0, 0, 1)$,

$C_1(1, 1, 1)$,

又因为 M 是 A_1B 的中点, 所以 M 的坐标为

$$\left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),$$

即 $M\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. 类似地, 可得 $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. 因此 $\overrightarrow{MN}=$ **1** ______.

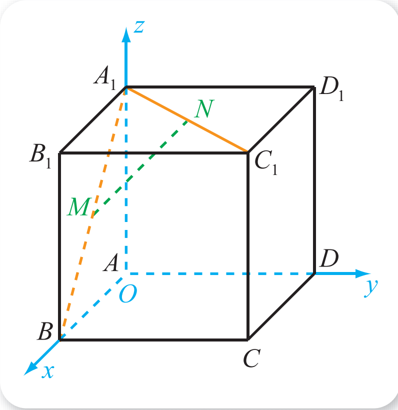


图 1-2-14

又因为 $AB\perp$平面 ADD_1A_1, 所以 $\overrightarrow{AB}$ 是平面 ADD_1A_1 的一个法向量, 而且 $\overrightarrow{AB}=$ **2** ______, 因此

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0\times1+\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{2}\times0=0,$$

即 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AB}$, 由图可知 MN 不在平面 ADD_1A_1 内, 因此

$$MN/\!/平面 ADD_1A_1.$$

例 1 也可以通过添加辅助线来证明, 请读者自行尝试. 不过, 例 1 的向量证明方法表明, 可以借助平面的法向量来讨论空间中的直线与平面、平面与平面的平行和垂直等.

怎样才能求得空间中平面的一个法向量呢? 根据直线与平面垂直的判定定理可知: 如果 A, B, C 是平面 α 内不共线的三点, 非零空间向量 $\boldsymbol{n}$ 满足

$$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC},$$

则 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量. 根据这一结论, 通过设未知数解方程组, 即可求得平面的一个法向量.

例 2 如图 1-2-15 所示, 已知空间直角坐标系中的三棱锥 O-ABC 中, $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, 其中 $abc\neq0$, 求平面 ABC 的一个法向量.

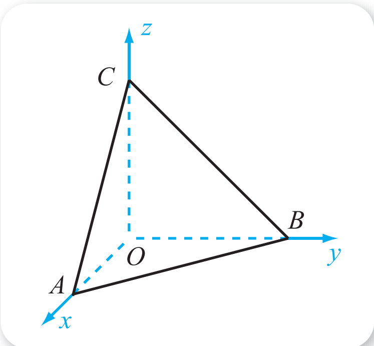


图 1-2-15

解 由已知可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(0, b, 0)-(a, 0, 0)\\&=(-a, b, 0),\\\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\\&=(0, 0, c)-(a, 0, 0)\\&=(-a, 0, c).\end{aligned}$$

设平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-ax+by=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-ax+cz=0,\end{cases}$$

将 x 看成常数，可解得 $y=\dfrac{a}{b}x$，$z=\dfrac{a}{c}x$.

令 $x=bc$，则 $y=ac$，$z=ab$. 因此，$\boldsymbol{n}=(bc, ac, ab)$为平面 ABC 的一个法向量.

2. 三垂线定理及其逆定理

我们知道，已知空间中的平面 α 以及点 A，过 A 作 α 的垂线 l，设 l 与 α 相交于点 A'，则 A'就是点 A 在平面 α 内的射影（也称为投影）. 不难看出，当 A 不是平面 α 内的点时，如果 A 的射影为 A'，则 $\overrightarrow{A'A}$ 与 $\overrightarrow{AA'}$ 都是平面 α 的一个法向量.

空间中，图形 F 上所有点在平面 α 内的射影所组成的集合 F'，称为图形 F 在平面 α 内的射影. 例如，如图 1-2-16 所示，如果△ABC 的顶点 A 在平面 α 内，B 与 C 都在平面 α 外，则分别过 B 与 C 作 α 的垂线，设交点分别为 B'，C'，则△$AB'C'$就是△ABC 在平面 α 内的射影. 而且，此时 $\overrightarrow{B'B}$ 与 $\overrightarrow{C'C}$ 都是平面 α 的一个法向量.

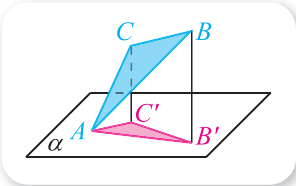


图 1-2-16

尝试与发现

已知 AB 是平面 α 的一条斜线且 B 为斜足（即 AB 不垂直于 α，且 $AB\cap\alpha=B$），设其中 A'是 A 在平面 α 内的射影，而 l 是平面 α 内的一条直线，如图 1-2-17 所示. 判断下列命题是否成立，并用空间向量证明：

（1）当 $l\perp A'B$ 时，$l\perp AB$；

（2）当 $l\perp AB$ 时，$l\perp A'B$.

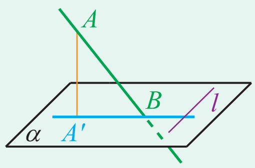


图 1-2-17

设 $\boldsymbol{v}/\!/l$，则由 $\overrightarrow{A'A}\perp\alpha$ 且 $l\subset\alpha$ 可知 $\overrightarrow{A'A}\perp\boldsymbol{v}$，即 $\overrightarrow{A'A}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

如果 $l\perp A'B$，则 $\boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{A'B}$，$\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{A'B}=0$，又因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}=-\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'B}$，所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{v}=(-\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'B})\cdot\boldsymbol{v}=-\overrightarrow{A'A}\cdot\boldsymbol{v}+\overrightarrow{A'B}\cdot\boldsymbol{v}=0,$$

因此 $l\perp AB$.

如果 $l \perp AB$，则 $\boldsymbol{v} \perp \overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{v} \cdot \overrightarrow{AB}=0$，又因为 $\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}$，所以

$$\overrightarrow{A'B} \cdot \boldsymbol{v}=(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}) \cdot \boldsymbol{v}=\overrightarrow{A'A} \cdot \boldsymbol{v}+\overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{v}=0,$$

因此 $l \perp A'B$.

尝试与发现中的两个结论一般称为三垂线定理及其逆定理.

三垂线定理　如果平面内的一条直线与平面的一条斜线在该平面内的射影垂直，则它也和这条斜线垂直.

三垂线定理的逆定理　如果平面内的一条直线和这个平面的一条斜线垂直，则它也和这条斜线在该平面内的射影垂直.

例 3　如图 1-2-18 所示，已知 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是一个正方体，求证：$A_1D \perp BD_1$.

证明　连接 AD_1.

因为 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，所以 $AB \perp$ 平面 ADD_1A_1，因此 BD_1 在平面 ADD_1A_1 内的射影为 AD_1.

又因为 ADD_1A_1 是正方形，所以 $A_1D \perp AD_1$，因此根据 3 ________ 可知 $A_1D \perp BD_1$.

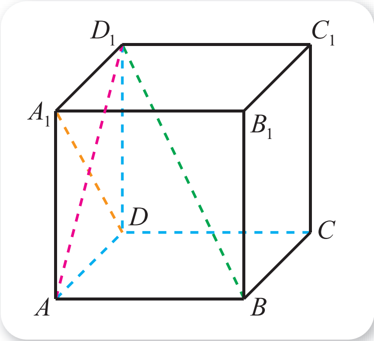


图 1-2-18

例 4　如图 1-2-19 所示的三棱锥 $O\text{-}ABC$ 中，$CO \perp OA$，$CO \perp OB$，且 CD 为 $\triangle CAB$ 的 AB 边上的高，求证：$OD \perp AB$.

证明　因为

$CO \perp OA$，$CO \perp OB$，4 ________，

所以 $CO \perp$ 平面 OAB.

因此 CD 在平面 OAB 内的射影为 OD，又因为 $CD \perp AB$，所以根据 5 ________ 可知 $OD \perp AB$.

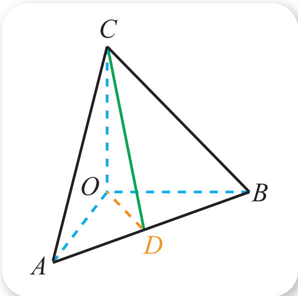


图 1-2-19

练习A

1 设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是空间中两个不重合的平面 α，β 的法向量，分别根据下列条件判断平面 α，β 的位置关系.

(1) $\boldsymbol{n}_1=(-2,\ 1,\ 2)$，$\boldsymbol{n}_2=(6,\ -3,\ -6)$；

(2) $\boldsymbol{n}_1=(1,\ 2,\ 3)$，$\boldsymbol{n}_2=(3,\ 6,\ 9)$.

② 设 $\boldsymbol{n}_1=(-2, 2, 5)$，$\boldsymbol{n}_2=(3, -2, 2)$分别是空间中平面 α，β 的法向量，判断平面 α，β 是否垂直.

③ 如果平面 α 与平面 β 平行，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，那么 $\boldsymbol{n}$ 是平面 β 的一个法向量吗？

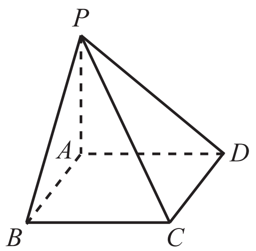
练习B

① 已知 $\boldsymbol{n}_1\perp\alpha$，$\boldsymbol{n}_2\perp\alpha$，是否一定存在非零实数 λ，使得 $\boldsymbol{n}_2=\lambda\boldsymbol{n}_1$？为什么？

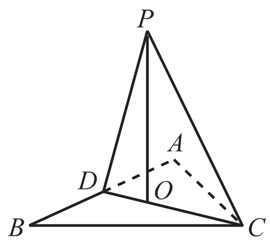
② 用平面的法向量证明平面与平面平行的判定定理：如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

③ 已知 $A(3, 0, 0)$，$B(0, 4, 0)$，$C(0, 0, 5)$，求平面 ABC 的一个法向量的坐标.

④ 如图所示，已知四棱锥 P-$ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形，且 $PA\perp$底面 $ABCD$，如果 $BC\perp PB$，求证：$ABCD$ 是矩形.



（第 4 题）



（第 5 题）

⑤ 如图所示，已知△ABC 中，$AC=BC$，D 为 AB 的中点，O 为 CD 上一点，$PO\perp$平面 ABC，求证：$AB\perp PC$.

1 $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$　2 $(1, 0, 0)$　3 三垂线定理　4 $OA\cap OB=O$

5 三垂线定理的逆定理

1.2.3 直线与平面的夹角

1. 直线与平面的夹角

情境与问题

日常生活中，很多场景中都有直线与平面成一定角度的形象．例如，如图1-2-20（1）所示，握笔写字时，如果把笔抽象成直线，把纸抽象成平面，则直线与平面成一定角度；如图1-2-20（2）所示，地球仪的地轴（即旋转轴）与赤道所在的平面垂直，并且与水平桌面成一定角度．那么，怎样来刻画直线与平面所成的角呢？

（1）　　（2）

图 1-2-20

这一小节我们要学习的就是空间中直线与平面所成的角．

先从特殊情况入手．如果一条直线与一个平面垂直，则称这条直线与这个平面所成的角为 90°；如果一条直线与一个平面平行，或直线在平面内，则称这条直线与这个平面所成的角为 0°．

尝试与发现

如图 1-2-21 所示，设 l 是平面 α 的一条斜线，m 是平面 α 内的任意一条直线．能否将 m 与 l 所成的角定义为直线 l 与平面 α 所成的角？如果不能，该怎样规定直线 l 与平面 α 所成的角？

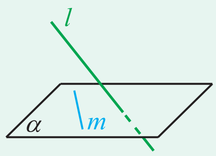


图 1-2-21

图 1-2-21 中，当 m 的位置不同时，m 与 l 所成角的大小可能也不同，因此不能将其定义为直线 l 与平面 α 所成的角．

注意到平面的一条斜线在平面内的射影是唯一确定的，因此，平面的斜线与它在平面内的射影所成的角，称为这条**斜线与平面所成的角**．

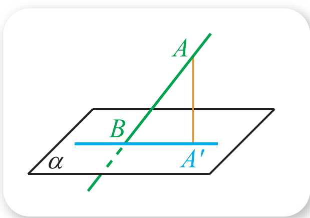


图 1-2-22

例如，如图 1-2-22 所示，如果直线 AB 是平面 α 的一条斜线，B 为斜足，$A'B$ 是直线 AB 在平面 α 内的射影，则 $\angle ABA'$ 就是直线 AB 与平面 α 所成的角.

下面我们来讨论斜线与平面所成角的性质.

尝试与发现

如图 1-2-23 所示，设 AO 是平面 α 的一条斜线段，O 为斜足，A' 为 A 在平面 α 内的射影，而 OM 是平面 α 内的一条射线，$A'M \perp OM$. 记

$$\angle AOA'=\theta_1,\ \angle A'OM=\theta_2,\ \angle AOM=\theta.$$

（1）从直观上判断 θ_1 与 θ 的大小关系；

（2）说明 $AM \perp OM$ 是否成立，探究 θ_1，θ_2，θ 三者之间的等量关系.

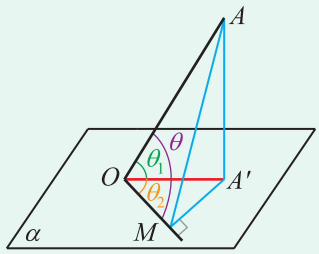


图 1-2-23

图 1-2-23 中，注意到 $AA' \perp \alpha$，所以 $\triangle AA'O$，$\triangle AA'M$ 都是直角三角形，而且 $A'M$ 是 AM 在平面 α 内的射影. 因此，根据 $A'M \perp OM$ 与三垂线定理可知 $AM \perp OM$，所以 $\triangle AMO$ 也是直角三角形.

如果设 $OA=1$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle AA'O$ 中，

$$OA'=OA\cos\theta_1=\cos\theta_1,$$

因此在 $\mathrm{Rt}\triangle OMA'$ 中，

$$OM=OA'\cos\theta_2=\cos\theta_1\cos\theta_2;$$

另一方面，在 $\mathrm{Rt}\triangle AMO$ 中，有

$$OM=OA\cos\theta=\cos\theta.$$

因此

$$\boxed{\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2.}$$

一般地，因为 $0 \leqslant \cos\theta_2 \leqslant 1$，所以由上式可知 $\cos\theta \leqslant \cos\theta_1$，因为 θ_1 和 θ 都是锐角，所以可得 $\theta_1 \leqslant \theta$. 这就是说，平面的斜线与平面所成的角，是斜线和这个平面内所有直线所成角中最小的角.

引进了平面的斜线与平面所成的角之后，空间中任意一条直线与任意一个平面所成的角的大小都是确定的，直线与平面所成的角也称为它们的**夹角**.

例 1 如图 1-2-24 所示，已知 $\angle BAC$ 在平面 α 内，过该角的顶点 A 引平面 α 的斜线 AP，且使 $\angle PAB=\angle PAC$，求证：斜线 AP 在平面 α 内的射影平分 $\angle BAC$.

证明 设点 P 在平面 α 内的射影为点 M，则 AM 为 AP 在平面 α 内的

射影.

根据前面的结论有

$$\cos\angle PAB=\cos\angle PAM\cos\angle BAM,$$

$$\cos\angle PAC=\cos\angle PAM\cos\angle CAM,$$

由$\angle PAB=\angle PAC$可得

$$\cos\angle BAM=\cos\angle CAM,$$

因此$\angle BAM=\angle CAM$，即AM平分$\angle BAC$.

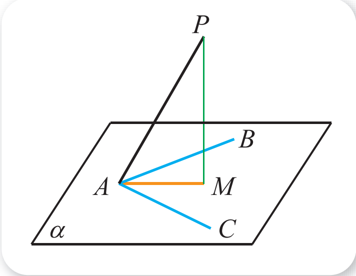


图 1-2-24

尝试与发现

如图 1-2-25 所示，P 是平面 α 外一点，P 在平面 α 内的射影为 P'. 过 P 作平面 α 的斜线段 PA_1，PA_2，且 A_1，A_2 均为斜足，设 PA_1，PA_2 与平面 α 所成角分别为 θ_1，θ_2. 试判断 $PA_1=PA_2$ 是 $\theta_1=\theta_2$ 的什么条件，$P'A_1=P'A_2$ 是 $\theta_1=\theta_2$ 的什么条件.

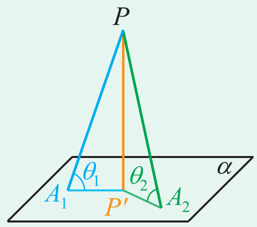


图 1-2-25

注意到 $PP'\perp\alpha$，所以$\triangle PP'A_1$与$\triangle PP'A_2$都是直角三角形，从而

$$PP'=PA_1\sin\theta_1=PA_2\sin\theta_2,$$

再根据 θ_1，θ_2 都是锐角可知 $PA_1=PA_2$ 是 $\theta_1=\theta_2$ 的充要条件；类似地，因为

$$PP'=P'A_1\tan\theta_1=P'A_2\tan\theta_2,$$

所以 $P'A_1=P'A_2$ 也是 $\theta_1=\theta_2$ 的充要条件.

这一结果可以总结为，经过平面外同一点所作的平面的多条斜线中，斜线段长、射影长及斜线与平面所成的角，只要有一个相等，则另外两个也对应相等.

从上面还可以看出，当线段 AB 所在的直线与平面 α 所成的角为 θ，且 AB 在平面 α 内的射影为 $A'B'$时，有

$$A'B'=AB\cos\theta,$$

请读者自行作图理解这一结论.

2. 用空间向量求直线与平面的夹角

不难想到，可以借助直线的方向向量和平面的法向量来研究直线与平面所成的角.

尝试与发现

如果 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的一个方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，设直线 l 与平面 α 所成角的大小为 θ，通过作图讨论 θ 与$\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}\rangle$的关系.

如图 1-2-26（1）（2）所示，可以看出

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{2}-\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle \text{或} \theta=\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle-\frac{\pi}{2},}$$

特别地，

$$\cos\theta=\sin\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle,\ \sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle|.$$

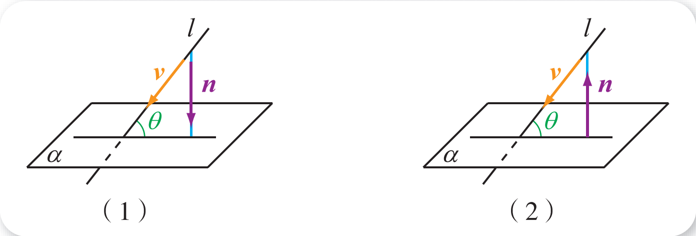


图 1-2-26

例 2 已知 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 是正方体，求 $B'D'$ 与平面 $A'BCD'$ 所成角的大小.

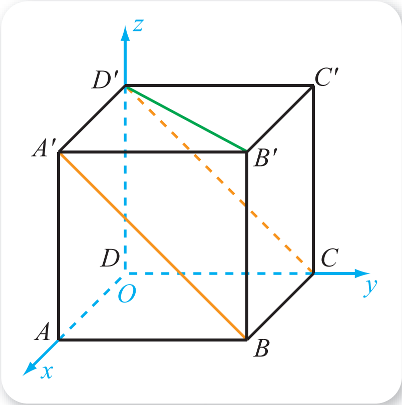


图 1-2-27

解 （方法一）以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD'}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，正方体的棱长为单位长度，建立如图 1-2-27 所示的空间直角坐标系. 则

$$A'(1, 0, 1),\ B(1, 1, 0),$$
$$D'(0, 0, 1),\ B'(1, 1, 1),$$

所以

$$\overrightarrow{A'B}=(0, 1, -1),\ \overrightarrow{A'D'}=(-1, 0, 0),\ \overrightarrow{D'B'}=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad}.$$

设平面 $A'BCD'$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A'B}=y-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A'D'}=-x=0,\end{cases}$$

取 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad}$.

又因为

$$\cos\langle\overrightarrow{D'B'}, \boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{D'B'}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{D'B'}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

所以 $\langle\overrightarrow{D'B'}, \boldsymbol{n}\rangle=\frac{\pi}{3}$，从而可知 $B'D'$ 与平面 $A'BCD'$ 所成角的大小为

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}.$$

（方法二）设 $A'B$ 的中点为 E，连接 $B'E$，$D'E$，如图 1-2-28 所示．

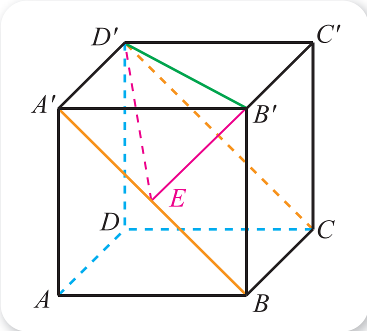


图 1-2-28

因为 $ABB'A'$是正方形，所以 $B'E\perp A'B$．

又因为 $D'A'\perp$平面 $ABB'A'$，且 $B'E\subset$平面 $ABB'A'$，所以 $D'A'\perp B'E$．再根据 $D'A'\cap A'B=A'$可知 $B'E\perp$平面 $A'BCD'$．

因此，$B'D'$在平面 $A'BCD'$内的射影为 $D'E$，所以$\angle B'D'E$ 就是 $B'D'$与平面 $A'BCD'$所成角．

因为正方体中有 $B'D'=2B'E$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle B'ED'$中，$\sin\angle B'D'E=$ 3 ______，又因为$\angle B'D'E$ 是一个锐角，所以$\angle B'D'E=$ 4 ______，即 $B'D'$与平面 $A'BCD'$所成角的大小为 5 ______．

例 2 中的方法一利用的是空间向量，方法二是根据直线与平面所成角的定义找出相应角之后再求出，请读者自行总结两种方法的优缺点，并总结每种方法的一般步骤．

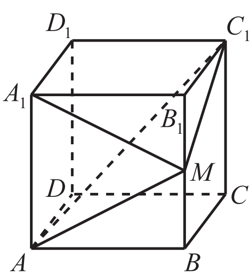
练习A

1. 如果 θ 是直线与平面所成的角，写出 θ 的取值范围．
2. 已知直线 l 与平面 α 所成的角为 θ，且 A，B 是直线 l 上两点，分别根据以下条件，求线段 AB 在平面 α 内的射影的长：

   （1）$AB=6$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$；　　（2）$AB=10$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$．
3. 设 l 是平面 α 的一条斜线，直线 l 与平面 α 所成角的大小为 θ．如果 $\boldsymbol{v}_1$ 是直线 l 的一个方向向量，$\boldsymbol{v}_2$ 是直线 l 在平面 α 内的射影的一个方向向量，通过作图讨论 θ 与$\langle\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\rangle$的关系．

练习B

1. 已知 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，找出体对角线 BD_1 分别与平面 $ABCD$、平面 ABB_1A_1、平面 BCC_1B_1 所成的角，并求这些角的余弦值．
2. 已知 l 是平面 α 内的一条直线，m 是平面 α 的一条斜线，且 m 在平面 α 内的射影为 m'，若 l 与 m 的夹角为 60°，l 与 m' 的夹角为 45°，求 m 与平面 α 所成角的大小．
3. 如图所示，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 BB_1 的中点，求直线 A_1M 与平面 AMC_1 所成角的正弦值．



（第 3 题）

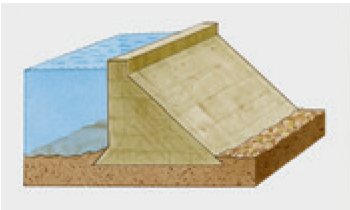
1 (1, 1, 0)　2 (0, 1, 1)　3 $\frac{1}{2}$　4 $\frac{\pi}{6}$　5 $\frac{\pi}{6}$

1.2.4 二面角

1. 二面角及其度量

情境与问题

日常生活中，很多场景中都有平面与平面成一定角度的形象. 例如，如图 1-2-29 (1) 所示，在建造大坝时，为了加固大坝，大坝外侧的平面一般与水平面成一定角度；如图 1-2-29 (2) 所示，很多屋顶都是二面角的形象.


(1)


(2)

图 1-2-29

你能找到日常生活中更多类似的例子吗？怎样刻画平面与平面所成的角呢？

我们已经知道，平面内的一条直线把一个平面分成两部分，其中的每一部分都称为一个**半平面**. 从一条直线出发的两个半平面所组成的图形称为**二面角**，这条直线称为**二面角的棱**，这两个半平面称为**二面角的面**.

如图 1-2-30 所示，在二面角 α-l-β 的棱上任取一点 O，以 O 为垂足，分别在半平面 α 和 β 内作垂直于棱的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 所成的角称为**二面角的平面角**. 二面角的大小用它的平面角大小来度量，即二面角大小等于它的平面角大小. 特别地，平面角是直角的二面角称为**直二面角**.

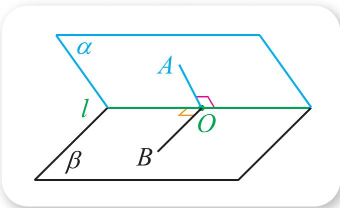


图 1-2-30

本书中，我们约定，二面角及其平面角的大小不小于 0°，不大于 180°.

而且，两个平面相交时，它们所成角的大小，指的是它们所形成的四个二面角中，不小于 0°且不大于 90°的角的大小. 这样约定后，一个二面角的大小及两个相交平面所成角的大小都是唯一确定的.

事实上，我们在地理学科中所学过的黄赤交角，指的就是黄道平面（即地球公转的轨道所在平面）与赤道平面之间的夹角，它的大小为 23°26′，如图 1-2-31 所示.

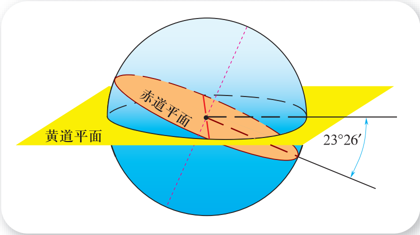


图 1-2-31

例 1 如图 1-2-32 所示，已知二面角 α-l-β 的棱上有 A，B 两个点，$AC\subset\alpha$，$AC\perp l$，$BD\subset\beta$，$BD\perp l$，若 $AB=6$，$AC=3$，$BD=4$，$CD=7$，求二面角 α-l-β 的大小.

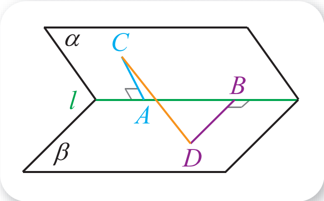


图 1-2-32

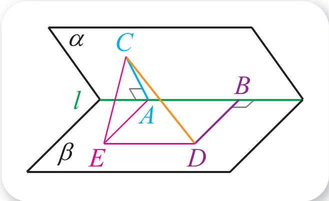


图 1-2-33

解 如图 1-2-33 所示，在平面 β 内过 A 作 BD 的平行线 AE，且使得 $AE=BD$，连接 CE，ED.

因为四边形 $AEDB$ 是一个矩形，$\angle CAE$ 是二面角 α-l-β 的一个平面角，且 $AB\perp$面 AEC，所以 $ED\perp$面 AEC，从而

$$CE=\sqrt{CD^2-ED^2}=\sqrt{CD^2-AB^2}=\sqrt{7^2-6^2}=\sqrt{13}.$$

在△AEC 中，由余弦定理可知

$$\cos\angle CAE=\frac{AC^2+AE^2-CE^2}{2AC\times AE}=\frac{3^2+4^2-13}{2\times3\times4}=\frac{1}{2},$$

因此 $\angle CAE=\frac{\pi}{3}$.

即所求二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

尝试与发现

如图 1-2-34 所示，设 S 为二面角 α-AB-β 的半平面 α 上的一点，过点 S 作半平面 β 的垂线 SS'，垂足为点 S'，设 O 为棱 AB 上一点.

（1）判断 $SO\perp AB$ 是 $S'O\perp AB$ 的什么条件；

（2）由二面角的平面角作法，你能得到什么启发？

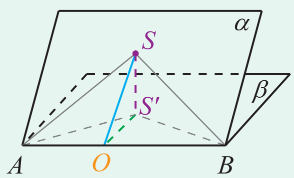


图 1-2-34

因为 S' 是 S 在平面 β 内的射影，所以 $S'O$ 是 SO 在平面 β 内的射影，从而根据三垂线定理及其逆定理可知，$SO\perp AB$ 是 $S'O\perp AB$ 的充要条件.

当二面角 α-AB-β 是一个锐角时，由此我们能得到作出它的平面角的另一种方法：过其中一个半平面内一点 S，作另一个半平面的垂线段 SS'，过 S（或 S'）作棱的垂线 SO（或 $S'O$），连接 $S'O$（或 SO）即可.

在图 1-2-34 中，如果二面角 α-AB-β 的大小为 θ，则可以看出 $\triangle S'AB$ 与 $\triangle SAB$ 在 AB 边上的高之比为 $\cos\theta$，因此这两个三角形的面积之比也为 $\cos\theta$.

例 2 如图 1-2-35 所示三棱锥 S-ABC 中，平面 $SAC\perp$ 平面 ABC，$SA=SC=\sqrt{3}$，$AB=BC=2$，且 $AB\perp BC$，求二面角 S-AB-C 的大小.

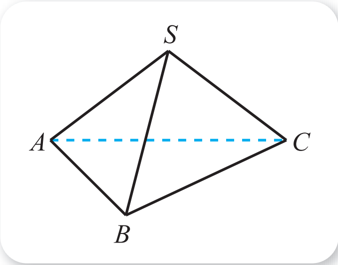


图 1-2-35

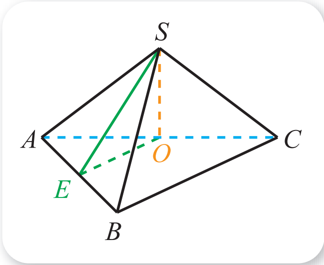


图 1-2-36

解 设 O，E 分别为 AC，AB 的中点，连接 SO，OE，SE，如图 1-2-36 所示.

因为 $SA=SC$，所以 $SO\perp AC$，又因为平面 $SAC\perp$ 平面 ABC，所以

$$SO\perp\text{平面 } ABC,$$

因此 SE 在平面 ABC 内的射影为 **1** ____________. 又因为 OE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，$AB\perp BC$，所以 $AB\perp OE$，从而由三垂线定理可知 $AB\perp SE$，因此 $\angle SEO$ 为二面角 S-AB-C 的一个平面角.

由 $AB=BC=2$ 且 $AB\perp BC$ 可知 $AC=\sqrt{2^2+2^2}=$ **2** ____________，又因为

$$SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\text{ \textbf{3} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ },$$

而且 $EO=\dfrac{1}{2}BC=1$，从而可知 $\angle SEO=45^\circ$，即所求二面角大小为 45°.

2. 用空间向量求二面角的大小

同前面一样，可以借助平面的法向量来研究平面与平面所成的角.

尝试与发现

如果 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α_1，α_2 的一个法向量，设 α_1 与 α_2 所成角的大小为 θ，通过作图讨论 θ 与 $\langle\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle$ 的关系.

如图 1-2-37（1）（2）所示，可以看出

$$\boxed{\theta=\langle\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle \text{或} \theta=\pi-\langle\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle,}$$

特别地，

$$\sin\theta=\sin\langle\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle.$$

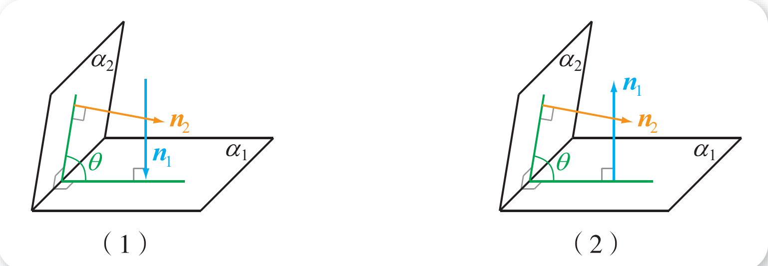


图 1-2-37

例 3 如图 1-2-38 所示，已知四棱锥 S-$ABCD$ 中，$SA\perp$ 平面 $ABCD$，$ABCD$ 为直角梯形，$\angle DAB=\angle ABC=90°$，且

$$SA=AB=BC=3AD,$$

求平面 SAB 与 SCD 所成角的正弦值.

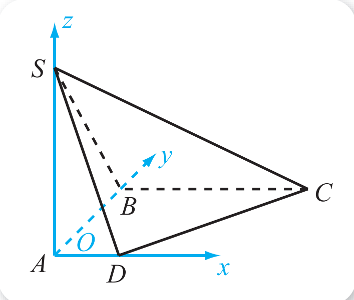


图 1-2-38

解 依题意，AD，AB，AS 两两互相垂直. 以 A 为原点，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AS}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，AD 的长为单位长度，建立如图 1-2-38 所示的空间直角坐标系. 则

$$A(0, 0, 0), S(0, 0, 3), C(3, 3, 0), D(1, 0, 0),$$

所以

$$\overrightarrow{AD}=(1, 0, 0), \overrightarrow{DS}=(-1, 0, 3), \overrightarrow{DC}=\boxed{4}\underline{\qquad\qquad}.$$

显然，$\overrightarrow{AD}$ 是平面 SAB 的一个法向量.

设平面 SCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DS}=-x+3z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=2x+3y=0,\end{cases}$$

令 $x=3$，可得 $y=-2$，$z=1$，此时 $\boldsymbol{n}=(3, -2, 1)$.

因为

人民教育出版社

$$\cos\langle\overrightarrow{AD},\ \boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{1\times\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{14}}{14},$$

所以可知所求角的正弦值为$\sqrt{1-\frac{9}{14}}=\frac{\sqrt{70}}{14}$.

例 4 如图 1-2-39 所示，已知直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=1$，$AA_1=2$，且 D 是 AA_1 的中点．求平面 BDC 与平面 BDC_1 所成角的大小.

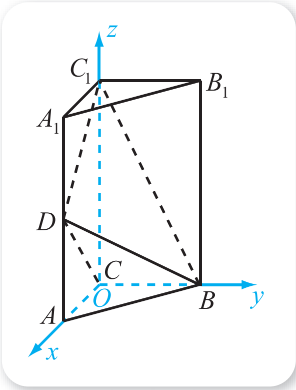


图 1-2-39

解 依题意，CA，CB，CC_1 两两互相垂直．以 C 为原点，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图 1-2-39 所示的空间直角坐标系．则

$$C(0,\ 0,\ 0),\ B(0,\ 1,\ 0),$$
$$D(1,\ 0,\ 1),\ C_1(0,\ 0,\ 2),$$

所以

$$\overrightarrow{CB}=(0,\ 1,\ 0),\ \overrightarrow{CD}=(1,\ 0,\ 1),$$
$$\overrightarrow{DC_1}=(-1,\ 0,\ 1),\ \overrightarrow{BC_1}=(0,\ -1,\ 2).$$

设平面 BDC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=y_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=x_1+z_1=0,\end{cases}$$

令 $z_1=1$，则得 $x_1=-1$，$y_1=0$，此时 $\boldsymbol{n}=(-1,\ 0,\ 1)$.

设平面 BDC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC_1}=-x_2+z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-y_2+2z_2=0,\end{cases}$$

令 $z_2=1$，则得 $x_2=1$，$y_2=2$，此时 $\boldsymbol{m}=(1,\ 2,\ 1)$.

因为

$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=$ 5 ________________ ,

所以$\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{m}\rangle=90^\circ$，从而可知平面 BDC 与平面 BDC_1 所成角的大小为 90°，也就是说，这两个平面是互相垂直的.

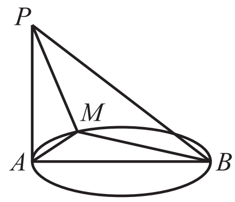
需要说明的是，例 3 与例 4 都可以不借助空间向量求解，请读者自行尝试，并分别总结各种方法的优缺点与一般步骤.

练习A

1. 已知二面角 $P\text{-}AB\text{-}P'$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$，且 $PP'\perp$ 平面 ABP'，$\triangle ABP$ 的面积为 3，求 $\triangle ABP'$ 的面积.
2. 已知直二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的棱上有 A，B 两个点，$AC\subset\alpha$，$AC\perp l$，$BD\subset\beta$，$BD\perp l$，若 $AB=5$，$AC=3$，$BD=8$，求 CD 的长.
3. 如果 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α_1，α_2 的一个法向量，设 α_1 与 α_2 所成角的大小为 θ，写出 $\cos\theta$ 与 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$ 之间的关系.

练习B

1. 已知 $A(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,3)$，分别求平面 ABC 与三个坐标平面所成角的余弦值.
2. 已知正三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的所有棱长都为 1，求其侧面与底面所成角的余弦值.
3. 如图，已知 AB 是圆的直径，且 $AB=4$，PA 垂直于圆所在的平面，且 $PA=2\sqrt{3}$，M 是圆周上一点，且 $\angle ABM=30°$，求二面角 $A\text{-}BM\text{-}P$ 的大小.



（第 3 题）

1 OE　2 $2\sqrt{2}$　3 $\sqrt{3-2}=1$　4 $(2,3,0)$　5 $(-1)\times1+0\times2+1\times1=0$

1.2.5 空间中的距离

情境与问题

“距离”在生活中随处可见，例如，我们常说某两地之间的距离是多少，汽车的刹车距离是多少，等等. 数学中的“距离”概念是从生活中的具体问题中抽象出来的，要求具有准确的定义，以避免歧义. 到目前为止，你学过哪些平面内的“距离”？这些“距离”的定义有什么共同点？由此你能得到空间中任意两个图形之间的距离具有的性质吗？

在小学和初中阶段，我们就已经学习过：

两点间的所有连线中，线段最短，连接两点间的线段的长度称为两点间的距离；

从直线外一点到这条直线所作的线段中，垂线段最短，它的长度称为这个点到直线的距离；

两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离，称为这两条平行线之间的距离.

由上可以看出，这些距离都可以归结为点与点的距离，而且是所有的点与点之间最短连线的长度. 例如，如图 1-2-40 所示 $\triangle ABC$ 中，BC 边上的高 AD 的长就是顶点 A 到直线 BC 的距离，也就是 A 与直线 BC 上的点的最短连线的长度.

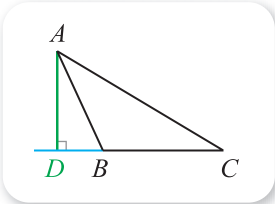


图 1-2-40

显然，空间中任意两个图形之间的距离也具有类似的性质，此距离要小于等于两个端点分别在这两个图形上的线段长.

1. 空间中两点之间的距离

空间中两点之间的距离指的仍是这两个点连线的线段长. 因为向量的长度表示的是向量的始点与终点之间的距离，所以可通过向量来求空间中两点之间的距离.

例 1 如图 1-2-41 所示，已知 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 是平行六面体，$AD=3$，$AB=4$，$AA'=5$，$\angle BAD=90^\circ$，$\angle BAA'=\angle DAA'=60^\circ$，求 AC' 的长.

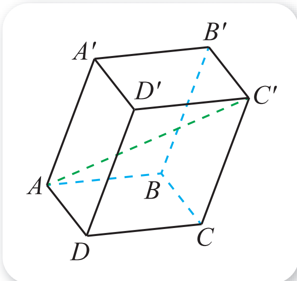


图 1-2-41

解 由已知可得 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AA'}$ 不共面，而且

$$|\overrightarrow{AD}|=3,\quad |\overrightarrow{AB}|=4,\quad |\overrightarrow{AA'}|=5,$$

从而

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0,$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'}=3\times5\times\cos 60^\circ=7.5,$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad}.$$

又因为

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB},$$

所以

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC'}|^2&=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB})^2\\&=|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AA'}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\\&\quad 2\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=3^2+5^2+4^2+2\times7.5+2\times10\\&=85,\end{aligned}$$

因此 $|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{85}$，即所求长为 $\sqrt{85}$.

例 1 也可以不借助向量而通过构造三角形或建立空间直角坐标系来求解，请读者自行尝试，并分别总结不同解法的一般步骤与联系.

2. 点到直线的距离

给定空间中一条直线 l 及 l 外一点 A，因为 l 与 A 能确定一个平面，所以过 A 可以作直线 l 的一条垂线段，这条垂线段的长称为点 A 到直线 l 的距离①. 点到直线的距离也是这个点与直线上点的最短连线的长度.

例如，如图 1-2-42 所示，点 A 是直线 l 外一点，若 AB 是直线 l 的垂线段，则 AB 的长度就是点 A 到直线 l 的距离，这一距离也等于 $|\overrightarrow{AB}|$.

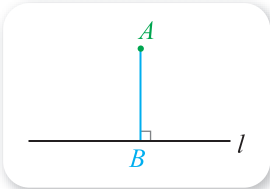


图 1-2-42

例 2 已知正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，求点 C_1 到直线 BD_1 的距离.

解 以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图 1-2-43 所示的空间直角坐标系，则

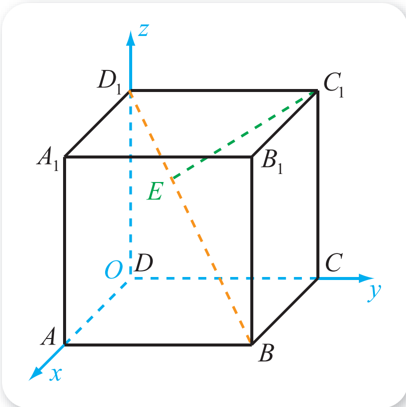


图 1-2-43

$$B(1,\ 1,\ 0),$$
$$D_1(0,\ 0,\ 1),$$
$$C_1(0,\ 1,\ 1),$$

因此 $\overrightarrow{BD_1}=(-1,\ -1,\ 1)$.

设 E 满足 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BD_1}$ 且 $C_1E\perp BD_1$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{DB}+\lambda\overrightarrow{BD_1}=(1,\ 1,\ 0)+\lambda(-1,\ -1,\ 1)\\&=(1-\lambda,\ 1-\lambda,\ \lambda),\end{aligned}$$

① 如果点 A 是直线 l 上的点，则约定 A 到直线 l 的距离为 0.

即 $E(1-\lambda, 1-\lambda, \lambda)$，所以

$$\overrightarrow{C_1E}=(1-\lambda, -\lambda, \lambda-1).$$

又因为 $C_1E\perp BD_1$，所以 $\overrightarrow{C_1E}\cdot\overrightarrow{BD_1}=0$，即

$$(-1)\times(1-\lambda)+(-1)\times(-\lambda)+1\times(\lambda-1)=0,$$

解得 $\lambda=\frac{2}{3}$，因此 $\overrightarrow{C_1E}=\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$，从而可知点 C_1 到直线 BD_1 的距离为

$$|\overrightarrow{C_1E}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

例 2 中，也可不借助空间向量求点 C_1 到直线 BD_1 的距离，请读者自行尝试，并总结出不同方法的优缺点.

3. 点到平面的距离

给定空间中一个平面 α 及 α 外一点 A，过 A 可以作平面 α 的一条垂线段，这条垂线段的长称为点 A 到平面 α 的距离①. 点到平面的距离也是这个点与平面内点的最短连线的长度.

例如，如图 1-2-44 所示，点 A 是平面 α 外一点，若 AA' 是平面 α 的垂线段（即 A' 为 A 在平面 α 内的射影），则平面 α 内不同于 A' 的任意一点 B，一定满足

$$AB>AA'.$$

这是因为 AB 与 AA' 分别是 $\mathrm{Rt}\triangle AA'B$ 的斜边与一条直角边.

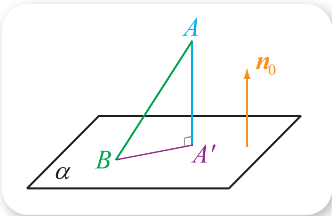


图 1-2-44

尝试与发现

（1）在图 1-2-44 中，设 $\boldsymbol{n}_0$ 是平面 α 的一个单位法向量（即 $|\boldsymbol{n}_0|=1$），因为 $AA'\perp\alpha$，所以表示 $\boldsymbol{n}_0$ 的有向线段可以在直线 AA' 上，指出 $\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}_0$ 的几何意义与 AA' 的关系；

（2）一般情况下，若 A 是平面 α 外一点，B 是平面 α 内一点，如何根据 $\overrightarrow{BA}$ 和平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}$ 表示出点 A 到平面 α 的距离？

因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量与 $\boldsymbol{b}$ 的长度的乘积，而

① 如果点 A 是平面 α 内一点，则约定 A 到平面 α 的距离为 0.

$\boldsymbol{n}_0$ 是平面 α 的一个单位法向量，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}_0$ 等于 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\boldsymbol{n}_0$ 上的投影的数量，因此在图 1-2-44 中，有 $\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}_0=A'A$.

一般地，若 A 是平面 α 外一点，B 是平面 α 内一点，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，则点 A 到平面 α 的距离

$$\boxed{d=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.}$$

例 3 如图 1-2-45 所示，四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是一个边长为 1 的正方形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=1$. 求点 D 到平面 PBC 的距离.

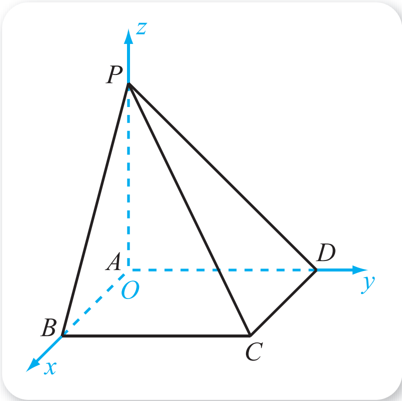


图 1-2-45

解 依题意，AB，AD，AP 是两两互相垂直的. 以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图 1-2-45 所示的空间直角坐标系. 则

$$B(1,0,0),\ C(1,1,0),$$
$$D(0,1,0),\ P(0,0,1),$$

所以

$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{BP}=$ 2 ____________，$\overrightarrow{PD}=$ 3 ____________.

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-x+z=0,\end{cases}$$

令 $z=1$，则得 $x=1$，$y=0$，此时 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$.

因为

$$\frac{|\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|0\times1+1\times0+(-1)\times1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以点 D 到平面 PBC 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 3 中，也可借助 $\overrightarrow{CD}$ 或 $\overrightarrow{BD}$ 来计算点 D 到平面 PBC 的距离，请读者自行尝试，并总结出用向量法求点到平面距离的一般方法.

4. 相互平行的直线与平面之间、相互平行的平面与平面之间的距离

当直线与平面平行时，直线上任意一点到平面的距离称为这条直线与这

个平面之间的距离；当平面与平面平行时，一个平面内任意一点到另一个平面的距离称为这两个平行平面之间的距离. 一般地，与两个平行平面同时垂直的直线，称为这两个平面的**公垂线**，公垂线夹在平行平面间的部分，称为这两个平面的**公垂线段**. 显然，两个平行平面之间的距离也等于它们的公垂线段的长.

这就是说，相互平行的直线与平面之间的距离、相互平行的平面与平面之间的距离，都可以归结成点到平面的距离，因此同样可以通过空间向量来求得.

例如，如图 1-2-46 所示，如果直线 l 与平面 α 平行，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，A，B 分别是 l 上和 α 内的点，则直线 l 与平面 α 之间的距离为

$$\boxed{d=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|};}$$

如图 1-2-47 所示，如果平面 α 与平面 β 平行，$\boldsymbol{n}$ 是平面 β 的一个法向量（当然也是平面 α 的一个法向量），A 和 B 分别是平面 α 与平面 β 内的点，则平面 α 与平面 β 之间的距离为

$$\boxed{d=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.}$$

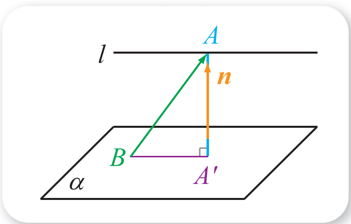


图 1-2-46

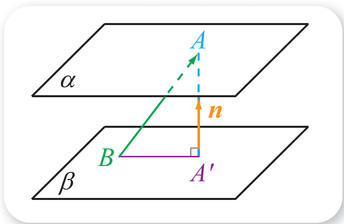


图 1-2-47

例 4 已知棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，M，N 分别为 A_1B_1，AD，CC_1 的中点，判断直线 AC 与平面 EMN 的关系. 如果平行，求出 AC 与平面 EMN 之间的距离；如果不平行，说明理由.

解 以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图 1-2-48 所示的空间直角坐标系. 由正方体的棱长为 2 个单位长度，有

$M(1,0,0)$，$E(2,1,2)$，

$N(0,2,1)$，$A(2,0,0)$，

$C(0,2,0)$，

所以

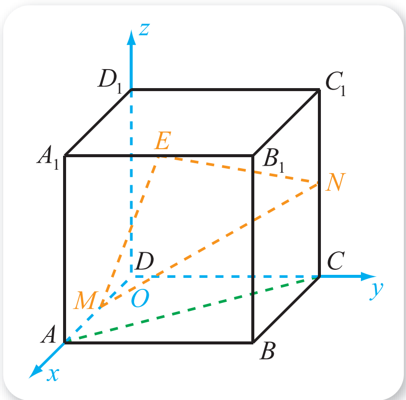


图 1-2-48

$$\overrightarrow{ME}=(1,\ 1,\ 2),$$

$$\overrightarrow{MN}=(-1,\ 2,\ 1),$$

$$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 2,\ 0).$$

设平面 EMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ME}=x+y+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=-x+2y+z=0,\end{cases}$$

令 $z=1$，则得 $\boldsymbol{n}=$ 4 ________.

因为

$$\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=(-2)\times(-1)+2\times(-1)+0\times1=0,$$

所以 $\overrightarrow{AC}\perp\boldsymbol{n}$，又因为点 A 显然不在平面 EMN 内，所以 AC 与平面 EMN 平行.

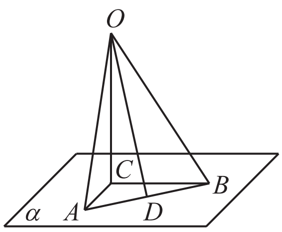
又因为 $\overrightarrow{MA}=(1,\ 0,\ 0)$，所以

$$\frac{|\overrightarrow{MA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\text{5 ________},$$

因此点 A 到平面 EMN 的距离为 6 ________，这也是 AC 与平面 EMN 之间的距离.

练习A

1. 已知平面 α 外一点 A 到平面 α 的距离为 d，且点 A 到平面 α 内一点 B 的距离为 5，写出 d 的取值范围.
2. 空间中到已知平面 α 的距离等于 3 cm 的所有点组成的集合是什么图形?
3. 已知平面 α 与平面 β 平行，且这两个平面之间的距离为 4 cm，则到 α，β 的距离相等的所有点组成的集合是什么图形?
4. 已知二面角 α-l-β 的大小为 45°，点 $A\in\alpha$，点 A 到 l 的距离等于 2，求点 A 到半平面 β 的距离.
5. 如图所示，已知 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 在平面 α 内，D 是斜边 AB 的中点，$OC\perp\alpha$，且 O 到平面 α 的距离为 12 cm，$AC=6$ cm，$BC=8$ cm，求线段 OA，OB，OD 的长.

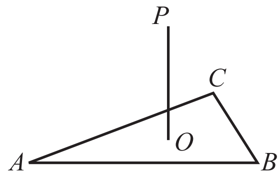


(第 5 题)

练习B

1. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长都为 1，点 M，N 分别是 AB，CD 的中点，求 M，N 这两点间的距离.

2. 如图所示，已知正三角形 ABC 的中心为 O，$OP\perp$ 平面 ABC 且 $AB=2OP=2$ cm，求点 P 到这个正三角形各边的距离.



（第 2 题）

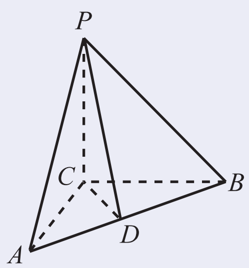
3. 已知三棱锥 O-ABC 中，OA，OB，OC 的长度均为 2，且两两互相垂直，求点 O 到平面 ABC 的距离.
4. 已知 $A(2,\ 2,\ 0)$，$B(1,\ 4,\ 2)$，$C(0,\ 0,\ 5)$，求原点 O 到平面 ABC 的距离.
5. 已知正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$的棱长为 1.
   (1) 求 B'到平面 $A'C'B$ 的距离；
   (2) 求平面 $A'C'B$ 与平面 $D'AC$ 之间的距离.

1 $4\times5\times\cos 60^\circ=10$　2 $(-1,\ 0,\ 1)$　3 $(0,\ 1,\ -1)$　4 $(-1,\ -1,\ 1)$

5 $\dfrac{|(-1)\times1+(-1)\times0+1\times0|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　6 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

习题1-2A

1. 已知 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，求直线 A_1D 与直线 BD_1 所成角的大小.
2. 已知 $A(1,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$，求平面 ABC 的一个单位法向量的坐标.
3. 如果直线 l 与平面 α 所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$，且 A，B 是直线 l 上两点，线段 AB 在平面 α 内的射影的长为 3，求线段 AB 的长.
4. 如图所示三棱锥 P-ABC 中，已知 $AC\perp BC$，且 $CD\perp AB$，$PC\perp$ 平面 ABC，分别写出图中所有：



（第 4 题）

   (1) 所在直线与 PC 垂直的线段；

(2) 所在直线与 AP 垂直的线段；

(3) 直角三角形.

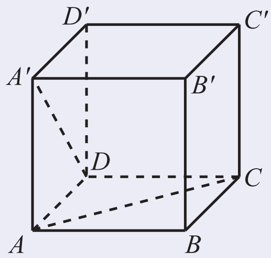
5 已知四面体 $ABCD$ 中，$AB=AC$，$DB=DC$，点 M 为棱 BC 的中点，指出平面 ADM 的一个法向量. 哪两个平面互相垂直？为什么？

6 已知线段 AB 在平面 α 内的射影是 $A'B'$，分别根据下列条件求直线 AB 与平面 α 所成角的大小：

(1) $AB=6$，$A'B'=3$；　　(2) $AB=\sqrt{2}$，$A'B'=1$；

(3) $AB=2$，$A'B'=2$；　　(4) $AB=2$，$A'B'=0$.

7 如图所示，在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，求直线 DA' 与直线 AC 所成角的大小.



（第 7 题）

8 已知二面角 P-AB-P' 的大小为 $\frac{\pi}{4}$，且 $P'P\perp$ 平面 ABP，$\triangle ABP$ 的面积为 5，求 $\triangle ABP'$ 的面积.

习题1-2B

1 已知 AB 是平面 α 的一条斜线且 B 为斜足，设 AB 的射影是 $A'B$，而 l 是与平面 α 平行的一条直线. 判断下列命题是否成立，并用空间向量证明：

(1) 当 $l\perp A'B$ 时，$l\perp AB$；　　(2) 当 $l\perp AB$ 时，$l\perp A'B$.

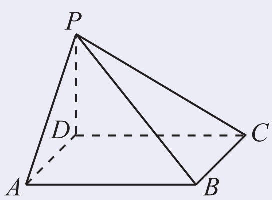
2 已知 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，分别写出 AB 与 A_1D_1，AD 与 D_1C_1，A_1C_1 与 BD 的公垂线段.

3 如图所示，已知四棱锥 P-$ABCD$ 中，$ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=3$，$AB=5$，$BC=4$，求下列各对异面直线所成角的余弦值：

(1) PC 与 AB；

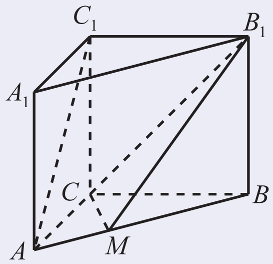
(2) PD 与 AB；

(3) PA 与 BC.

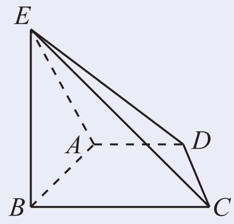


（第 3 题）

4 如图所示，直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，点 M 在线段 AB 上，$AC=BC=CC_1=3$，$AM=\sqrt{2}$，求直线 AC_1 与平面 B_1MC 所成角的正弦值.



（第 4 题）



（第 5 题）

5 如图所示，已知四棱锥 $E\text{-}ABCD$ 中，$ABCD$ 是直角梯形，$\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$，$BE\perp$平面 $ABCD$，$AB=BC=BE=2AD=6$.

（1）求点 B 到平面 CDE 的距离；

（2）求二面角 $A\text{-}CD\text{-}E$ 的正切值.

习题1-2C

1 已知直线 l 经过 $A(3, 3, 3)$，$B(0, 6, 0)$ 两点，求点 $P(0, 0, 6)$ 到 l 的距离.

2 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，E 为 $A'B'$ 的中点，F 为 CD 的中点.

（1）求证：$BE/\!/$平面 $A'FD'$；

（2）若正方体的棱长为 1，求 BE 到平面 $A'FD'$ 的距离.

3 已知平面 α 与平面 β 互相平行，点 $A(0, 0, 1)$ 在平面 α 内，$B(2, 1, 0)$，$C(0, 1, 1)$，$D(1, 0, 0)$ 三点都在平面 β 内. 求 α，β 之间的距离.

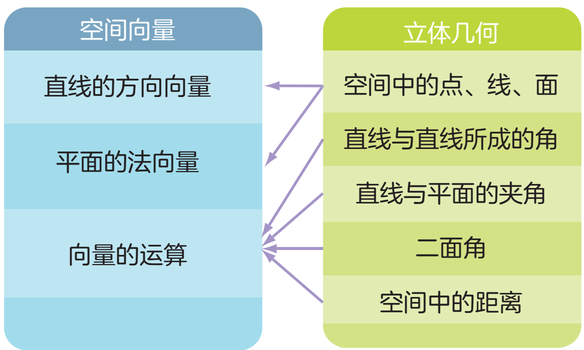
4 已知三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，$SA\perp$底面 ABC，$\angle ABC=90^\circ$，$SA=AB=4$，$BC=3$，E 是 AB 的中点，点 F 在 BC 上且 $FC=2BF$. 求点 A 到平面 SEF 的距离.

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们首先将平面向量推广到了空间向量，了解了空间向量的运算、空间向量基本定理、空间向量的坐标以及空间直角坐标系等；然后我们学习了空间向量在立体几何中的应用，其中包括怎样用空间向量刻画空间中的直线、平面以及怎样用空间向量来求空间中的角和距离等.

依照知识之间的联系，我们可以作出如下的知识结构图.



上述知识结构图也还可以细化. 你能创作出其他形式的知识结构图吗?

02 课题作业

由本章的内容可以看出，立体几何中的一些问题，既可以借助空间向量求解，也可以直接利用有关定义、判定定理、性质定理等求解. 请结合必修中的立体几何内容，总结上述两类立体几何问题解法的优缺点，指出每一类方法的一般步骤，并用实例加以说明.

03 复习题

A 组

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3, 2, 5)$，$\boldsymbol{b}=(1, -3, 0)$，$\boldsymbol{c}=(7, -2, 1)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$;

(4) $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$.

2. 若 $\boldsymbol{a}=(2x, 1, 3)$，$\boldsymbol{b}=(1, -2y, 9)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，求 x，y 的值.

3. 已知空间三点 $A(1, 1, 1)$，$B(-1, 0, 4)$，$C(2, -2, 3)$，求 $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\rangle$.

4. 已知点 $A(1, 2, 1)$，$B(-1, 3, 4)$，$D(1, 1, 1)$，若 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，求 $|\overrightarrow{PD}|$.

5. 在空间直角坐标系中，分别求点 $P(-2, 1, 4)$ 关于 x 轴、xOy 平面、坐标原点对称的点的坐标.

6. 已知 $A(-1, 0, 1)$，$B(2, 4, 3)$，$C(5, 8, 5)$，则这三点（　　）.

(A) 构成等腰三角形

(B) 构成直角三角形

(C) 构成等腰直角三角形

(D) 不能构成三角形

7. 求到点 $A(2, 3, 0)$，$B(5, 1, 0)$ 距离相等的点的坐标 (x, y, z) 满足的条件.

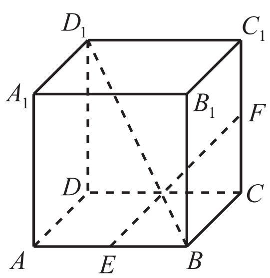
8. 已知 $A(1, -2, 1)$，$B(2, 2, 2)$，点 P 在 z 轴上，且 $PA=PB$，求点 P 的坐标.

9. 已知 $A(0, 0, 0)$，$B(2, 5, 0)$，$C(1, 3, 5)$，求 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上投影的数量.

10. 已知 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，求平面 AB_1C 的一个法向量.

11. 空间中到一个三角形的三个顶点距离相等的点组成的集合是什么图形？

12. 如图所示，已知 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，E，F 分别是棱 AB，CC_1 的中点，求直线 EF 与 BD_1 所成角的余弦值.



（第 12 题）

B 组

1. 已知 G 是正方形 $ABCD$ 的中心，点 P 为正方形 $ABCD$ 所在平面外一点，则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=$(　　).

(A) $4\overrightarrow{PG}$　　(B) $3\overrightarrow{PG}$　　(C) $2\overrightarrow{PG}$　　(D) $\overrightarrow{PG}$

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0,2)$，且 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直，求 k 的值.

3. 已知三棱锥 O-ABC 中，M，N 分别是 OA，BC 的中点，点 G 在 MN 上，且 $MG=2GN$. 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，试用基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$.

4. 已知正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 的棱长为 1，求 $\overrightarrow{BD'}\cdot\overrightarrow{AD}$，$\cos\langle\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{DB'}\rangle$.

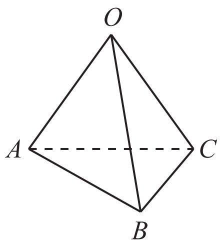
5. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是空间向量，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

6. 已知 $A(3,4,0)$，$B(2,5,5)$，$C(0,3,5)$，且 $ABCD$ 是平行四边形，求顶点 D 的坐标.

7. 已知正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M 与 N 分别是棱 BB_1 与对角线 CA_1 的中点. 求证：$MN/\!/BD$ 且 $MN=\dfrac{1}{2}BD$.

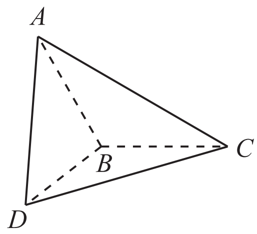
8. 已知 O 为坐标原点，$OABC$ 是四面体，$A(0,3,5)$，$B(2,2,0)$，$C(0,5,0)$，直线 BD 与直线 CA 平行，并且与坐标平面 zOx 相交于点 D，求点 D 的坐标.

9. 如图所示，已知三个平面 AOB，BOC，AOC 相交于点 O，且 $\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=60°$，求直线 OA 与平面 BOC 所成角的余弦值.



(第 9 题)

10. 如图所示，三棱锥 A-BCD 中，平面 ABC 与平面 DBC 互相垂直，且 $AB=BC=BD$，$\angle CBA=\angle CBD=120°$. 求：



(第 10 题)

（1）AD 所在直线和平面 BCD 所成角的大小；

（2）AD 所在直线与直线 BC 所成角的大小；

（3）二面角 A-BD-C 的正弦值.

11. 已知 $A\in\alpha$，直线 AB 与平面 α 所成的角为 30°，直线 AC 与平面 α 所成的角为 60°，$AB=6$ cm，$AC=8$ cm，且斜线段 AB，AC 在平面 α 内的射影相互垂直，求 BC 的长.

12. 已知 AB 垂直于平面 α，垂足为点 B，且 AO 与 α 相交于点 O，$\angle AOB=60^\circ$，射线 OC 在 α 内，且 $\angle BOC=30^\circ$，$OA=6$，求点 A 到直线 OC 的距离.

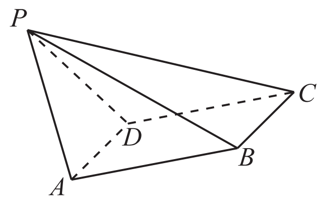
C 组

1. 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}$，证明这三个向量共面.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，并且 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{q}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{r}=-7\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b}+22\boldsymbol{c}$，判断向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ 是否共面，并说明理由.

3. 已知$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内的一点，求 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值.

4. 如图所示，已知四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PB\perp AD$，侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形，底面 $ABCD$ 为菱形，侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角为 120°.



（第 4 题）

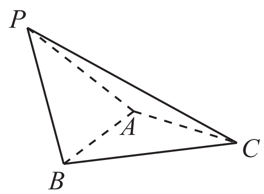
（1）求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离；

（2）求二面角 A-PB-C 的余弦值.

5. 如图所示，在三棱锥 P-ABC 中，$\triangle PAB$ 是等边三角形，$\angle PAC=\angle PBC=90^\circ$.

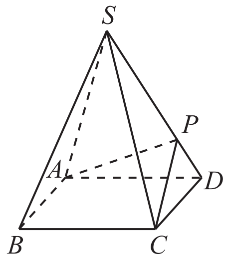
（1）证明：$AB\perp PC$；

（2）若 $PC=4$，且平面 $PAC\perp$平面 PBC，求三棱锥 P-ABC 的体积.



（第 5 题）

6. 如图所示，四棱锥 S-$ABCD$ 的底面是正方形，每条侧棱的长都是底面边长的$\sqrt{2}$倍，P 为侧棱 SD 上的点.



（第 6 题）

（1）求证：$AC\perp SD$；

（2）若 $SD\perp$平面 PAC，求二面角 P-AC-D 的大小；

（3）在（2）的条件下，侧棱 SC 上是否存在一点 E，使得 $BE/\!/$平面 PAC. 若存在，求 $SE:EC$ 的值；若不存在，试说明理由.

人民教育出版社

数学吸引我是因为它的优美、清晰、逻辑必然性与普遍性．它超越了语言和文化的隔阂．它以一种完全清晰、毫无疑问的方式提取了自然结构的逻辑共性．

——萧荫堂

第二章

平面解析几何

人民教育出版社

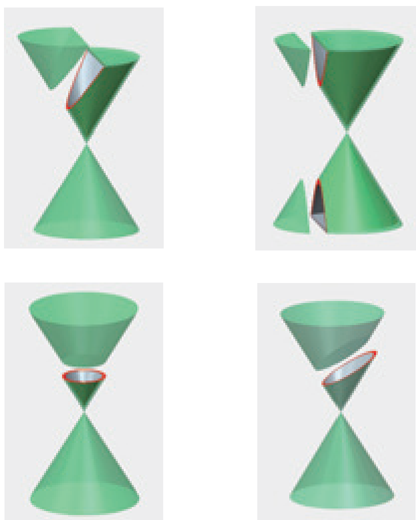
本章导语

在初中阶段我们就已经知道：线段 AB 的垂直平分线，可以看成与 A，B 的距离相等的所有点组成的集合．当时，我们是通过全等三角形的知识证明如下两个命题后得到这个结论的：线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等；到一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上．那么，上述结论能不能用其他方式得到呢？答案是肯定的．

给定一个平面，选定原点建立平面直角坐标系后，平面内点的位置可以用坐标来刻画．此时，平面内的直线是否可以通过直线上点的坐标来刻画？平面内其他几何对象能否也用类似的方法来描述？这些都是本章我们要探讨的问题．利用点的坐标来刻画几何对象、研究几何对象的性质以及探讨几何对象之间的关系，是解析几何的内容．

本章我们要学习利用直线上点的坐标来刻画直线，研究点与直线、直线与直线之间的位置关系．

除了直线以外，我们还会研究圆、椭圆、双曲线、抛物线等几何对象及其性质．如图所示，因为这些几何对象都能通过用平面截两个顶点相同、顶角相等、轴相同的圆锥面得到，所以通常被称为圆锥曲线．



2.1 坐标法

1. 平面直角坐标系中的基本公式

我们已经知道，给定了原点、单位长度与正方向的直线是数轴，数轴上的点与实数是一一对应的，如图 2-1-1 所示.

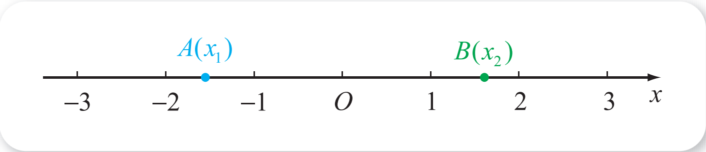


图 2-1-1

如果数轴上点 A 对应的数为 x_1（即 A 的坐标为 x_1，记作 $A(x_1)$），且 $B(x_2)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 x_2-x_1，从而可以得到数轴上两点之间的距离公式

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=|x_2-x_1|;$$①

如果 $M(x)$ 是线段 AB 的中点，则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，从而可以得到数轴上的中点坐标公式

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

另一方面，给定一个平面，选定原点 O、单位长度以及 x 轴和 y 轴的正方向之后，可以建立平面直角坐标系 xOy，此时平面内的点与有序实数对是一一对应的. 如图 2-1-2 所示，如果 A 点对应的有序实数对为 (x_1, y_1)（即 A 的坐标为 (x_1, y_1)，记作 $A(x_1, y_1)$，其中 x_1 为 A 的横坐标，y_1 为 A 的纵坐标），且 $B(x_2, y_2)$，则向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$，从而可以得到平面直角坐标系内两点之间的距离公式

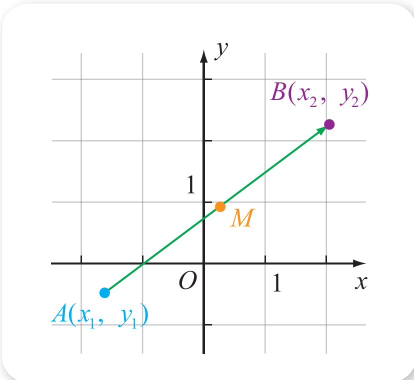


图 2-1-2

① 解析几何中，点 A 与点 B 的距离用符号 $|AB|$ 表示，下同.

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};$$

若 $M(x, y)$是线段 AB 的中点，则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，从而可以得到平面直角坐标系内的中点坐标公式

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad}.$$

一般地，平面直角坐标系内两点之间的距离公式与中点坐标公式都称为平面直角坐标系中的基本公式. 不难看出，利用平面直角坐标系中的基本公式，可以解决一些有关距离和中点的问题.

例 1 已知 $A(1, 2)$，$B(3, 4)$，$C(5, 0)$是$\triangle ABC$ 的三个顶点，求这个三角形 AB 边上中线的长.

解 设 AB 的中点为 $M(x, y)$，则

$$x=\frac{1+3}{2}=2,\quad y=\boxed{2}\underline{\qquad\qquad},$$

从而可知所求中线长为

$$|CM|=\sqrt{(2-5)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}.$$

由例 1 可以看出，如果知道三角形的三个顶点的坐标，可以求出三角形的中线长、边长等信息，更进一步，可以判断三角形的形状等.

2. 坐标法

尝试与发现

如图 2-1-3 所示$\square ABCD$ 中，如果要证明

$$AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2),$$

你能想到什么办法?

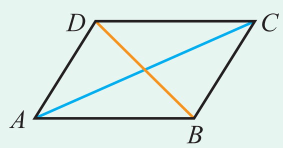


图 2-1-3

尝试与发现中结论的证明，可以借助解三角形的知识来完成（请读者自行尝试），但如果注意到所要证明的式子中，只含有线段的长度，就可以想到能借助平面直角坐标系通过距离公式来完成.

例如，取 A 为坐标原点，AB 所在的直线为 x 轴，建立如图 2-1-4 所示的平面直角坐标系. 则 $A(0, 0)$，设 $B(a, 0)$，$C(b, c)$，从而由平行四边形的性质可知 $D(b-a, c)$.

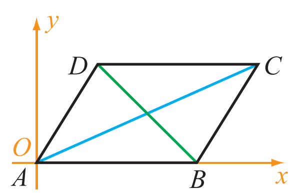


图 2-1-4

因此

$$|AC|^2=b^2+c^2$$
$$|BD|^2=(b-2a)^2+c^2=b^2-4ab+4a^2+c^2,$$
$$|AC|^2+|BD|^2=2b^2-4ab+4a^2+2c^2;$$

类似地

$$|AB|^2=\boxed{3}\underline{\qquad\qquad\qquad},$$
$$|AD|^2=\boxed{4}\underline{\qquad\qquad\qquad},$$
$$|AB|^2+|AD|^2=b^2-2ab+2a^2+c^2.$$

由此可以看出

$$|AC|^2+|BD|^2=2(|AB|^2+|AD|^2),$$

从而可知结论成立.

这里我们实际上是通过建立平面直角坐标系，将几何问题转化为代数问题，然后通过代数运算等解决了问题．这种解决问题的方法称为**坐标法**．上面的例子中，我们借助坐标法证明了有关的几何结论．在本章后续的内容中，我们会逐渐体会到用坐标法研究几何问题的特点.

例 2 已知 $ABCD$ 是一个长方形，$AB=4$，$AD=1$．判断线段 CD 上是否存在点 P，使得 $AP\perp BP$．如果存在，指出满足条件的 P 有多少个；如果不存在，说明理由.

解 以 AB 的中点为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立如图 2-1-5 所示平面直角坐标系．依据已知可得

$$A(-2,0),\ B(2,0),$$
$$C(2,1),\ D(-2,1).$$

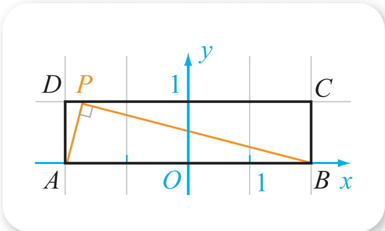


图 2-1-5

设 $P(t,1)$ 是线段 CD 上一点，则 $-2\leqslant t\leqslant 2$，而且

$$\overrightarrow{PA}=(-2-t,-1),\ \overrightarrow{PB}=(2-t,-1).$$

因为 $AP\perp BP$ 的充要条件是 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，这也等价于

$$(-2-t)(2-t)+1=0.$$

又因为上述方程的解为 $t=\sqrt{3}$ 或 $t=\boxed{5}\underline{\qquad\qquad}$，所以满足条件的 P 点存在，而且有两个.

习题2-1A

1. 已知数轴上 $A(-2)$，$B(10)$，求这两点之间的距离以及它们的中点坐标.
2. 已知 $A(3,0)$，$B(0,-4)$，求这两点之间的距离以及它们的中点坐标.

3. 已知 $A(-1, 3)$，$B(3, 3)$，$C(1, 2\sqrt{3}+3)$，证明$\triangle ABC$是等边三角形.
4. 已知$\triangle ABC$的三个顶点分别为 $A(2, 1)$，$B(-2, 3)$，$C(0, -1)$，求$\triangle ABC$三条中线的长.
5. 已知数轴上 $A(-1)$，$B(2)$，且 A 关于 B 的对称点为 C，求 C 的坐标.

习题2-1B

1. 已知数轴上的点 P 到 $A(-9)$的距离是它到 $B(-3)$的距离的 2 倍，求点 P 的坐标.
2. 已知 $A(a, 0)$，$B(0, 10)$，且$|AB|=17$，求 a 的值.
3. 已知 $A(3, 1)$，$B(-2, 2)$，在 y 轴上的点 P 满足 $PA\perp PB$，求 P 的坐标.
4. 已知 $ABCD$ 是一个长方形，且 M 是 $ABCD$ 所在平面上任意一个点，求证：$AM^2+CM^2=BM^2+DM^2$.
5. 已知函数 $y=f(x)$的图象与函数 $y=x^2+1$ 的图象关于 $M(2, 0)$对称，求 $f(x)$的解析式.

习题2-1C

1. 在数轴上，对坐标分别为 x_1 和 x_2 的两点 A 和 B，用绝对值定义两点间的距离，表示为 $d(A, B)=|x_1-x_2|$.

   (1) 在数轴上任意取三点 A，B，C，证明 $d(A, B)\leqslant d(A, C)+d(B, C)$.

   (2) 设 A 和 B 两点的坐标分别为-3 和 2，分别找出 (1) 中不等式等号成立和等号不成立时点 C 的范围.

2. 城市的许多街道是相互垂直或平行的，因此，往往不能沿直线行走到达目的地，只能按直角拐弯的方式行走. 如果按照街道的垂直和平行方向建立平面直角坐标系，对两点 $A(x_1, y_1)$和 $B(x_2, y_2)$，定义两点间距离为 $d(A, B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$.

   (1) 在平面直角坐标系中任意取三点 A，B，C，证明 $d(A, B)\leqslant d(A, C)+d(B, C)$；

   (2) 设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，分别找出 (1) 中不等式等号成立和等号不成立时点 C 的范围.

1 $\dfrac{y_1+y_2}{2}$ 2 $\dfrac{2+4}{2}=3$ 3 a^2 4 $(b-a)^2+c^2=b^2-2ab+a^2+c^2$ 5 $-\sqrt{3}$

2.2 直线及其方程

2.2.1 直线的倾斜角与斜率

1. 直线的倾斜角与斜率

尝试与发现

我们知道，经过平面直角坐标系中的一点，可以有无数条不同的直线.

如图 2-2-1 所示，过同一点的直线 l_1，l_2，l_3，l_4，它们彼此之间的不同点是什么？你能找到一个量来描述它们的不同点吗？你找到的量，能够使得图中任意两条不同的直线都有不同的取值吗？

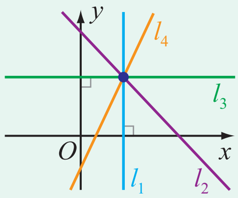


图 2-2-1

图 2-2-1 中的四条直线，任意两条相对于坐标轴（比如 x 轴）的倾斜程度都不一样.

一般地，给定平面直角坐标系中的一条直线，如果这条直线与 x 轴相交，将 x 轴绕着它们的交点按逆时针方向旋转到与直线重合时所转的最小正角记为 θ，则称 θ 为这条直线的**倾斜角**；如果这条直线与 x 轴平行或重合，则规定这条直线的倾斜角为 $0°$.

这样一来，平面直角坐标系中的每一条直线都有唯一的倾斜角，而且倾斜角的取值范围是 $0°\sim180°$. 特别地，与 x 轴平行或重合（即与 y 轴垂直）的直线，倾斜角为 $0°$，例如图 2-2-1 中的 l_3；与 x 轴垂直的直线，倾斜角为 $90°$，例如图 2-2-1 中的 l_1. 在图 2-2-1 中，l_4 的倾斜角是一个锐角，l_2 的倾斜角是一个钝角.

尝试与发现

平面直角坐标系中的两点可以确定一条直线，那么这两点当然也可以确定直线的倾斜角.

如图 2-2-2 所示，分别写出以下直线的倾斜角，并总结出一般的结论：

（1）经过 $A(-1, -1)$，$B(3, -1)$的直线 l_1；

（2）经过 $C(2, 1)$，$D(2, 2)$的直线 l_2；

（3）经过 $E(-1, 0)$，$F(1, 2)$的直线 l_3.

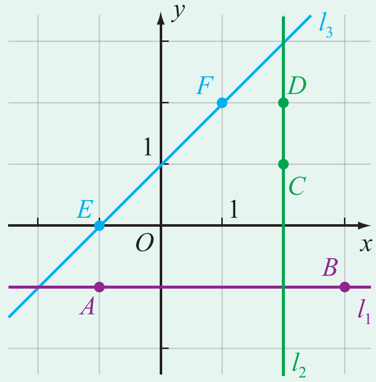


图 2-2-2

因为 A，B 两点的纵坐标相同而横坐标不同，所以直线 l_1 的倾斜角为 $0°$；因为 C，D 两点的横坐标相同而纵坐标不同，所以直线 l_2 的倾斜角为 $90°$；对于 E，F 来说，如果过 F 点作 x 轴的垂线 FN 且 N 为垂足，则可以看出$\triangle ENF$ 是等腰直角三角形，因此 l_3 的倾斜角为 $45°$.

一般地，如果 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$是直线 l 上两个不同的点，直线 l 的倾斜角为 θ，则：

（1）当 $y_1=y_2$ 时（此时必有 $x_1\neq x_2$），$\theta=$ 1 ________；

（2）当 $x_1=x_2$ 时（此时必有 $y_1\neq y_2$），$\theta=$ 2 ________；

（3）当 $x_1\neq x_2$ 且 $y_1\neq y_2$ 时，可以构造以 AB 为斜边且两直角边分别平行于坐标轴或在坐标轴上的直角三角形，如图 2-2-3（1）（2）所示，此时

$$\boxed{\tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},}$$

而且，这个式子在 $x_1\neq x_2$ 且 $y_1=y_2$ 时也成立.

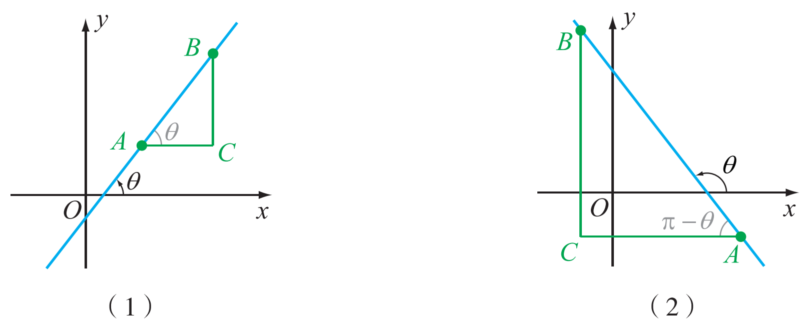


图 2-2-3

一般地，如果直线 l 的倾斜角为 θ，则当 $\theta\neq 90°$时，称

$$\boxed{k=\tan\theta}$$

为直线 l 的**斜率**；当 $\theta=90^\circ$ 时，称直线 l 的斜率不存在.

从上面也可以看出，若 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 是直线 l 上两个不同的点，则当 $x_1\neq x_2$ 时，直线 l 的斜率为

$$\boxed{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},}$$

当 $x_1=x_2$ 时，直线 l 的斜率不存在.

例 1 已知直线 l 经过点 $A(-1, 3)$ 与 $B(2, 0)$，求直线 l 的斜率 k 与倾斜角 θ.

解 因为 A，B 两点的横坐标不相等，所以斜率

$$k=\frac{0-3}{2-(-1)}=-1.$$

因此 $\tan\theta=-1$，由 $\theta\in[0, \pi)$ 可知倾斜角 $\theta=$ 3 ________.

例 2 已知平面直角坐标系中的四条直线 l_1，l_2，l_3，l_4 如图 2-2-4 所示，设它们的倾斜角分别为 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4，而且斜率分别为 k_1，k_2，k_3，k_4. 分别将倾斜角和斜率按照从小到大的顺序排列.

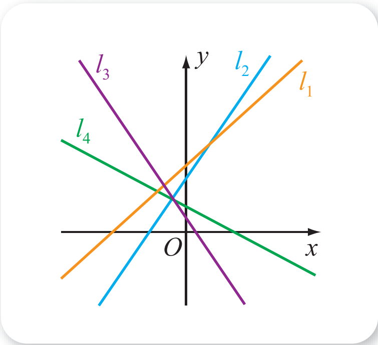


图 2-2-4

解 按照倾斜角的定义，从图上可以看出

$$\theta_1<\theta_2<\theta_3<\theta_4.$$

因为

$$k_i=\tan\theta_i, \quad i=1, 2, 3, 4,$$

又因为正切函数在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 递增且函数值大于0，在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 递增且函数值小于0，所以

$$k_3<k_4<k_1<k_2.$$

尝试与发现

从直线的倾斜角与斜率都反映了直线相对于 x 轴的倾斜程度这一点出发，考察平面直角坐标系中三个不同的点共线的充要条件，并举例说明.

注意到平面直角坐标系中每一条直线的倾斜角都是唯一的，相应的斜率也是唯一的或不存在，因此可以看出，平面直角坐标系中三个不同的点共线的充要条件，从倾斜角考虑，是其中任意两点确定的直线的倾斜角都相等；从斜率考虑，是其中任意两点确定的直线的斜率，要么都相等，要么都不存在.

例如，如图 2-2-5（1）中，对于 $A(-2,0)$，$B(0,2)$，$C(1,3)$，有

$$k_{AB}=\frac{2-0}{0-(-2)}=1,\ k_{AC}=\frac{3-0}{1-(-2)}=1,①$$

因此 $k_{AB}=k_{AC}$，从而直线 AB 与直线 AC 的倾斜角也相等，因此 A，B，C 三点共线.

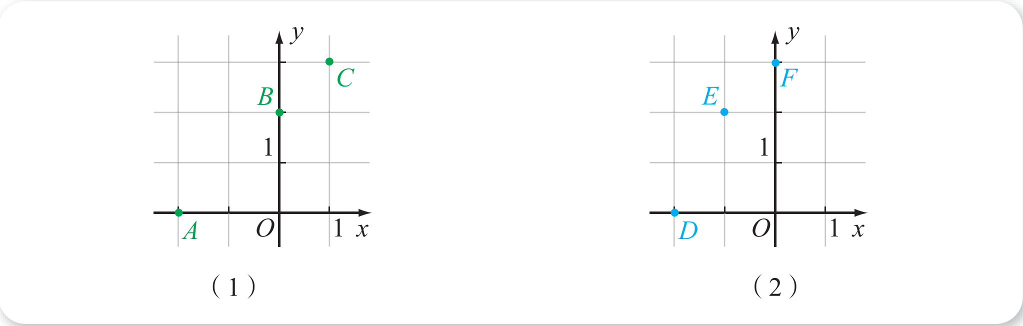


图 2-2-5

而如图 2-2-5（2）中，对于 $D(-2,0)$，$E(-1,2)$，$F(0,3)$，有

$$k_{FD}=\frac{0-3}{-2-0}=\frac{3}{2},\ k_{FE}=\boxed{4}\underline{\qquad\qquad},$$

因此 $k_{FD}\neq k_{FE}$，从而直线 FE 与直线 FD 的倾斜角也不相等，因此 E，F，D 三点不共线.

例 3 已知 $A(-2,-1)$，$B(0,-3)$，$C(1,-4)$，$D(2,-6)$，则 A，B，C 共线吗？A，B，D 呢？

解 因为

$$k_{AB}=\frac{-3-(-1)}{0-(-2)}=-1,\ k_{AC}=\frac{-4-(-1)}{1-(-2)}=-1,\ k_{AD}=\boxed{5}\underline{\qquad\qquad},$$

所以 $k_{AB}=k_{AC}\neq k_{AD}$，因此 A，B，C 共线，而 A，B，D 不共线.

2. 直线的方向向量

给定平面直角坐标系中的一条直线 l，在 l 上任意取 A，B 两个不同的点，显然，向量 $\overrightarrow{AB}$ 也能描述直线 l 相对于 x 轴的倾斜程度，如图 2-2-6 所示．此时，我们称 $\overrightarrow{AB}$ 是直线 l 的一个方向向量.

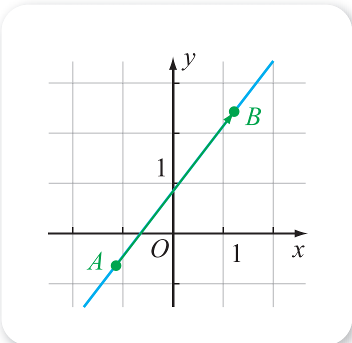


图 2-2-6

一般地，如果表示非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段所在的直线与直线 l 平行或重合，则称向量 $\boldsymbol{a}$

① 为了方便起见，以后均用 k_{AB} 表示由 A，B 两点确定的直线的斜率.

为直线 l 的一个**方向向量**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/l$.

例如，$\boldsymbol{a}=(1,\ 0)$是所有倾斜角为 0°（即与 y 轴垂直）的直线的一个方向向量，$\boldsymbol{b}=(0,\ 1)$是所有倾斜角为 90°（即与 x 轴垂直）的直线的一个方向向量，$\boldsymbol{c}=(1,\ 1)$是所有倾斜角为 45°的直线的一个方向向量，如图 2-2-7 所示.

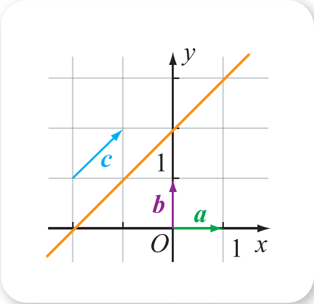


图 2-2-7

可以看出：

（1）如果 $\boldsymbol{a}$ 为直线 l 的一个方向向量，那么对于任意的实数 $\lambda\neq0$，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 都是 l 的一个方向向量，而且直线 l 的任意两个方向向量一定共线；

（2）如果 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$是直线 l 上两个不同的点，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$$

是直线 l 的一个方向向量.

尝试与发现

（1）如图 2-2-8 所示，设 l 是平面直角坐标系中的一条直线，且倾斜角为 60°，设 $\overrightarrow{OP}$ 是直线 l 的一个方向向量，且 $|\overrightarrow{OP}|=1$，你能写出 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标吗？

（2）一般地，如果直线 l 的倾斜角为 θ，斜率为 k，你能写出直线 l 的一个方向向量吗？

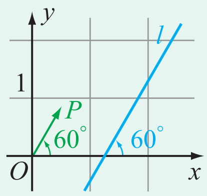


图 2-2-8

如图 2-2-8 所示，因为$|\overrightarrow{OP}|=1$，所以点 P 的横坐标为 $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$，纵坐标为 $\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此 $\overrightarrow{OP}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

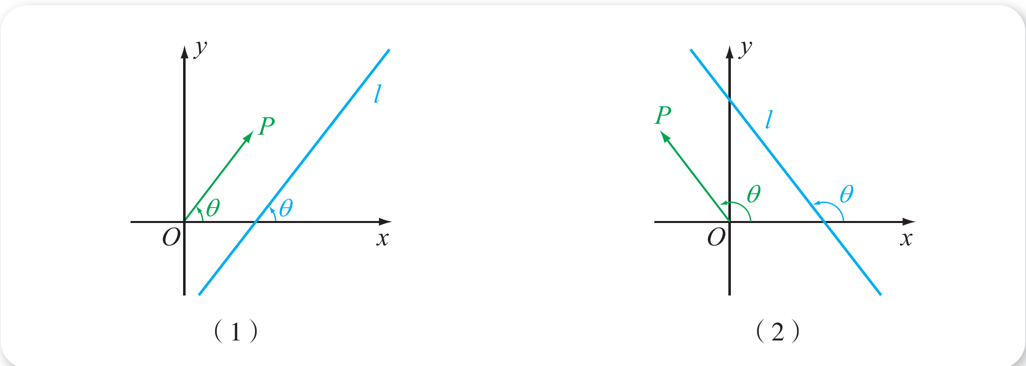


图 2-2-9

一般地，如图 2-2-9（1）（2）所示，当 θ 为直线 l 的倾斜角时，如果 $\overrightarrow{OP}$ 是直线 l 的一个方向向量，而且$|\overrightarrow{OP}|=1$，则根据三角函数的定义可知

点 P 的坐标为

$$(\cos\theta,\ \sin\theta).$$

这就是说，此时 $\overrightarrow{OP}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ 一定是直线 l 的一个方向向量.

当然，此时对于任意的实数 $\lambda\neq0$，$\lambda\overrightarrow{OP}=(\lambda\cos\theta,\ \lambda\sin\theta)$ 也是直线 l 的一个方向向量. 当 $\theta\neq90^\circ$ 时，直线的斜率 k 是存在的，而且

$$k=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

因此，此时如果令 $\lambda=\dfrac{1}{\cos\theta}$，则可知 $(1,\ k)$ 也一定是直线 l 的一个方向向量.

例如，如果直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$，则 $\left(\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 是直线 l 的一个方向向量；另一方面，因为直线的斜率为 $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 也是直线 l 的一个方向向量.

尝试与发现

（1）如图 2-2-10 所示，如果 $\boldsymbol{a}=(-1,\ 1)$ 为直线 l 的一个方向向量，你能写出 l 的斜率 k 和倾斜角 θ 吗？

（2）一般地，如果已知 $\boldsymbol{a}=(u,\ v)$ 为直线 l 的一个方向向量，你能由此写出 l 的斜率 k 和倾斜角 θ 吗？

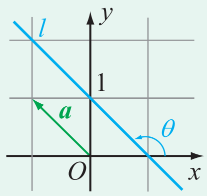


图 2-2-10

在图 2-2-10 中，当 $\boldsymbol{a}=(-1,\ 1)$ 是 l 的一个方向向量时，若直线 l 的斜率为 k，则 $(1,\ k)$ 也是直线 l 的一个方向向量，因此 $\boldsymbol{a}=(-1,\ 1)$ 与 $(1,\ k)$ 共线. 从而

$$(-1)\times k=1\times1,$$

从而可求得斜率 $k=-1$. 然后再根据 $\tan\theta=-1$ 可知 $\theta=135^\circ$.

一般地，如果已知 $\boldsymbol{a}=(u,\ v)$ 为直线 l 的一个方向向量，则：

（1）当 $u=0$ 时，显然直线 l 的斜率不存在，倾斜角为 90°；

（2）当 $u\neq0$ 时，直线 l 的斜率是存在的，而且此时 $(1,\ k)$ 与 $\boldsymbol{a}=(u,\ v)$ 都是直线 l 的一个方向向量，由直线的任意两个方向向量共线可知 $1\times v=k\times u$，从而

$$k=\frac{v}{u},$$

因此可知倾斜角满足 $\tan\theta=\dfrac{v}{u}$.

例 4　已知直线 l 通过点 $A(0, 1)$ 与 $B(1, 1-\sqrt{3})$，求直线 l 的一个方向向量，并确定直线 l 的斜率与倾斜角.

解　由已知可得

$$\overrightarrow{AB}=(1, 1-\sqrt{3})-(0, 1)=(1, -\sqrt{3})$$

是直线 l 的一个方向向量.

因此，直线的斜率

$$k=\boxed{6}\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

直线的倾斜角 θ 满足 $\tan\theta=-\sqrt{3}$，从而可知 $\theta=120°$.

由上可以看出，通过直线的方向向量能够确定直线的斜率与倾斜角，而且一条直线的所有方向向量都共线，因此也可得到：如果 A，B，C 是平面直角坐标系中的三个不同的点，则这三点共线的充要条件是 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线.

例 5　已知 $A(-3, -1)$，$B(1, 3)$，$C(5, 8)$，判断 A，B，C 是否共线.

解　因为

$$\overrightarrow{AB}=(1-(-3), 3-(-1))=(4, 4),$$

$$\overrightarrow{AC}=(5-(-3), 8-(-1))=(8, 9),$$

又因为 $4\times9\neq4\times8$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线，从而 A，B，C 不共线.

3. 直线的法向量

一般地，如果表示非零向量 $\boldsymbol{v}$ 的有向线段所在直线与直线 l 垂直，则称向量 $\boldsymbol{v}$ 为直线 l 的一个**法向量**，记作 $\boldsymbol{v}\perp l$.

不难看出，一条直线的方向向量与法向量互相垂直. 特别地，当 x_0 与 y_0 不全为 0 时，因为向量 (x_0, y_0) 与 $(y_0, -x_0)$ 是互相垂直的，所以，如果其中一个为直线 l 的一个方向向量，则另一个一定是直线 l 的一个法向量.

例如，如果 $\boldsymbol{a}=(1, 2)$ 是直线 l_1 的一个方向向量，则 $\boldsymbol{v}=(2, -1)$ 就是直线 l_1 的一个法向量；如果 $\boldsymbol{v}=(-2, -3)$ 是直线 l_1 的一个法向量，则 $\boldsymbol{a}=\boxed{7}\_\_\_\_\_\_\_\_$ 就是直线 l_1 的一个方向向量.

练习A

1. 分别写出下列直线的倾斜角：
   (1) 垂直于 x 轴的直线；　　(2) 垂直于 y 轴的直线；
   (3) 第一、三象限的角平分线；　　(4) 第二、四象限的角平分线.

2 根据下列直线的倾斜角 α，判断直线的斜率是否存在，如果存在，求出斜率的值：

(1) $\alpha=0°$；　(2) $\alpha=60°$；　(3) $\alpha=90°$；　(4) $\alpha=150°$.

3 已知直线 l 经过点 $A(-2,\ 0)$ 与 $B(-5,\ 3)$，求直线 l 的一个方向向量、斜率 k 与倾斜角 θ.

4 已知 $A(-1,\ -3)$，$B(0,\ -1)$，$C(1,\ 2)$，$D(3,\ 5)$，则 A，B，C 共线吗？A，B，D 呢？

5 判断命题"如果 A，B，C 是平面直角坐标系中的三个不同的点，则这三点共线的充要条件是 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线"的真假.

练习B

1 (1) 如果直线的倾斜角 $\theta\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，则当 θ 增大时，直线的斜率将怎样变化？如果 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$呢？

(2) 能否说直线的倾斜角增大时斜率也增大？为什么？

2 分别判断经过下列两点的直线的斜率是否存在，如果存在，求出斜率后再求出倾斜角；如果不存在，求出倾斜角.

(1) $C(-3,\ 4)$，$D(2,\ 4)$；　(2) $P(0,\ 0)$，$Q(-1,\ \sqrt{3})$；

(3) $M(-3,\ \sqrt{2})$，$N(-\sqrt{2},\ 3)$；　(4) $E(7,\ 0)$，$Q(7,\ -\sqrt{2})$.

3 已知直线 l_1 的斜率为 -1，直线 l_2 的倾斜角比直线 l_1 的倾斜角小 $30°$，求直线 l_2 的斜率.

4 已知经过 $A(a,\ -1)$，$B(2,\ a+1)$的直线的斜率为 3，求实数 a 的值.

5 已知直线 l 的斜率的绝对值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求这条直线的倾斜角.

1 $0°$　2 $90°$　3 $135°$　4 $\dfrac{2-3}{-1-0}=1$　5 $\dfrac{-6-(-1)}{2-(-2)}=-\dfrac{5}{4}$

6 $\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$　7 $(-3,\ 2)$（或$(3,\ -2)$等）

2.2.2 直线的方程

1. 直线的点斜式方程与斜截式方程

尝试与发现

设 l_1，l_2 是平面直角坐标系中的直线，分别判断满足下列条件的 l_1，l_2 是否唯一．如果唯一，作出相应的直线，并思考直线上任意一点的坐标(x, y)应该满足什么条件．

(1) 已知 l_1 的斜率不存在；

(2) 已知 l_1 的斜率不存在且 l_1 过点 $A(-2, 1)$；

(3) 已知 l_2 的斜率为$\sqrt{3}$；

(4) 已知 l_2 的斜率为$\sqrt{3}$且 l_2 过点 $B(1, 2)$．

不难看出，满足条件（1）的直线 l_1 有无数条，但满足条件（2）的直线 l_1 是唯一的，如图 2-2-11 所示．此时若 $P(x, y)$为直线 l_1 上的点，则必有 $x=-2$；另外，任意横坐标为-2 的点，一定都在直线 l_1 上．

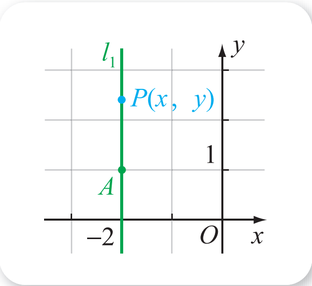


图 2-2-11

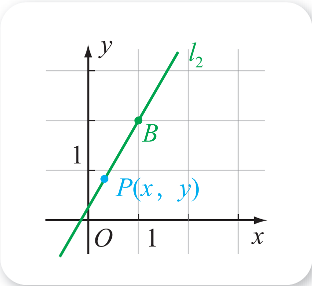


图 2-2-12

满足条件（3）的直线 l_2，只要倾斜角为 60°即可，因此 l_2 也有无数条，但满足条件（4）的直线 l_2 是唯一的，如图 2-2-12 所示．此时若 $P(x, y)$为直线 l_2 上不同于 B 的点，则 $k_{BP}=\sqrt{3}$，即$\dfrac{y-2}{x-1}=\sqrt{3}$，化简可得

$$y-2=\sqrt{3}(x-1),$$

容易验证，$B(1, 2)$的坐标也能使上式成立，因此直线 l_2 上的点都使得上式成立；另外，如果 x，y 能使得上式成立，则要么 $P(x, y)$就是点 $B(1, 2)$，要么 $k_{BP}=\sqrt{3}$，也就是说，点 P 一定在直线 l_2 上．

如果我们将 $x=-2$ 与 $y-2=\sqrt{3}(x-1)$ 都看成关于 x，y 的方程，则由上可以看出，平面内的点是否在直线 l_1，l_2 上，只要看坐标是否能满足对应的方程即可.

一般地，如果直线 l 上点的坐标都是方程 $F(x, y)=0$ 的解，而且以方程 $F(x, y)=0$ 的解为坐标的点都在直线 l 上，则称 $F(x, y)=0$ 为**直线 l 的方程**，而直线 l 称为方程 $F(x, y)=0$ 的直线. 此时，为了简单起见，“直线 l” 也可说成 “直线 $F(x, y)=0$”，并且记作 l：$F(x, y)=0$.

想一想

“二次函数 $y=(x-1)^2$ 的图象的对称轴为 $x=1$”，其中的 $x=1$ 表示的是什么？

因此，前述直线 l_1 的方程为 $x=-2$，且 l_2 的方程是 $y-2=\sqrt{3}(x-1)$. 由直线方程的定义可以看出，平面直角坐标系中的一个点是否在直线上，只要看它的坐标是否是直线方程的解即可. 例如，点 $(2, 3)$ 不在直线 $y-2=\sqrt{3}(x-1)$ 上，因为

$$3-2\neq\sqrt{3}(2-1).$$

从前面的实例也可以看出，在平面直角坐标系中，如果已知 $P_0(x_0, y_0)$ 是直线 l 上一点，而且知道 l 的斜率信息，就可以写出直线 l 的方程：

(1) 如果直线 l 的斜率不存在，则直线 l 的方程为

$$\boxed{x=x_0.}$$

(2) 如果直线 l 的斜率存在且为 k，设 $P(x, y)$ 为直线 l 上不同于 P_0 的点，则 $k_{P_0P}=k$，即 $\frac{y-y_0}{x-x_0}=k$，化简可得

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0),} \quad ①$$

而且 $P_0(x_0, y_0)$ 的坐标也能使上式成立；另外，如果 x，y 能使得上式成立，则要么 $P(x, y)$ 就是点 $P_0(x_0, y_0)$，要么 $k_{P_0P}=k$，也就是说，点 P 一定在直线 l 上，从而①就是直线 l 的方程. 因为方程①由直线上一点和直线的斜率确定，所以通常称为直线的**点斜式方程**.

直线的点斜式方程还可以用方向向量来得到：如果已知 $P_0(x_0, y_0)$ 是直线 l 上一点，而且 l 的斜率为 k，则直线的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1, k)$；另一方面，设 $P(x, y)$ 为平面直角坐标系中任意一点，则 P 在直线 l 上的充要条件是 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，又因为 $\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0, y-y_0)$，所以

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

例 1　已知直线 l 经过点 P，且 l 的斜率为 k，分别根据下列条件求直线 l 的方程：

（1）$P(0,\ 3)$，$k=2$；　　　　（2）$P(1,\ 0)$，$k=-3$.

解　（1）根据已知可得直线 l 的点斜式方程为

$$y-3=2\times(x-0),$$

化简得 $y=2x+3$.

（2）根据已知可得直线 l 的点斜式方程为

1 ________________，

化简得 2 ________.

例 1 说明，在直线的点斜式方程中，如果已知的点是坐标轴上的点，则点斜式方程可以方便地化为 $y=kx+b$ 的形式.

一般地，当直线 l 既不是 x 轴也不是 y 轴时：若 l 与 x 轴的交点为 $(a,\ 0)$，则称 **l 在 x 轴上的截距**为 a；若 l 与 y 轴的交点为 $(0,\ b)$，则称 **l 在 y 轴上的截距**为 b. 一条直线在 y 轴上的截距简称为**截距**.

因此，如果已知直线的斜率为 k，截距为 b，则意味着这条直线过了 $(0,\ b)$ 这个点，从而可知直线的方程为 $y-b=k(x-0)$，化简可得

$$\boxed{y=kx+b.} \qquad ②$$

方程②由直线的斜率和截距确定，因此通常称为直线的**斜截式方程**.

从直线的斜截式方程 $y=kx+b$，可以方便地看出直线的斜率 k 和截距 b. 事实上，此时若 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ 是直线上两个不同的点，则

$$\begin{cases} y_1=kx_1+b, \\ y_2=kx_2+b, \end{cases}$$

第二式减去第一式可得 $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$，因此当 $x_2-x_1\neq 0$ 时有

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

从而 k 就是直线的斜率. 在方程 $y=kx+b$ 中，令 $x=0$ 得 $y=b$，因此直线与 y 轴的交点为 $(0,\ b)$，这就是说，b 为直线的截距（即直线在 y 轴上的截距）.

> **想一想**
>
> 直线方程的斜截式与一次函数的表达式有什么联系与区别？

从上面可以看出，平面直角坐标系中直线的方程，要么可以写成 $x=x_0$ 的形式，要么可以写成 $y=kx+b$ 的形式. 正因为如此，在求直线的方程时，如果直线的斜率存在，最后总可将直线的方程写成斜截式的形式.

例 2　已知直线 l 经过点 $P(-2,\ 3)$，且 l 的倾斜角为 $45°$，求直线 l 的方程，并求直线 l 的截距.

解　因为直线 l 的斜率 $k=\tan 45°=1$，所以可知直线 l 的方程为

$$y-3=1\times[x-(-2)],$$

即 $y=x+5$. 因此直线 l 的截距为 3 ________.

2. 直线的两点式方程

我们在初中学过“两点确定一条直线”，下面来探讨如何利用代数等式来表达这个几何事实.

尝试与发现

根据条件求出下列直线的方程：

(1) 经过 $A(0, 1)$ 与 $B(1, 3)$ 两点的直线 l_1；

(2) 经过 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 两点的直线 l_2.

为了得到直线 l_1 的方程，我们首先可以通过 A，B 两点得到 l_1 的斜率 $k=\dfrac{3-1}{1-0}=2$，再根据直线的点斜式方程得到直线 l_1 的方程为

$$y-3=2(x-1),$$

即 $y=2x+1$.

直线 l_2 的方程可以用同样的方法来求，但是需要对它的斜率是否存在进行讨论. 下面我们换种方式来推导：注意到 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ 是直线 l_2 的一个方向向量. 设 $P(x, y)$ 为平面直角坐标系中一点，则 $\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1, y-y_1)$，$P$ 在直线 l_2 上的充要条件是 $\overrightarrow{P_1P}$ 与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 共线，即

$$(x-x_1)(y_2-y_1)=(x_2-x_1)(y-y_1), \qquad ③$$

这就是直线 l_2 的方程.

当 $x_2-x_1\neq 0$ 且 $y_2-y_1\neq 0$ 时，③式可以变形为

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},} \qquad ④$$

这种形式的直线方程由直线上的两点确定，称为直线的**两点式方程**.

例 3 已知直线 l 经过点 $A(-2, 1)$，$B(3, -3)$，求直线 l 的方程，并求直线 l 的截距.

解 因为 A，B 两点的横坐标不相等，而且纵坐标也不相等，所以直线的两点式方程为

$$\frac{y-1}{-3-1}=\frac{x-(-2)}{3-(-2)},$$

整理得 $y=-\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}$. 因此直线 l 的截距为 4 ________.

例 4 已知直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距分别为 a，b，且 $ab\neq0$，求直线 l 的方程.

解 根据已知可得直线 l 通过点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$，而且 $a\neq0$，$b\neq0$，因此直线的两点式方程为

$$\frac{y-b}{0-b}=\frac{x-0}{a-0},$$

这一方程可以整理为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad ⑤$$

⑤式通常称为直线的**截距式方程**，需要特别注意的是，这只有直线在 x 轴与在 y 轴上的截距都存在且不为 0 时才成立.

3. 直线的一般式方程

尝试与发现

所有直线的方程都能表示成点斜式吗？都能表示成斜截式吗？都能表示成两点式吗？如果能，说明理由；如果不能，举出反例，并思考直线的方程都能写成什么样的形式.

显然，并不是所有的直线方程都能表示成点斜式、斜截式和两点式. 例如，过(1，2)且垂直于 x 轴的直线，其直线方程为

$$x=1,$$

这条直线的斜率不存在，在 y 轴上的截距也不存在，任意两点的横坐标都相同，因此该方程不可能表示成点斜式、斜截式和两点式.

但我们已经知道，平面直角坐标系中直线的方程，要么可以写成 $x=x_0$ 的形式，要么可以写成 $y=kx+b$ 的形式，因此可以看出，所有的直线方程都可以写成

$$Ax+By+C=0 \qquad ⑥$$

的形式，其中 A，B，C 都是实常数，而且 A 与 B 不同时为零（即 $A^2+B^2\neq0$）.

⑥式一般称为直线的**一般式方程**. 在求直线方程时，最后一般都将直线的方程化为一般式方程. 例如，直线方程 $x=-3$ 写成一般式方程是 $x+3=0$，直线方程 $y=-2x-5$ 写成一般式方程是 $2x+y+5=0$.

习惯上，也将形如⑥式的方程称为关于 x，y 的二元一次方程. 那么，关于 x，y 的二元一次方程⑥是否一定表示的是直线呢？答案是肯定的. 这是因为在⑥式中：如果 $B\neq0$，则方程可以化为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

它表示的是斜率为 5 ________ 且截距为 $-\frac{C}{B}$ 的直线；如果 $B=0$，则由 A 与 B 不同时为零可知 $A\neq 0$，从而方程可以化为

$$x=-\frac{C}{A},$$

它表示的是斜率 6 ________ 且过点 $\left(-\frac{C}{A},\ 0\right)$ 的直线.

例 5 已知直线 l 的一般式方程为 $2x-3y+6=0$，求直线 l 的斜率以及在 x 轴和 y 轴上的截距.

解 直线 l 的一般式方程可以化为

$$y=\frac{2}{3}x+2,$$

所以直线 l 的斜率为 $\frac{2}{3}$，在 y 轴上的截距为 2.

在方程中令 $y=0$ 可得 $x=-3$，因此 l 在 x 轴上的截距为 7 ________.

直线方程的一般形式也可以从③中直接得到. 而且，如果直线 l 的一般式方程为

$$Ax+By+C=0\ (A^2+B^2\neq 0),$$

设 $P_0(x_0,\ y_0)$ 为直线 l 上一个固定的点，$P(x,\ y)$ 为直线 l 上任意一点，则

$$\begin{cases}Ax_0+By_0+C=0,\\ Ax+By+C=0,\end{cases}$$

第二式减去第一式可得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad ⑦$$

若记 $\boldsymbol{v}=(A,\ B)$，则⑦式说明 $\boldsymbol{v}$ 与向量

$$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,\ y-y_0)$$

的内积为 0，因此 $\boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{P_0P}$，即 $\boldsymbol{v}=(A,\ B)$ 为直线 $Ax+By+C=0$ 的一个法向量.

例 6 已知直线 l 经过点 $A(3,\ 2)$，而且 $\boldsymbol{v}=(3,\ -4)$ 是直线 l 的一个法向量，求直线 l 的一般式方程.

解 （方法一） 设 $P(x,\ y)$ 为平面直角坐标系中任意一点，则 P 在直线 l 上的充要条件是 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\boldsymbol{v}=(3,\ -4)$ 垂直. 又因为 $\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y-2)$，所以

$$3\times(x-3)+(-4)\times(y-2)=0,$$

整理可得一般式方程为 $3x-4y-1=0$.

（方法二）因为 $\boldsymbol{v}=(3, -4)$是直线 l 的一个法向量，所以可以设 l 的方程为

$$3x-4y+C=0,$$

代入点 $A(3, 2)$，可求得 $C=-1$，因此所求方程为 $3x-4y-1=0$.

4. 用信息技术根据方程作直线

根据直线的方程，利用计算机软件可以方便地在平面直角坐标系中作出直线.

例如，在 GeoGebra 中，输入直线的方程，即可得到直线，而且还可以选择方程的不同形式，如图 2-2-13 所示.

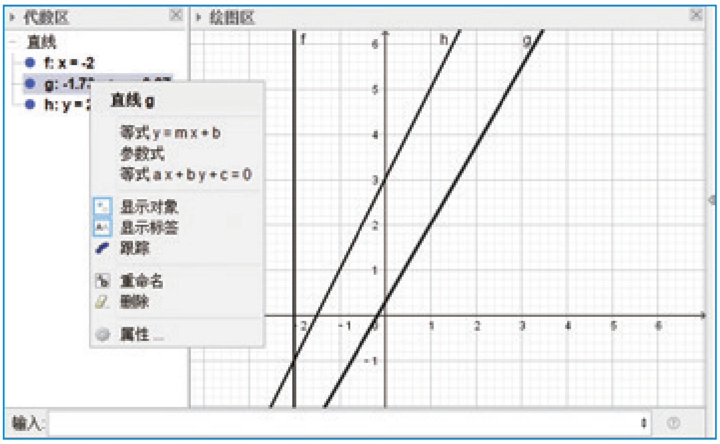


图 2-2-13

练习A

1. 判断下列各点是否在直线 $y=-6x+7$ 上：$A(0, 7)$，$B(2, 5)$，$C(1, 1)$.
2. 已知点$(a, 1)$，$(-1, b)$确定的直线方程是 $y=-3x+1$，求 a，b 的值.
3. 根据下列条件求直线的点斜式方程：
   （1）经过点 $A(2, 5)$，斜率为 4；
   （2）经过点 $B(-2, 2)$，倾斜角为 30°.
4. 根据下列条件求直线的斜截式方程：
   （1）斜率是$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，截距是-2；　　（2）倾斜角是 135°，截距是 3.

5 分别求下列直线的方程：

(1) 经过 $A(0, -1)$，$B(-1, 1)$的直线 l_1；

(2) 经过 $C(3, -1)$，$D(-2, -1)$的直线 l_2；

(3) 经过 $E(1, 3)$，$F(1, -2)$的直线 l_3.

6 根据下列条件，求直线的方程：

(1) 过点 $A(-3, 2)$，且截距是-2；

(2) 过点 $A(3, 0)$，且在两坐标轴上的截距和为 5.

7 根据下列直线方程，分别求出直线的斜率及截距：

(1) $y-2=x+1$；　(2) $y+4=\sqrt{3}(x-2)$；　(3) $4x+y-3=0$.

练习B

1 判断下列命题的真假：

(1) 如果直线 l 的斜率不存在，则直线 l 在 x 轴上的截距唯一；

(2) 如果直线 l 的斜率存在，则直线 l 的截距唯一；

(3) 存在直线 l，使得 l 在 x 轴上的截距与在 y 轴上的截距都为 0.

2 已知直线 l_1 的倾斜角为 $30°$，直线 l_2 与 l_1 垂直，求直线 l_2 的倾斜角.

3 判断$\dfrac{y-2}{x-3}=1$是否是某条直线的方程.

4 在同一个平面直角坐标系中，作出经过原点且斜率分别为 1，-1，2，-2 的直线，并总结斜率分别为 k 和$-k$ 的两条直线的倾斜角有什么关系.

5 (1) 如果直线 l 过点 $P(-1, -2)$，且直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1, -2)$，求直线 l 的方程；

(2) 如果直线 l 过点 $P(x_0, y_0)$，且直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(u, v)$，求直线 l 的方程.

6 (1) 如果直线 l 过点 $P(1, 3)$，且直线 l 的法向量为 $\boldsymbol{a}=(-3, 1)$，求直线 l 的方程；

(2) 如果直线 l 过点 $P(x_0, y_0)$，且直线 l 的法向量为 $\boldsymbol{a}=(u, v)$，求直线 l 的方程.

1 $y-0=(-3)\times(x-1)$　2 $y=-3x+3$　3 5　4 $-\dfrac{3}{5}$　5 $-\dfrac{A}{B}$

6 不存在　7 -3

2.2.3 两条直线的位置关系

1. 两条直线的相交、平行与重合

从初中平面几何中我们就已经知道，两条不重合的直线 l_1 与 l_2：如果它们没有公共点，那么 l_1 与 l_2 平行；否则，l_1 与 l_2 相交，而且有唯一的交点. 在平面直角坐标系中，直线可以用直线的方程来表示，那么如何依据两条直线的方程来判定它们之间的位置关系呢？这就是下面我们要讨论的问题.

尝试与发现

（1）已知直线 l_1：$x-y+1=0$，直线 l_2：$x+y+3=0$，判断 l_1 与 l_2 之间的关系. 如果相交，求出交点的坐标；如果不相交，说明理由.

（2）总结怎样依据两条直线的方程来考察它们之间的位置关系.

因为平面直角坐标系中，一个点在直线上的充要条件是这个点的坐标能满足直线的方程，所以为了考察 l_1 与 l_2 之间的位置关系，只要看它们的方程组成的方程组的解的情况即可. 又因为解方程组

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ x+y+3=0, \end{cases}$$

可得 $x=-2$，$y=-1$，所以可知 l_1 与 l_2 是相交的，而且交点的坐标为 1 ________.

类似地，可以用同样的方法来考察平面直角坐标系中任意两条直线的位置关系.

若直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，则可得方程组

$$\begin{cases} y=k_1x+b_1, \\ y=k_2x+b_2, \end{cases}$$

消去未知数 y 并整理，可得

$$(k_1-k_2)x=-(b_1-b_2). \quad ①$$

（1）当且仅当 $k_1-k_2\neq 0$，即 $k_1\neq k_2$ 时，①式有唯一的解 $x=-\dfrac{b_1-b_2}{k_1-k_2}$，因此可知方程组有唯一的解，且 $y=\dfrac{b_2k_1-b_1k_2}{k_1-k_2}$. 此时，直线 l_1 与 l_2 有唯

一的交点（称为相交），且交点坐标为

$$\left(-\frac{b_1-b_2}{k_1-k_2},\ \frac{b_2k_1-b_1k_2}{k_1-k_2}\right).$$

（2）当且仅当 $k_1-k_2=0$ 且 $-(b_1-b_2)\neq 0$，即 $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$ 时，①式无解，因此方程组也无解．此时，直线 l_1 与 l_2 没有交点，因此它们相互平行．

（3）当且仅当 $k_1-k_2=0$ 且 $-(b_1-b_2)=0$，即 $k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$ 时，任意实数都是①式的解，方程组有无数组解．此时，直线 l_1 与 l_2 的方程完全一样，它们有无穷多个交点，因此重合．

综上，若直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，则：

l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow k_1\neq k_2$；

l_1 与 l_2 平行 $\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$；

l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$．

这个结论也可从斜率反映的是直线相对于 x 轴的倾斜程度等来直观理解，请读者自行尝试．

例如，直线 $y=-x$ 与 $y=2x$ 相交，直线 $y=3$ 与 $y=-1$ 平行．

尝试与发现

上述结论中包括了平面直角坐标系中所有的直线吗？如果没有，请提出能包括所有直线的解决方案，并尝试给出最后的结论．

前面的讨论中并没有包括斜率不存在的直线．为此，可以考虑直线的一般式方程．

设直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$．虽然同样可以通过方程组的解的情况来考察 l_1 与 l_2 的关系，但这里我们用法向量来处理．

因为 $\boldsymbol{v}_1=(A_1,\ B_1)$ 是直线 l_1 的一个法向量，$\boldsymbol{v}_2=(A_2,\ B_2)$ 是直线 l_2 的一个法向量，如图 2-2-14（1）（2）所示，不难看出：

（1）l_1 与 l_2 相交（即只有一个交点）的充要条件是 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不共线，即 $A_1B_2\neq A_2B_1$；

（2）l_1 与 l_2 平行或重合的充要条件是 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 共线，即 $A_1B_2=A_2B_1$．

人民教育出版社

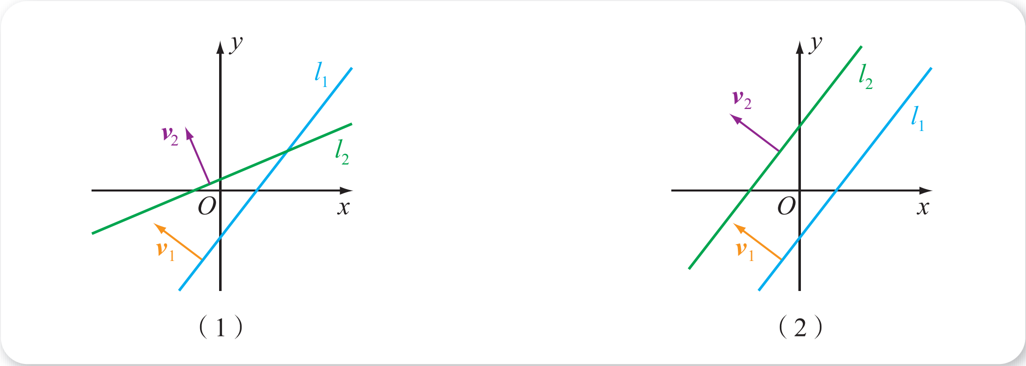


图 2-2-14

在 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 共线时，存在实常数 λ，使得 $\boldsymbol{v}_1=\lambda\boldsymbol{v}_2$，因为 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 都不是零向量，所以 $\lambda\neq 0$，且

$$\begin{cases}A_1=\lambda A_2,\\B_1=\lambda B_2,\end{cases}$$

此时 l_1 的方程可以改写为 $\lambda(A_2x+B_2y)+C_1=0$，即 $A_2x+B_2y+\dfrac{C_1}{\lambda}=0$.

可以看出，方程组

$$\begin{cases}A_2x+B_2y+\dfrac{C_1}{\lambda}=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

要么有无穷多组解，要么无解，而且有无穷多组解的充要条件为 $C_2=\dfrac{C_1}{\lambda}$.

因此 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 重合的充要条件是，存在实数 λ，使得

$$\begin{cases}A_1=\lambda A_2,\\B_1=\lambda B_2,\\C_1=\lambda C_2.\end{cases}$$

例如，直线 $x-1=0$ 与直线 $2x-2=0$ 重合，直线 $x+y+\dfrac{1}{2}=0$ 与直线 $2x+2y+1=0$ 也重合.

上述结论也说明，直线 $Ax+By+C_1=0$ 与直线 $Ax+By+C_2=0$，平行的充要条件是 $C_1\neq C_2$，重合的充要条件是 2 ________.

例 1 判断下列各对直线的位置关系，如果相交，求出交点的坐标：

(1) l_1：$x-y+1=0$，l_2：$2x-2y+1=0$；

(2) l_1：$x-2y+1=0$，l_2：$x+2y+5=0$.

解 (1) 将 l_1 与 l_2 的方程分别化为斜截式可知

$$l_1:\ y=x+1,\quad l_2:\ y=x+\frac{1}{2}.$$

因此 l_1 与 l_2 的斜率相等，但截距不相等，所以它们平行.

（2）解方程组

$$\begin{cases}x-2y+1=0,\\x+2y+5=0,\end{cases}$$

可得 $x=-3$，$y=-1$.

因此 l_1 与 l_2 相交，而且交点的坐标为 3 ____________.

例 2 已知直线 l 过点$(1, -4)$且与直线 $2x+3y+5=0$ 平行，求直线 l 的方程.

解 依题意可设 l 的方程为 $2x+3y+C=0$. 由于 l 过点$(1, -4)$，因此

$$2\times1+3\times(-4)+C=0,$$

解得 $C=10$.

因此直线 l 的方程为 $2x+3y+10=0$.

例 2 中所求得的直线只有一条，这实际上也能说明，通过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行.

2. 两条直线的垂直

我们知道，平面内的两条相交直线，如果相交所得的角是四个直角，则它们互相垂直. 因此，两条直线垂直是两条直线相交的一种特殊情形，能否根据直线的方程来判断两条直线是否垂直呢？这就是下面我们要讨论的问题.

尝试与发现

如果要根据两条直线的方程来判断它们是否垂直，可以从哪些方面来考虑？用你想到的方法判断直线 l_1：$2x-y+1=0$ 与 l_2：$x+2y+2=0$ 是否垂直.

因为直线的方程给定之后，直线的法向量、斜率、倾斜角都能确定，所以至少可以从这些方面进行考虑.

可以看出，两条直线垂直的充要条件是它们的法向量相互垂直. 对于尝试与发现中的 l_1 与 l_2 来说，因为 $\boldsymbol{v}_1=(2, -1)$，$\boldsymbol{v}_2=(1, 2)$分别是 l_1，l_2 的法向量，而且

$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=2\times1+(-1)\times2=0,$$

即 $\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2$，所以 l_1 与 l_2 垂直.

另一方面，如果设 l_1 与 l_2 的倾斜角分别为 α_1 与 α_2，斜率分别为 k_1 与 k_2，则由图 2-2-15 可以看出，l_1 与 l_2 垂直的充要条件是 $\alpha_2=\alpha_1+\dfrac{\pi}{2}$，从而

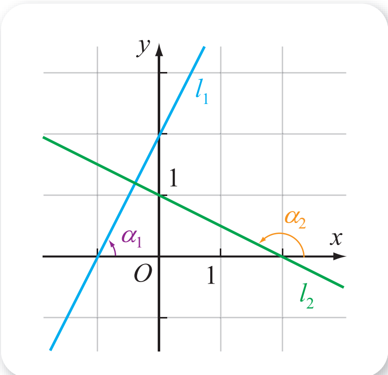


图 2-2-15

$$\tan\alpha_2=\tan\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\alpha_1}{-\sin\alpha_1}$$

$$=-\frac{1}{\tan\alpha_1},$$

即 $\tan\alpha_1\tan\alpha_2=-1$，故 $k_1k_2=-1$. 又因为 $k_1=2$，$k_2=-\frac{1}{2}$，所以可知 l_1 与 l_2 垂直.

一般地，若已知平面直角坐标系中的直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，用类似方法考察它们的法向量或倾斜角之间的关系，可得

$$\boxed{l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1.}$$

尝试与发现

上述结论中包括了平面直角坐标系中所有的直线吗？如果没有，请提出能包括所有直线的解决方案，并尝试给出最后的结论.

显然，前面的讨论中并没有包括斜率不存在的直线. 为此，可以考虑直线的一般式方程.

设直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$. 因为 $\boldsymbol{v}_1=(A_1, B_1)$是直线 l_1 的一个法向量，$\boldsymbol{v}_2=(A_2, B_2)$是直线 l_2 的一个法向量，如图 2-2-16 所示，不难看出，l_1 与 l_2 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 垂直，即 $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=0$，因此

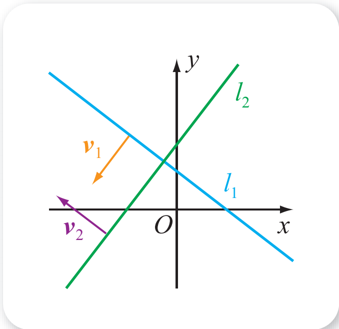


图 2-2-16

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

即

$$\boxed{l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0.}$$

由此也可以看出，在平面直角坐标系中，直线 $Ax+By+C_1=0$ 与直线 $Bx-Ay+C_2=0$ 一定是垂直的，因为 $AB+B(-A)=0$.

例 3 判断下列各对直线是否垂直：

(1) l_1：$y=2x-2$，l_2：$x-2y+1=0$；

(2) l_1：$x=2$，l_2：$y-3=0$.

解 (1) 将 l_2 的方程化为斜截式为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. 因此 l_2 的斜率为

4 ________，又因为 l_1 的斜率为 2，而且

$$\frac{1}{2}\times 2=1\neq -1,$$

从而可知 l_1 与 l_2 不垂直.

（2）显然，l_1 的倾斜角为 90°，l_2 的倾斜角为 0°，从而可知 l_1 与 l_2 垂直.

例 4 分别求下列直线的方程：

（1）过点(3，1)且与直线 $y=3x-1$ 垂直的直线 l_1；

（2）过点(1，2)且与直线 $2x+y-10=0$ 垂直的直线 l_2.

解 （1）因为直线 $y=3x-1$ 的斜率为 3 且与 l_1 垂直，所以 l_1 的斜率为 5 ________，因此直线 l_1 的点斜式方程为

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-3),$$

整理得 $x+3y-6=0$.

（2）依题意可设 l_2 的方程为 $x-2y+C=0$. 由于 l_2 过点(1，2)，因此

$$1-2\times 2+C=0,$$

解得 $C=3$.

因此直线 l_2 的方程为 $x-2y+3=0$.

例 4 每一问中所求得的直线只有一条，这实际上也能说明，通过平面上一点，有且只有一条直线与已知直线垂直.

练习A

1. 判断下列各对直线是否平行：

（1）$3x+4y-5=0$，$6x+8y-7=0$；（2）$y=3x+4$，$2y-6x+1=0$；

（3）$x=3$，$3x+5=0$；（4）$x+y=0$，$x-y=0$.

2. 判断下列各对直线是否相交，如果相交，求出交点坐标：

（1）l_1：$2x+y=7$，l_2：$4x+2y=1$；

（2）l_1：$x-3y+2=0$，l_2：$y=3x+4$.

3. 根据下列条件，分别求过点 P 且平行于直线 l 的直线的方程：

（1）$P(-1,3)$，l：$x-3y+6=0$；（2）$P(3,-5)$，l：$x+5y+2=0$；

（3）$P(2,3)$，l：$2x+y-5=0$.

4. 判断下列各对直线是否垂直：

（1）l_1：$3x+4=0$，l_2：$5+2y=0$；

（2）l_1：$(\sqrt{2}-1)x+y=3$，l_2：$x+(\sqrt{2}+1)y=2$.

⑤ 求下列过点 P 且与直线 l 垂直的直线的方程：

(1) $P(4,\ -3)$，l：$x+5y-3=0$； (2) $P(3,\ -5)$，l：$x+y=0$；

(3) $P(2,\ 3)$，l：$x+y-2=0$.

练习B

① 已知直线 $2x+y-8=0$ 与直线 $3x+(1-a)y+3=0$ 平行，求 a 的值.

② 方程 $2x+y+a=0$ 在 a 取不同实数时，对应不同的直线，这些不同的直线的位置关系如何？在平面直角坐标系中，分别作出 $a=0$，1，2 时方程表示的直线.

③ 已知直线 $2x+ay-1=0$ 与 $x+4y-2=0$ 的交点在第一象限，求 a 的取值范围.

④ 求经过 $2x+y-8=0$ 与 $x-2y+1=0$ 的交点，且平行于直线 $4x-3y-7=0$ 的直线的方程.

⑤ 已知直线 $ax+2y-1=0$ 与直线 $2x-3y+5=0$ 垂直，求 a 的值.

⑥ 已知 $A(-1,\ 2)$，$B(3,\ -2)$，$C(1,\ 5)$，求过点 C 且与直线 AB 垂直的直线的方程.

1 $(-2,\ -1)$　2 $C_1=C_2$　3 $(-3,\ -1)$　4 $\frac{1}{2}$　5 $\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$

2.2.4 点到直线的距离

1. 点到直线的距离

我们知道，平面内点到直线的距离，等于过这个点作直线的垂线所得垂线段的长度. 那么，如果已知平面直角坐标系中点的坐标以及直线的方程，能不能快速地求出点到直线的距离呢？这就是本小节我们要解决的问题.

尝试与发现

你能想办法求出 $P(-1,\ 2)$到直线 l_1：$2x+y-5=0$ 的距离吗？用你的方法能得出一般的结论吗？

如图 2-2-17 所示，设 $P_1(x_1,\ y_1)$是直线 l_1 上的点，且 $PP_1\perp l_1$，则 P

到 l_1 的距离等于 PP_1 的长.

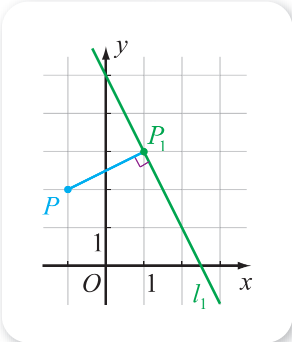


图 2-2-17

注意到 $\overrightarrow{PP_1}=(x_1+1,\ y_1-2)$，而且 $\boldsymbol{v}=(2,\ 1)$ 是直线 l_1 的一个法向量，因此 $\overrightarrow{PP_1}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 共线，从而

$$2\times(y_1-2)=1\times(x_1+1),$$

整理得

$$x_1-2y_1+5=0. \qquad ①$$

又因为 $P_1(x_1,\ y_1)$是直线 l_1 上的点，所以

$$2x_1+y_1-5=0. \qquad ②$$

联立①与②，解方程组可得 $x_1=1$，$y_1=3$. 即 $P_1(1,\ 3)$，所以 $\overrightarrow{PP_1}=$ 1 ________，因此

$$|\overrightarrow{PP_1}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5},$$

即所求距离为$\sqrt{5}$.

下面我们来求直线外一点 $P(x_0,\ y_0)$到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离 d. 设 $P_1(x_1,\ y_1)$是直线 l 上的点，且 $PP_1\perp l$，因此所要求的就是

$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}. \qquad ③$$

注意到 $\overrightarrow{PP_1}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0)$，而且 $\boldsymbol{v}=(A,\ B)$是直线 l 的一个法向量，因此 $\overrightarrow{PP_1}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 共线，从而 $A(y_1-y_0)=B(x_1-x_0)$，整理得

$$B(x_1-x_0)-A(y_1-y_0)=0. \qquad ④$$

又因为 $P_1(x_1,\ y_1)$是直线 l 上的点，所以

$$Ax_1+By_1+C=0. \qquad ⑤$$

如果联立④和⑤求出 x_1，y_1，再代入③中求 d，将是非常烦琐的（请读者自行尝试）. 注意到为了求出③，我们只需求出 x_1-x_0 与 y_1-y_0 的平方和即可，而④中正好有这两个式子，但⑤中没有. 为此，在⑤的左右两边同时减去 Ax_0，By_0，并整理，得

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=-(Ax_0+By_0+C). \qquad ⑥$$

将④与⑥两边平方后相加可得

$$(A^2+B^2)[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]=(Ax_0+By_0+C)^2,$$

因此$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=\dfrac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}$，从而

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

这称为**点到直线的距离公式**.

例如，利用点到直线的距离公式，可以算得 $P(-1,\ 2)$到直线 l_1：$2x+y-5=0$ 的距离为

$$\frac{|2\times(-1)+2-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5},$$

这与前面我们计算的结果是一致的.

点 $P(x_0,\ y_0)$到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离公式也可通过向量数量积来推导：因为 $\boldsymbol{v}=(A,\ B)$是直线 l 的一个法向量，设 $P_1(x,\ y)$是直线 l 上任意一点，则按照向量数量积的几何意义可知，$P(x_0,\ y_0)$到直线 l 的距离 d 满足

$$d=\frac{|\overrightarrow{PP_1}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

注意到 $\overrightarrow{PP_1}=(x-x_0,\ y-y_0)$，所以

$$\begin{aligned}d&=\frac{|\overrightarrow{PP_1}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\&=\frac{|Ax+By-(Ax_0+By_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}},\end{aligned}$$

又因为 $P_1(x,\ y)$是直线 l 上一点，所以 $Ax+By+C=0$，因此 $Ax+By=-C$，从而

$$d=\frac{|-C-(Ax_0+By_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

例 1 已知△ABC 的三个顶点 $A(2,\ 2)$，$B(2,\ 0)$，$C(0,\ 1)$，求△ABC 的 BC 边上的高.

解 所求 BC 边上的高等于点 A 到直线 BC 的距离.

因为 BC 所在直线的截距式方程为

2 ______________，

所以一般式方程为3 ______________，因此所求高为

$$\frac{|2+2\times2-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

2. 两条平行直线之间的距离

我们知道，两条平行线之间的距离，等于其中一条直线上任意一点到另一条直线的距离，因此，可以借助点到直线的距离求两条平行直线之间的距离.

例 2 求平行线 l_1：$3x-4y+3=0$ 与 l_2：$6x-8y-5=0$ 之间的距离.

解 在 l_1 的方程中，令 $y=0$，则可得 $x=-1$，因此$(-1,0)$是直线 l_1 上一点.

又因为$(-1,0)$到 $6x-8y-5=0$ 的距离为

$$\frac{|6\times(-1)-8\times0-5|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\boxed{4}\underline{\qquad\qquad},$$

所以所求距离为 $\boxed{5}$____________.

例 3 已知直线 l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$，求证：l_1 与 l_2 之间的距离为

$$d=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

证明 设 $P(x_1,y_1)$为 l_1 上一点，则 $Ax_1+By_1+C_1=0$，从而 $Ax_1+By_1=-C_1$.

因为 P 到 l_2 的距离为

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

所以结论成立.

练习A

1. 分别求下列点到直线的距离：

   (1) $O(0,0)$，l：$4x-3y+10=0$；　(2) $A(2,-3)$，l：$x+y-1=0$.

2. 如果点 $P(m,n)$到直线 $x+y-1=0$ 的距离为 0，写出 m，n 满足的关系式.
3. 求平行线 $2x-3y+5=0$ 与 $2x-3y-8=0$ 之间的距离.
4. 如果点 P 到直线 l 的距离为 d，且点 P 与直线 l 上一点 A 的距离为 3，求 d 的取值范围.

练习B

1. 分别写出点 $P(x_0,y_0)$到 $x=a$，$y=b$ 的距离.
2. 已知点 $B(m,6)$到直线 $y=3x+6$ 的距离为 3，求实数 m 的值.
3. 求平行线 $3x-2y-3=0$ 与 $6x-4y+1=0$ 之间的距离.
4. 已知点 $A(1,3)$，$B(2,1)$，$C(-1,0)$，求$\triangle ABC$ 的面积.

$\boxed{1}$ $(2,1)$　$\boxed{2}$ $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$　$\boxed{3}$ $x+2y-2=0$　$\boxed{4}$ $\frac{11}{10}$　$\boxed{5}$ $\frac{11}{10}$

习题2-2A

1. 判断 $A(1, 3)$，$B(3, 7)$，$C(4, 9)$三点是否共线，并说明理由.
2. 分别求下列直线的倾斜角：
   (1) $y=\sqrt{3}x-2$；　　(2) $x+\sqrt{3}y+1=0$；
   (3) $x=-3$；　　(4) $y=\dfrac{1}{2}$.
3. 根据下列条件分别求出直线的方程：
   (1) 经过点 $A(4, 2)$，平行于 x 轴；
   (2) 经过点 $B\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$，平行于 y 轴；
   (3) 在 x 轴、y 轴上的截距分别为 $-\dfrac{2}{3}$，3.
4. (1) 求过点 $P(5, 2)$且平行于直线 l：$3x-y+1=0$ 的直线的方程；
   (2) 求过点 $P(-2, 1)$且垂直于直线 l：$x-3y-4=0$ 的直线的方程.
5. 已知三角形的顶点是 $A(-1, 0)$，$B(3, 1)$，$C(0, 5)$，求这个三角形三边所在直线的方程.
6. 分别判断下列各对直线的位置关系，如果相交，求出交点坐标：
   (1) $2x+y-11=0$，$x+3y-18=0$；
   (2) $2x+5y-6=0$，$2x-5y-6=0$.
7. 分别求下列点到直线的距离：
   (1) $O(0, 0)$，$3x+4y-5=0$；　　(2) $A(1, -3)$，$x+y-1=0$；
   (3) $B(1, 0)$，$3x+y=0$；　　(4) $C(1, 2)$，$y-7=0$.
8. 求在 y 轴上且到直线 $3x+4y+5=0$ 的距离等于 5 的点的坐标.
9. 已知菱形的两条对角线分别在 x 轴和 y 轴上，并且它们的长分别等于 8 和 6，求菱形各边所在直线的方程.
10. 分别求直线 $3x-4y-5=0$ 关于 x 轴、y 轴对称的直线的方程.
11. 已知 $A(1, 3)$关于直线 l：$y=x-3$ 的对称点为 B，求 B 到直线 l 的距离.
12. 函数 $y=|x+3|$ 的图象由两条射线组成，求这两条射线所在直线的方程.

习题2-2B

1. 已知 a，b，c 是两两不相等的实数，分别求经过下列两点的直线的倾斜角：
   (1) $A(a, c)$，$B(b, c)$；　　(2) $C(a, b)$，$D(a, c)$；
   (3) $P(b, b+c)$，$Q(a, c+a)$.
2. 已知 $A(-2, a)$，$B(a+1, 3)$，$C(-1, 2)$三点共线，求实数 a 的值.

3 方程 $y-1=k(x+1)$ 在 k 取遍所有实数时，可对应无数条直线，这无数条直线有什么共同点？

4 一条直线 l 经过点 $P(2,\ -3)$，并且倾斜角是直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角的 2 倍，求直线 l 的方程.

5 已知 $A(-3,\ 2)$，$B(1,\ -4)$，求线段 AB 的垂直平分线的方程.

6 求经过点 $A(3,\ 2)$，并且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程.

7 已知点 $A(-1,\ 2)$，$B(2,\ 1)$，$C(0,\ 4)$，求$\triangle ABC$ 三条高所在直线的方程.

8 已知直线 l_1：$(m+2)x-(m-2)y+2=0$，直线 l_2：$3x+my-5=0$，且 $l_1\perp l_2$，求 m 的值.

9 直线 $2x-y+c=0$ 与直线 $2x-y+2=0$ 之间的距离为$\sqrt{5}$，求 c 的值.

10 直线的方程 $Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$ 中的 A，B，C 满足什么条件时，直线分别具有如下性质？

(1) 过坐标原点；

(2) 与两条坐标轴都相交；

(3) 与 x 轴无交点；

(4) 与 y 轴无交点；

(5) 与 x 轴垂直；

(6) 与 y 轴垂直.

11 向量 $(x_0,\ y_0)$ 与 $(-y_0,\ x_0)$ 中，如果其中一个为直线 l 的一个方向向量，则另一个一定是直线 l 的一个法向量吗？

12 已知 P 是直线 l 上一点，且 $\boldsymbol{n}$ 是直线 l 的一个方向向量，分别根据下列条件求直线 l 的方程：

(1) $P(3,\ -5)$，$\boldsymbol{n}=(1,\ 2)$；

(2) $P(0,\ 5)$，$\boldsymbol{n}=(3,\ -4)$.

13 已知 P 是直线 l 上一点，且 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的一个法向量，分别根据下列条件求直线 l 的方程：

(1) $P(1,\ 2)$，$\boldsymbol{v}=(3,\ -4)$；

(2) $P(-1,\ 2)$，$\boldsymbol{v}=(3,\ 4)$.

习题2-2C

1 已知 $G(-1,\ 0)$ 为正方形的中心，且这个正方形的一条边所在的直线方程为 $x-3y-5=0$，求这个正方形其他三条边所在的直线的方程.

2 已知直线 l 经过点 $P(2,\ 1)$，且 $A(2,\ 3)$，$B(4,\ -5)$ 两点到直线 l 的距离相等，求直线 l 的方程.

3 求点 $A(1,\ 3)$ 关于直线 $x-y+3=0$ 的对称点的坐标.

人民教育出版社

2.3 圆及其方程

2.3.1 圆的标准方程

我们知道，平面内到一定点的距离等于定长的点的集合是圆，其中定点是圆心，定长是圆的半径．在平面直角坐标系中，每一条直线都可以用一个二元一次方程来表示．平面直角坐标系中的一个圆，是否也可以用方程表示呢？这就是本节我们要探讨的问题．

尝试与发现

如图 2-3-1 所示，设平面直角坐标系中的$\odot C$的圆心坐标为$C(1,2)$，而且半径为 2．

(1) 判断点$A(3,2)$是否在$\odot C$上；

(2) 设$M(x,y)$是平面直角坐标系中任意一点，那么M在$\odot C$上的充要条件是什么？此时x，y要满足什么关系式？

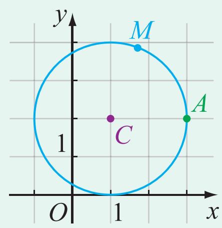


图 2-3-1

根据圆的定义可知，一个点在$\odot C$上的充要条件是这个点到圆心C的距离等于半径．因为

$$|CA|=\sqrt{(3-1)^2+(2-2)^2}=2,$$

所以可知点$A(3,2)$在$\odot C$上．

同样，$M(x,y)$在$\odot C$上的充要条件是$|CM|=2$，由两点间的距离公式有$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=2$，因此x，y要满足

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4.$$

一般地，如果平面直角坐标系中$\odot C$的圆心为$C(a,b)$，半径为r $(r>0)$，设$M(x,y)$为平面直角坐标系中任意一点，则点M在$\odot C$上的充要条件是$|CM|=r$，即$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$，两边平方，得

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.} \qquad ①$$

上述充要条件表明，$\odot C$ 上任意一点 M 的坐标 (x, y) 满足方程①；如果平面上一点 M 的坐标 (x, y) 满足方程①，可得 $|CM|=r$，则点 M 在 $\odot C$ 上. 因此方程①能表示以点 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆，①式通常称为**圆的标准方程**. 为了方便起见，同直线中的情形一样，我们称圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 时，指的是方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的圆.

当然，类似地，我们也可得到一个点在圆内还是圆外的判断方法：如果 $\odot C$ 的圆心为 $C(a, b)$，半径为 $r\ (r>0)$，则点 $M_1(x_1, y_1)$ 在 $\odot C$ 外的充要条件是

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2>r^2;$$

点 $M_2(x_2, y_2)$ 在 $\odot C$ 内的充要条件是

$$(x_2-a)^2+(y_2-b)^2<r^2.$$

例 1 根据下列条件，求圆的标准方程：

（1）圆心在点 $C(-2, 1)$，且过点 $A(2, -2)$；

（2）过点 $(0, 1)$ 和点 $(2, 1)$，半径为 $\sqrt{5}$.

分析 为了求得圆的标准方程，只要确定圆心坐标和半径就可以了.

解 （1）所求圆的半径

$$r=|CA|=\sqrt{(2+2)^2+(-2-1)^2}=5.$$

又因为圆心为 $(-2, 1)$，所以所求圆的方程为

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25.$$

（2）设圆心坐标为 (a, b)，则圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=5$. 因为 $(0, 1)$，$(2, 1)$ 是圆上的点，所以

$$\begin{cases} a^2+(1-b)^2=5, \\ (2-a)^2+(1-b)^2=5, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=1, \\ b=-1 \end{cases} 或 \begin{cases} a=1, \\ b=3. \end{cases}$$

因此，所求圆的方程为

$$(x-1)^2+(y+1)^2=5 或 (x-1)^2+(y-3)^2=5.$$

例 2 如图 2-3-2 所示，设 $\odot C$ 的圆心 C 在直线 l：$2x-7y+8=0$ 上，且 $A(6, 0)$，$B(1, 5)$ 都是 $\odot C$ 上的点，求圆的标准方程.

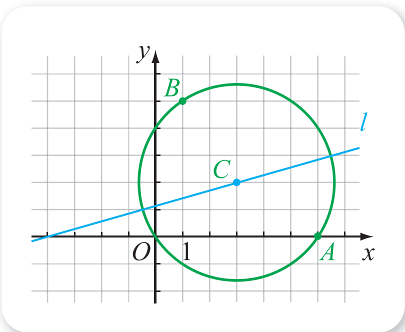


图 2-3-2

解 （方法一）设所求圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，由题意得

$$\begin{cases}(6-a)^2+(0-b)^2=r^2,\\(1-a)^2+(5-b)^2=r^2,\\2a-7b+8=0,\end{cases}$$

解得 $a=$ 1 ______，$b=$ 2 ______，$r^2=$ 3 ______.

因此所求圆的方程为

4 ______________.

（方法二）设线段 AB 的垂直平分线为 m，则 C 既在直线 m 上，又在直线 l 上，所以 C 是直线 m 与 l 的交点.

因为直线 AB 的斜率为 $\dfrac{5-0}{1-6}=-1$，所以 m 的斜率为 5 ______；

又因为 AB 中点的横坐标和纵坐标分别为

$$\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2},\quad \frac{0+5}{2}=\frac{5}{2},$$

所以直线 m 的方程为 $y-\dfrac{5}{2}=1\times\left(x-\dfrac{7}{2}\right)$，即 $x-y-1=0$.

解方程组

$$\begin{cases}x-y-1=0,\\2x-7y+8=0,\end{cases}$$

得 $x=3$，$y=2$. 因此，圆心 C 的坐标为 $(3,2)$，又圆的半径为

$$|CA|=\sqrt{(6-3)^2+(0-2)^2}=\sqrt{13},$$

从而所求圆的方程是

$$(x-3)^2+(y-2)^2=13.$$

例 3 赵州桥位于我国河北省，是我国现存最早、保存最好的巨大石拱桥. 如图 2-3-3 所示，赵州桥是一座空腹式的圆弧形石拱桥，利用解析几何的方法，用赵州桥的跨度 a 和圆拱高 b 表示出赵州桥圆弧所在圆的半径.

图 2-3-3

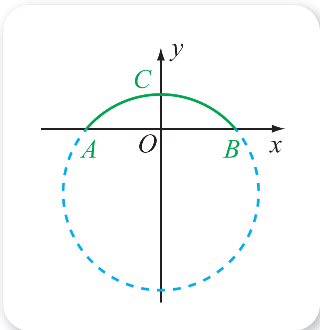


图 2-3-4

解 作出示意图如图 2-3-4 所示，其中 AB 表示跨度，O 为 AB 中点，OC 为圆拱高. 以 O 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，

根据已知条件有 $B\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$，$C(0,\ b)$.

可以看出，圆弧所在圆的圆心在 y 轴的负半轴上，因此可设圆心的坐标为$(0,\ t)$，半径为 r，则因为 B，C 都在圆上，所以

$$\begin{cases}\left(\frac{a}{2}\right)^2+t^2=r^2,\\(b-t)^2=r^2,\end{cases}$$

由此可解得 $r=\frac{4b^2+a^2}{8b}$.

感兴趣的同学可以从网上查得 a 与 b 的值，然后算出 r.

练习A

1. 分别写出满足下列条件的圆的标准方程：

   (1) 圆心为坐标原点，半径为 2；

   (2) 圆心为点$(0,\ 1)$，半径为 2；

   (3) 圆心为点$(-2,\ 1)$，半径为$\sqrt{3}$.

2. 求出下列方程表示的圆的圆心坐标和半径：

   (1) $x^2+y^2=5$；

   (2) $(x-3)^2+y^2=4$；

   (3) $x^2+(y+1)^2=2$；

   (4) $(x+2)^2+(y-1)^2=3$.

3. 判断 $A(1,\ 1)$，$B(1,\ \sqrt{3})$，$C(1,\ 2)$与圆 $x^2+y^2=4$ 的位置关系.

4. 写出圆心为点$(3,\ 4)$且过坐标原点的圆的方程.

5. 写出圆心在坐标原点且半径为 r $(r>0)$的圆的标准方程.

练习B

1. 分别求满足下列条件的圆的方程：

   (1) 以 $A(2,\ 3)$，$B(4,\ 9)$为直径的两个端点的圆；

   (2) 过点$(0,\ 1)$和$(0,\ 3)$，半径等于 1 的圆.

2. 求经过点 $A(1,\ 0)$，$B(0,\ 1)$，且圆心在直线 $x+y=0$ 上的圆的方程.

3. 已知 $P(-1,\ -1)$，点 Q 是圆$(x-2)^2+(y-3)^2=1$上任意一点，求$|PQ|$的最大值.

1 3　　2 2　　3 13　　4 $(x-3)^2+(y-2)^2=13$　　5 1

2.3.2 圆的一般方程

尝试与发现

把圆的标准方程

$$(x-1)^2+(y-2)^2=9$$

中的括号展开、整理之后，得到的方程形式是什么样的？是否所有圆的方程都能化成这种形式？

显然，$(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 可以化为

$$x^2-2x+y^2-4y-4=0.$$

一般地，圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 可以化为

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

在这个方程中，如果令 $D=-2a$，$E=-2b$，$F=a^2+b^2-r^2$，则这个方程可以表示成

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad ①$$

的形式，其中 D，E，F 都是常数. 形如①式的圆的方程称为**圆的一般方程**.

不难看出，圆的标准方程明确指出了圆的圆心坐标与半径，而圆的一般方程表明了圆的方程形式上的特点. 要给出圆的标准方程，需要确定圆心坐标和半径；而要给出圆的一般方程，则需要确定一般方程中的 D，E，F.

例 1 已知 $A(0,\ 5)$，$B(1,\ -2)$，$C(-3,\ -4)$ 是 $\odot P$ 上的三点，求这个圆的方程.

解 设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，因为 $A(0,\ 5)$，$B(1,\ -2)$，$C(-3,\ -4)$ 都是圆上的点，所以它们的坐标都是方程的解，因此可得

$$\begin{cases}5E+F+25=0,\\ D-2E+F+5=0,\\ -3D-4E+F+25=0,\end{cases}$$

解方程组可得 $D=$ **1** ________，$E=$ **2** ________，$F=$ **3** ________.

因此所求圆的方程为 $x^2+y^2+6x-2y-15=0$.

例 1 同样也可以通过设圆的标准方程来求解，请读者自行尝试.

圆的一般方程是一个二元二次方程，因为所有圆的方程都可以化成①的形式，所以一个二元二次方程表示圆的必要条件，就是能化成①的形式. 例

人民教育出版社

如，方程

$$x^2+2y^2-2x-3y+7=0 \text{ 与 } x^2+xy+y^2-3x-4y+5=0$$

都不是圆的方程，因为第一个方程中，x^2，y^2 的系数不相等，而第二个方程中 xy 项的系数不为 0，它们都不能化成①的形式．但是

$$2x^2+2y^2-4x-4y+1=0 \text{ 与 } x^2+y^2-2x-2y+2=0$$

都有可能是圆的方程，因为它们都能化为①的形式．

尝试与发现

分别判断

$$2x^2+2y^2-4x-4y+1=0 \text{ 与 } x^2+y^2-2x-2y+2=0$$

是否是圆的方程，然后总结出 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 是圆的方程的充分条件．

不难想到，一个二元二次方程是否是一个圆的方程，取决于这个方程能否化成圆的标准方程．

因为

$$\begin{aligned}&2x^2+2y^2-4x-4y+1=0\\ \Leftrightarrow\ &x^2+y^2-2x-2y+\frac{1}{2}=0\\ \Leftrightarrow\ &x^2-2x+1+y^2-2y+1=\frac{3}{2}\\ \Leftrightarrow\ &(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

所以上述方程是圆心在(1，1)，半径为 4 ________ 的圆的方程；又因为

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-2x-2y+2=0\\ \Leftrightarrow\ &x^2-2x+1+y^2-2y+1=0\\ \Leftrightarrow\ &(x-1)^2+(y-1)^2=0,\end{aligned}$$

显然，满足上述方程的实数只有 $x=1$，$y=1$，因此不是圆的方程．

一般地，

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\\ \Leftrightarrow\ &x^2+Dx+\left(\frac{D}{2}\right)^2+y^2+Ey+\left(\frac{E}{2}\right)^2=\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F\\ \Leftrightarrow\ &\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4},\end{aligned}$$

因此：

（1）当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程是以 $\left(-\frac{D}{2}，-\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

为半径的圆的方程；

（2）当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，满足方程的实数只有 $x=-\frac{D}{2}$，$y=-\frac{E}{2}$，所以原方程不是圆的方程；

（3）当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程没有实数解，因而原方程也不是圆的方程.

例 2 判断下列方程是否是圆的方程，如果是，写出圆的圆心坐标与半径；如果不是，说明理由：

（1）$x^2+y^2+4x-6y-12=0$；（2）$4x^2+4y^2-8x+4y-15=0$；

（3）$x^2+y^2-6x+10=0$.

解 （1）原方程可以化为

$$x^2+4x+4+y^2-6y+9=25,$$

即 $(x+2)^2+(y-3)^2=25$，所以是圆心坐标为 **5** __________，半径为 5 的圆的方程.

（2）方程两边除以 4，得 $x^2+y^2-2x+y-\frac{15}{4}=0$. 将左边配方，得

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=5,$$

所以是圆心坐标为 $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$，半径为 **6** __________ 的圆的方程.

（3）因为原方程可以化为 $x^2-6x+9+y^2=-1$，即

$$(x-3)^2+y^2=-1,$$

又因为满足上述方程的实数 x，y 不存在，所以原方程不是圆的方程.

练习A

1. 写出下列圆的圆心坐标和半径：

   （1）$x^2+y^2-6x=0$；（2）$2x^2+2y^2-4x+8y+5=0$.

2. 判断下列方程是否是圆的方程，如果是，写出圆的圆心坐标与半径；如果不是，说明理由：

   （1）$x^2+y^2=0$；（2）$x^2+y^2-2x+4y-6=0$；

   （3）$x^2+y^2-2x-2y-3=0$.

3. 判断点 $A(0,\ 0)$，$B(-1,\ 5)$，$C(1,\ -2)$ 与圆 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的位置关系.

练习B

❶ 已知 a，b 为实数，判断 $x^2+y^2+2ax-b^2=0$ 是否是圆的方程，并说明理由.

❷ 已知圆 $x^2+y^2+2x-ay-4=0$ 的半径为 3，求实数 a 的值.

❸ 写出圆 $2x^2+2y^2+3x-ay=0$ ($a\in\mathbf{R}$)的圆心坐标和半径.

❹ 已知坐标原点不在圆 $x^2+y^2-ay+a-1=0$ 的内部，求实数 a 的取值范围.

❺ 求经过 $A(0,\ 0)$，$B(-2,\ 0)$，$C(0,\ 2)$三点的圆的方程.

1 6　　2 -2　　3 -15　　4 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　5 $(-2,\ 3)$　　6 $\sqrt{5}$

2.3.3 直线与圆的位置关系

情境与问题

在日常生活中，可以见到很多有关直线与圆位置关系的形象，如图 2-3-5（1）（2）所示.

（1）　　（2）

图 2-3-5

我们已经知道，在平面直角坐标系中，直线与圆都可以用方程来表示，一个点是否在直线上或圆上，只要看这个点的坐标是否满足它们的方程即可. 那么，能否利用直线与圆的方程来研究它们之间的位置关系呢？

情境中的问题就是本小节要讨论的.

初中几何中曾介绍过：如图 2-3-6（1）所示，直线与圆有两个公共点时，称直线与圆相交，且称直线为圆的割线；如图 2-3-6（2）所示，直线与

圆只有一个公共点时，称直线与圆相切，且称直线为圆的切线，称公共点为切点；如图 2-3-6（3）所示，直线与圆没有公共点时，称直线与圆相离.

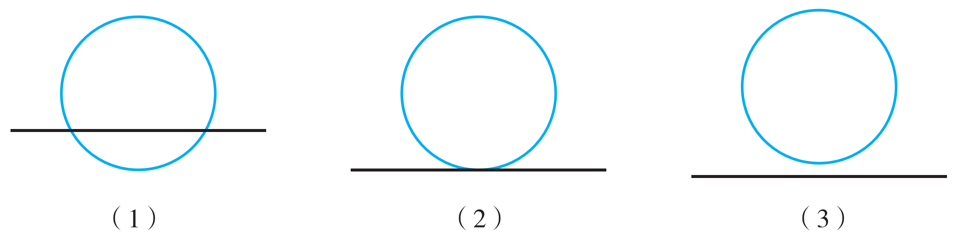


图 2-3-6

尝试与发现

判断直线 l：$y=-x+5$ 与圆 C：$x^2+y^2=12$ 的位置关系，并说明理由.

在平面直角坐标系中作出直线 l 与圆 C，如图 2-3-7 所示，可以看出它们没有公共点，因此直线 l 与圆 C 相离. 作图的方法虽然直观，但是借助计算机作图才会比较精确. 考虑到直线的方程、圆的方程的意义，不难想到，可以借助直线与圆的方程组成的方程组来探讨它们的位置关系.

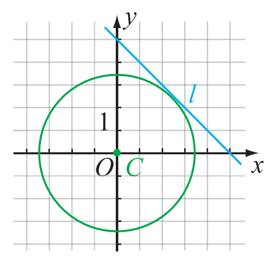


图 2-3-7

因为从方程组

$$\begin{cases} y=-x+5, \\ x^2+y^2=12 \end{cases}$$

中消去 y 可得 $x^2+(-x+5)^2=12$，即

$$2x^2-10x+13=0, \qquad ①$$

又因为 $(-10)^2-4\times2\times13=-4<0$，所以方程①无实数解，这说明方程组也无实数解，因此直线 l：$y=-x+5$ 与圆 C：$x^2+y^2=12$ 没有公共点，从而也就说明了它们相离.

另外，初中几何中，大家根据归纳与试验，曾经总结出下述结论：如图 2-3-8 所示，如果⊙C 的半径为 r，圆心 C 到直线 l 的距离为 d，则

直线 l 与⊙C 相交 $\Leftrightarrow d<r$；

直线 l 与⊙C 相切 $\Leftrightarrow d=r$；

直线 l 与⊙C 相离 $\Leftrightarrow d>r$.

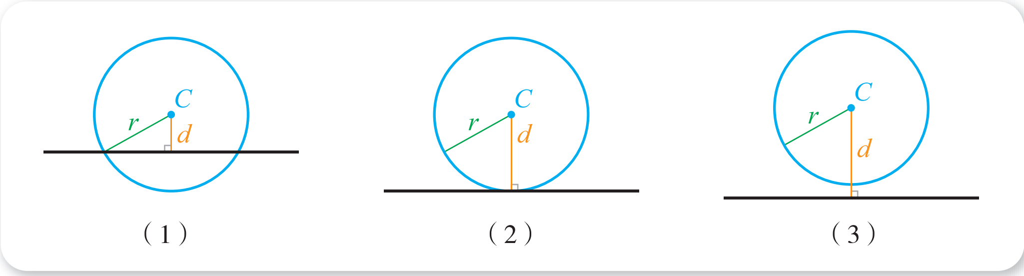


图 2-3-8

因为根据圆的方程与直线的方程能方便地算出圆心到直线的距离，所以我们也可利用这个结论来快速地得到直线与圆的位置关系．例如，前述尝试与发现中的圆心(0，0)到直线 $y=-x+5$ 的距离

$d=$ **1** ________，

而圆的半径为$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，因为 $2\sqrt{3}<\frac{5\sqrt{2}}{2}$，所以直线 $y=-x+5$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 相离．

事实上，利用坐标法，我们能给出初中所得结论的严格证明．

给定平面中的一条直线 l 与⊙C，以⊙C 的圆心为原点，以不垂直于直线 l 的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，如图 2-3-9 所示．设直线 l 的方程为 $y=kx+b$，⊙C 的方程为 $x^2+y^2=r^2$．

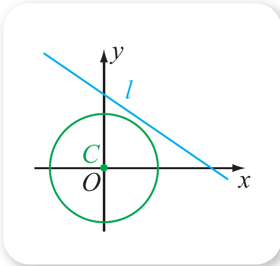


图 2-3-9

从方程组

$$\begin{cases} y=kx+b, \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}$$

中消去 y 可得 $x^2+(kx+b)^2=r^2$，即

$$(1+k^2)x^2+2kbx+b^2-r^2=0, \qquad ②$$

因为方程②的判别式

$$\begin{aligned} \Delta &=(2kb)^2-4(1+k^2)(b^2-r^2) \\ &=4k^2b^2-4b^2+4r^2-4k^2b^2+4k^2r^2 \\ &=4[(1+k^2)r^2-b^2], \end{aligned}$$

所以

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 4[(1+k^2)r^2-b^2]>0 \Leftrightarrow r^2>\frac{b^2}{1+k^2} \Leftrightarrow r>\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}},$$

注意到$\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$表示的正好是圆心(0，0)到直线 $y=kx+b$ 的距离，而 $\Delta>0$ 说明方程②有两个不同的实数解，此时说明原方程组也有两组不同的实数

解，因此当且仅当圆的半径大于圆心到直线的距离时，直线与圆相交.

类似地，可以得到直线与圆相切和相离的充要条件.

例 1 已知直线 $y=x+b$，圆 $x^2+y^2=2$，分别求直线与圆相交、相切、相离时 b 的取值范围.

解 （方法一）联立直线的方程与圆的方程，得方程组

$$\begin{cases} y=x+b, \\ x^2+y^2=2, \end{cases}$$

从方程组中消去 y，整理得

$$2x^2+2bx+b^2-2=0, \qquad ③$$

这个方程的判别式

$$\Delta=(2b)^2-4\times 2(b^2-2)=-4(b+2)(b-2).$$

当且仅当 $-2<b<2$ 时，$\Delta>0$，方程③有两个不相等的实数解，此时直线与圆有两个公共点，直线与圆相交；

当且仅当 $b=2$ 或 $b=-2$ 时，**2** ____________，方程③有两个相等的实数解，此时直线与圆只有一个公共点，直线与圆相切；

当且仅当 $b<-2$ 或 $b>2$ 时，**3** ____________，方程③没有实数解，此时直线与圆没有公共点，直线与圆相离.

（方法二）因为圆的半径 $r=\sqrt{2}$，圆心 $O(0,0)$到直线 $y=x+b$ 的距离为

$$d=\frac{|b|}{\sqrt{2}}.$$

当且仅当 $d<r$，即$\frac{|b|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$，$-2<b<2$ 时，直线与圆相交；

当且仅当 $d=r$，即$\frac{|b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$b=2$ 或 $b=-2$ 时，直线与圆相切；

当且仅当 $d>r$，即$\frac{|b|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$，$b<-2$ 或 $b>2$ 时，直线与圆相离.

例 2 已知 $M(1,2)$是圆 $x^2+y^2=5$ 上一点，求圆的过点 M 的切线方程.

解 （方法一）如果切线的斜率不存在，则切线方程为 $x=1$，但圆心 $O(0,0)$到 $x=1$ 的距离为**4** ____________，不等于圆的半径$\sqrt{5}$，矛盾.

因此切线的斜率一定存在，设为 k，从而切线方程为 $y-2=k(x-1)$，即 $kx-y+2-k=0$，从而由圆心到切线的距离等于圆的半径可知

$$\frac{|2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5},$$

人民教育出版社

解得 $k=$ 5 ______，所以切线的点斜式方程为

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1),$$

因此所求方程为 $x+2y-5=0$.

（方法二）圆的圆心为 O，而且 OM 是与切线垂直的，如图 2-3-10 所示.

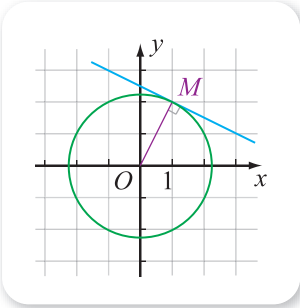


图 2-3-10

因为 $k_{OM}=\frac{2-0}{1-0}=2$，所以切线的斜率为 6 ______，从而可知切线的点斜式方程为

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1),$$

因此所求方程为 $x+2y-5=0$.

例 2 的方法二说明，利用圆的几何性质，有时可以有效地减少运算量.

例 3 已知直线 l：$x+y+2=0$ 与圆 C：$x^2+y^2=9$ 相交于 A，B 两点.

（1）求线段 AB 的长；

（2）求线段 AB 中点的坐标.

解 （1）（方法一）如图 2-3-11 所示，设 AB 的中点为 M，根据垂径定理可知 $OM\perp AB$，因此$\triangle AMO$ 是个直角三角形.

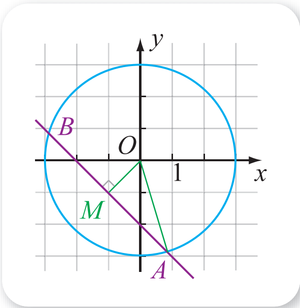


图 2-3-11

由点到直线的距离公式可知

$$|OM|=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2},$$

又 OA 是圆的半径，因此 $|OA|=\sqrt{9}=3$，从而在 $\mathrm{Rt}\triangle AMO$ 中，有

$$|AM|=\sqrt{|OA|^2-|OM|^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}.$$

因此 $|AB|=2|AM|=2\sqrt{7}$.

（方法二）设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则

$$|AB|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

因为 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$都是直线 $x+y+2=0$ 上的点，所以

$$\begin{cases}x_1+y_1+2=0,\\x_2+y_2+2=0,\end{cases}$$

第二式减去第一式可得 $x_2-x_1+y_2-y_1=0$，因此 $y_2-y_1=-(x_2-x_1)$，从而

$$|AB|^2=(x_2-x_1)^2+[-(x_2-x_1)]^2=2(x_2-x_1)^2.$$

又因为从方程组

$$\begin{cases}x+y+2=0,\\ x^2+y^2=9\end{cases}$$

中消去 y，整理可得 $2x^2+4x-5=0$，而且 x_1，x_2 是这个方程的两个根，因此由韦达定理可知

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{4}{2}=-2,\\ x_1x_2=\dfrac{-5}{2}=-\dfrac{5}{2},\end{cases}$$

所以

$$(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2=(-2)^2-4\times\left(-\frac{5}{2}\right)=14,$$

因此 $|AB|^2=2\times14=28$，从而可知 $|AB|=2\sqrt{7}$.

（2）设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，且线段 AB 的中点坐标为 (x_0, y_0)，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

由（1）中的方法二可知

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2}{2}=-1,$$

又因为直线 l 的方程可以化为 $y=-x-2$，所以

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{(-x_1-2)+(-x_2-2)}{2}=-\frac{x_1+x_2}{2}-2=-(-1)-2=-1,$$

因此所求中点坐标为 $(-1, -1)$.

例 3（1）中的方法二以及（2）的解法中，我们设了 A，B 两点的坐标，但是解题过程中并没有实际求出，这种方法在解析几何中通常称为“设而不求”. 请读者结合这个例题，自行总结什么时候可以使用设而不求的方法，使用过程中应该注意些什么，等等.

练习A

1. 已知直线 $2x+y-5=0$ 和圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=6$.

   （1）求圆心到直线的距离 d；　　（2）判断直线与圆的位置关系.

2. 直线 $x-y-1=0$ 与圆 $x^2+y^2=13$ 是否相交？如果相交，求出交点.

3. 判断下列直线与圆的位置关系：

   （1）直线 $4x-3y+6=0$ 与圆 $x^2+y^2-8x+2y-8=0$；

   （2）直线 $2x-y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x+3=0$.

4. 求圆心为坐标原点且与直线 $4x+2y-1=0$ 相切的圆的方程.
5. 已知直线 $y=mx+4$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相切，求 m 的值.

练习B

1. (1) 已知圆 $x^2+y^2=2$，求经过圆上的点 $(-1,1)$ 的切线方程；
   (2) 已知 $M(x_0,y_0)$ 是圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点，求证：过点 M 的圆的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.
2. 当 C 为何值时，直线 $x-y-C=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 有两个公共点、一个公共点、无公共点？
3. 求斜率为 2 且与圆 $x^2+y^2-2y-4=0$ 相切的直线的方程.
4. 已知直线 $x-y+1=0$ 与圆 C：$x^2+y^2-4x-2y+m=0$ 交于 A，B 两点.
   (1) 求线段 AB 的垂直平分线的方程；
   (2) 若 $|AB|=2\sqrt{2}$，求 m 的值；
   (3) 在 (2) 的条件下，求过点 $P(4,4)$ 的圆 C 的切线方程.
5. 求圆 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$ 关于直线 $x-y+1=0$ 对称的圆的方程.

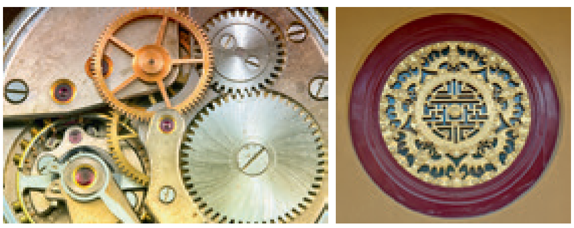
1 $\frac{|5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$　2 $\Delta=0$　3 $\Delta<0$　4 1　5 $-\frac{1}{2}$　6 $-\frac{1}{2}$

2.3.4 圆与圆的位置关系

情境与问题

在日常生活中，可以见到很多有关圆与圆位置关系的形象，如图 2-3-12 (1) (2) 所示.

前面我们已经借助直线与圆的方程研究了它们之间的位置关系，那么能否借助圆的方程来研究圆与圆的位置关系呢？



(1)　　(2)

图 2-3-12

情境中的问题就是本小节要讨论的.

在初中几何内容中，大家曾探究过圆与圆的位置关系，知道圆与圆的位置关系有相离、相切、相交三种：当圆与圆没有公共点时，圆与圆相离；当圆与圆只有一个公共点时，圆与圆相切；当圆与圆有两个公共点时，圆与圆相交.

尝试与发现

判断圆 C_1：$x^2+y^2=2$ 与圆 C_2：$(x-2)^2+y^2=1$ 的位置关系，并说明理由.

在平面直角坐标系中作出圆 C_1 与圆 C_2，如图 2-3-13 所示，可以看出它们有两个公共点，因此圆 C_1 与圆 C_2 相交.

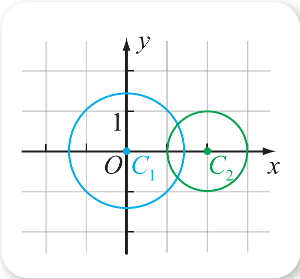


图 2-3-13

因为判断一个点是否在圆上，只要看这个点的坐标是否满足圆的方程，所以我们也可以借助圆与圆的方程组成的方程组来探讨它们的位置关系. 对于上述圆 C_1 与圆 C_2 来说，因为方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=2,\\(x-2)^2+y^2=1\end{cases}$$

的第一式减去第二式可得 $4x-4=2-1$，从而可知 $x=\frac{5}{4}$，将此代入圆 C_1 的方程可得 $\left(\frac{5}{4}\right)^2+y^2=2$，因此 $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$. 这就说明圆 C_1 与圆 C_2 有两个公共点，而且公共点的坐标为

1 ________________________.

从而可知圆 C_1 与圆 C_2 相交.

更进一步，初中几何中还将两个圆的位置关系细分成了 5 种，即外离、外切、相交、内切、内含（如下页图 2-3-14 所示），并且在试验的基础上总结出了根据两个圆的半径 r_1，r_2 以及两个圆的圆心距 d 来判断两个圆位置关系的方法：

两个圆外离 $\Leftrightarrow d>r_1+r_2$；

两个圆外切 $\Leftrightarrow d=r_1+r_2$；

两个圆相交 $\Leftrightarrow |r_1-r_2|<d<r_1+r_2$；

两个圆内切 $\Leftrightarrow d=|r_1-r_2|$；

两个圆内含 $\Leftrightarrow d<|r_1-r_2|$.

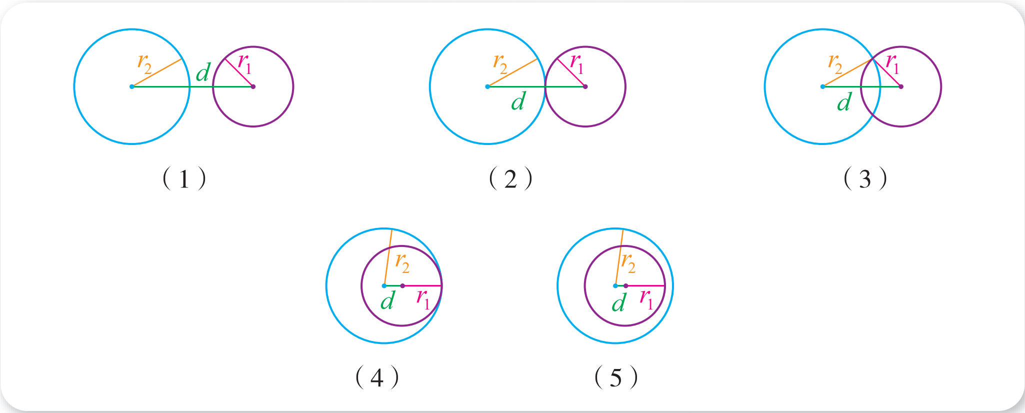


图 2-3-14

因为根据两个圆的方程能方便地算出圆心距，所以我们也可利用这个结论来快速地得到圆与圆的位置关系．例如，前述尝试与发现中圆 C_1 与圆 C_2 的圆心距为$\sqrt{(0-2)^2+(0-0)^2}=2$，而两个圆的半径分别为 1，$\sqrt{2}$，又因为

$$\sqrt{2}-1<2<\sqrt{2}+1,$$

所以圆 C_1 与圆 C_2 相交．

事实上，利用坐标法，我们能给出上述结论的严格证明．

给定平面中的$\odot C_1$ 与$\odot C_2$，以 C_1 为原点，C_1C_2 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，如图 2-3-15 所示．此时，设两圆的圆心距为 d，则$\odot C_2$ 的圆心坐标为$(d，0)$，设两圆的方程分别为 $x^2+y^2=r_1^2$，$(x-d)^2+y^2=r_2^2$，将它们联立，得方程组

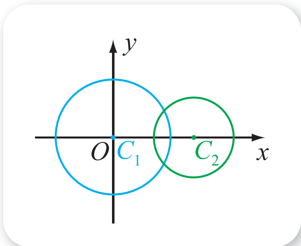


图 2-3-15

$$\begin{cases} x^2+y^2=r_1^2, \\ (x-d)^2+y^2=r_2^2, \end{cases}$$

第一式减去第二式，整理可得 $x=\dfrac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}$，将 x 的值代入 $x^2+y^2=r_1^2$，可得

$$\begin{aligned} y^2 &= r_1^2-\frac{(r_1^2-r_2^2+d^2)^2}{4d^2} \\ &= \frac{(2dr_1+r_1^2-r_2^2+d^2)(2dr_1-r_1^2+r_2^2-d^2)}{4d^2} \\ &= \frac{[(r_1+d)^2-r_2^2][r_2^2-(r_1-d)^2]}{4d^2} \\ &= \frac{(r_1+r_2+d)(r_1-r_2+d)(r_1+r_2-d)(r_2-r_1+d)}{4d^2} \end{aligned}$$

$$=\frac{[(r_1+r_2)^2-d^2][d^2-(r_1-r_2)^2]}{4d^2}.$$

因此，当且仅当

$$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$$

时，有两个不同的实数 y 满足方程组，从而圆 C_1 与圆 C_2 相交.

其他情况可类似得到.

例 1 分别判断下列两个圆的位置关系：

（1）C_1：$(x-1)^2+y^2=4$，C_2：$(x-2)^2+(y+1)^2=2$；

（2）C_1：$x^2+y^2-2y=0$，C_2：$x^2+y^2-2\sqrt{3}x-6=0$.

解 （1）由方程可知圆 C_1 的圆心为$(1,\ 0)$，半径 $r_1=2$；圆 C_2 的圆心为 2 ______，半径 $r_2=$ 3 ______.

因此两圆的圆心距

$$d=\sqrt{(2-1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2},$$

又因为 $2-\sqrt{2}<\sqrt{2}<2+\sqrt{2}$，所以 $r_1-r_2<d<r_1+r_2$，从而两个圆相交.

（2）将两圆的方程化为标准方程，分别为

$$x^2+(y-1)^2=1^2,\quad (x-\sqrt{3})^2+y^2=3^2,$$

由此可知圆 C_1 的圆心为$(0,\ 1)$，半径 $r_1=1$；圆 C_2 的圆心为 4 ______，半径 $r_2=$ 5 ______.

因此两圆的圆心距

$$d=\sqrt{(0-\sqrt{3})^2+(1-0)^2}=2,$$

又因为 $3-1=2$，所以 $r_2-r_1=d$，从而可知两圆内切.

例 2 判断圆 C_1：$x^2+y^2=4$ 与圆 C_2：$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 的位置关系，如果相交，求出它们交点所在的直线的方程.

解 两圆的圆心距为

$$\sqrt{(0-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5},$$

又因为 $2-1<\sqrt{5}<2+1$，所以圆 C_1 与圆 C_2 相交.

解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\(x-2)^2+(y-1)^2=1,\end{cases}$$

可得$\begin{cases}x=2,\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{6}{5},\\y=\dfrac{8}{5}.\end{cases}$因此两圆的交点为$(2,\ 0)$，$\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$，从而可以求得交点所在的直线方程为

$$2x+y-4=0.$$

例 2 中直线的方程也可按如下方法得到：设圆 C_1 与圆 C_2 的交点为 A，B，则 A，B 的坐标都满足方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\(x-2)^2+(y-1)^2=1,\end{cases}$$

将方程组的第一式减去第二式，整理可得

$$2x+y-4=0.$$

显然，A，B 的坐标都满足上式，又因为两点能确定一条直线，所以上式就是所求直线的方程.

探索与研究

同时与两个圆相切的直线称为两圆的公切线，探索平面内两个圆的公切线条数与它们的位置有什么关系，并求出圆 C_1：$x^2+y^2=2$ 与圆 C_2：$(x-2)^2+y^2=8$ 的公切线.

练习A

1. 求圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 的交点的坐标.
2. 分别指出下列两圆的位置关系（外离、外切、相交、内切、内含）：
   (1) $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ 和 $x^2+y^2+12x+6y-19=0$；
   (2) $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 和 $x^2+y^2-4x-6y-3=0$.
3. 求圆心在$(3,4)$且与圆 $x^2+y^2=1$ 外切的圆的方程.
4. 已知圆 C：$(x-2)^2+y^2=9$，求圆心在坐标原点且与圆 C 内切的圆的方程.
5. 已知圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 与圆 C_2：$x^2+y^2+2ax+2ay+2a^2-1=0$ 外切，求实数 a 的值.

练习B

1. 已知圆 $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-14y+k=0$，求这两个圆分别外离、外切、相交、内切、内含时，实数 k 的取值范围.
2. 已知圆 $x^2+y^2=1$ 与圆$(x+4)^2+(y-a)^2=25$ 相切，求实数 a 的值.
3. 已知圆 C_1：$x^2+y^2=2$ 与圆 C_2：$(x-2)^2+y^2=8$ 相交于 A，B 两点，求 AB 的中点的坐标.
4. 已知圆 C_1：$x^2+y^2+6x=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2+6y=0$ 相交，求这两个圆的公共弦长.

1 $\left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$，$\left(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$　2 $(2, -1)$　3 $\sqrt{2}$　4 $(\sqrt{3}, 0)$　5 3

习题2-3A

1. 若 $P(x, y)$ 是圆 C：$(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 上的任意一点，求 $P(x, y)$ 到原点的距离的最大值和最小值.
2. 求圆 $x^2+y^2+2x-2ay-4=0$ $(a\in\mathbf{R})$ 的半径的最小值.
3. 判断直线 $4x-3y+6=0$ 与圆 $(x-4)^2+(y+1)^2=25$ 的位置关系.
4. 若 $P(x, y)$ 是圆 C：$(x-3)^2+y^2=1$ 上的任意一点，求 $P(x, y)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离的最大值和最小值.
5. 已知圆 C_1：$x^2+y^2+6x-4=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2+8y-28=0$ 相交，求交点所在直线的方程.
6. 已知某 400 m 标准跑道的内圈如图所示，其中左右两边均是半径为 36 m 的半圆弧.（设 400 m 标准跑道最内圈周长为 400 m.）

（第 6 题）

（1）求每条直道的长度；

（2）建立平面直角坐标系 xOy，写出该跑道内圈上半部分对应的函数解析式.

习题2-3B

1. 求过点 $(8, 1)$ 且与两坐标轴都相切的圆的方程.
2. 求通过圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ 上的一点 $A(6, 8)$ 所作该圆的切线方程.
3. 已知 $a>0$，且

$$圆\ C_1：x^2+y^2-2ax-2y+a^2-15=0，$$

$$圆\ C_2：x^2+y^2-4ax-2y+4a^2=0.$$

分别求这两圆外离、外切、相交、内切、内含时，实数 a 的取值范围.

4. 求圆心在 y 轴上，经过点 $(-2, 2)$ 且与 x 轴相切的圆的方程.
5. 求经过圆 $(x-2)^2+y^2=16$ 内一点 $(1, 1)$ 且被圆截得弦长最短的直线的方程.
6. 已知 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 是圆的一条直径的两个端点，证明圆的方程是

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

7 已知圆 C 和 y 轴相切，圆心在直线 $x-3y=0$ 上，且在直线 $y=x$ 上截得的弦长为 $2\sqrt{7}$，求圆 C 的方程.

习题2-3C

1 已知$\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$AC=2BC$，求$\triangle ABC$ 的面积的最大值.

2 已知$\triangle ABC$ 的面积为 S，外接圆的半径为 R，且$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，用坐标法证明

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

2.4　曲线与方程

1. 曲线的方程与方程的曲线

前面我们学习了直线与圆的方程，知道平面直角坐标系中的一个点在直线或圆上的充要条件是它的坐标满足直线或圆的方程. 我们还借助直线与圆的方程讨论了直线与直线、直线与圆、圆与圆的位置关系. 不难想到，借助方程，应该还可以讨论平面内的其他几何对象及其性质等.

尝试与发现

（1）如图 2-4-1 所示，设 l_1，l_2 是平面内两条互相垂直的直线，且 M 是所有到 l_1，l_2 的距离相等的点组成的集合，在图 2-4-1 中找出 M 中的所有元素. 如果以 l_1，l_2 分别为坐标轴建立平面直角坐标系，那么 M 中的点的坐标有什么特点？

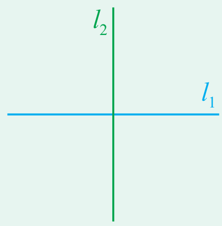


图 2-4-1

（2）将 $|y|=|x|$ 看成 x 与 y 的方程，如果 $x=a$ 且 $y=b$（a，b 为实数）能使方程 $|y|=|x|$ 成立，则称 (a, b) 是方程 $|y|=|x|$ 的一组实数解，你能找出满足这个方程的 3 组实数解吗？这个方程有多少组实数解？如果将每一组实数解都看成平面直角坐标系中的一点，那么所有实数解表示的点组成的集合与（1）中的集合 M 有什么关系？

根据角平分线的性质可知 M 是直线 l_1，l_2 所形成的四个角的角平分线上的点组成的集合（包括 l_1 与 l_2 的交点），建立如图 2-4-2 所示的平面直角坐标系.

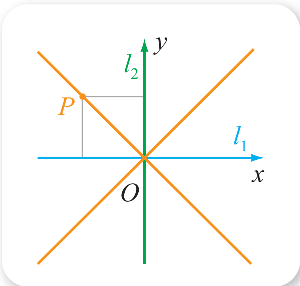


图 2-4-2

一方面，如果点 $P(x, y)$ 在集合 M 中，即在第一、三象限或第二、四象限的角平分线上，则它的坐标 x，y 必须满足

$$|y|=|x|. \quad ①$$

另一方面，如果 (x, y) 是方程①的解，则点 (x, y) 一定在第一、三象限或第二、四象限的角平分线上，即都在集合 M 中. 例如，$(0, 0)$，$(1, 1)$，$(-2, 2)$，$(-3, -3)$ 所表示的点都在集合 M 中.

因此，方程$|y|=|x|$的所有解表示的点的集合就是集合M，也就是第一、三象限和第二、四象限的角平分线构成的曲线，一般地，这一曲线称为方程$|y|=|x|$的曲线，方程$|y|=|x|$称为这一曲线的方程.

一般地，在平面直角坐标系中，如果曲线C与方程$F(x, y)=0$之间具有如下关系：

（1）曲线C上的点的坐标都是方程$F(x, y)=0$的解；

（2）以方程$F(x, y)=0$的解为坐标的点都在曲线C上.

则称曲线C为**方程$F(x, y)=0$的曲线**，方程$F(x, y)=0$为**曲线C的方程**.

这就是说，如果曲线C的方程是$F(x, y)=0$，且$P(x, y)$是平面直角坐标系中的任意一点，则

$$P(x, y)\in C \Leftrightarrow F(x, y)=0.$$

因此，方程$F(x, y)=0$可用来描述曲线C的特征性质，曲线C用集合的特征性质描述法，可以描述为$C=\{P(x, y)\mid F(x, y)=0\}$.

同前面一样，以后我们将不再区分曲线及其方程，因此可以说曲线$F(x, y)=0$等.

前面我们学习的直线与圆，都可以看成特殊的曲线，因此直线的方程与圆的方程都是曲线方程的特殊形式. 另外，尝试与发现中的集合M可以看成曲线，按照上述定义可知，M的方程是$|y|=|x|$，且

$$M=\{P(x, y)\mid |y|=|x|\}.$$

需要注意的是，有些函数的解析式可以看成一种特殊的方程，此时，解析式与函数图象之间的关系，实际上是方程与曲线的关系. 例如，若一次函数$y=3x+1$的图象是直线l，就说明把一次函数看成方程$3x-y+1=0$时，这个方程对应的曲线就是直线l. 不过，曲线的方程并不一定是函数，例如，圆的方程$x^2+y^2=1$中，y不是x的函数，x也不是y的函数.

例 1 已知平面直角坐标系中，C是端点为原点且其他所有点都在x轴正半轴上的射线，判断$y=0$以及$y=0\ (x>0)$是否是C的方程，如果都不是，写出C的方程.

解 可以看出，C上的点的纵坐标必为0，即如果$P(x, y)$为C上的点，则必有$y=0$；另一方面，纵坐标为0的点，当横坐标小于0时，在x轴的负半轴上，不在C上. 因此$y=0$不是C的方程.

类似地，因为C上的点的横坐标大于等于0，所以C上的点$(0, 0)$不满足方程$y=0\ (x>0)$，因此这也不是C的方程.

由上述分析可知，C的方程是

$$y=0\ (x\geqslant 0).$$

例 1 说明，曲线的方程的定义中，（1）与（2）缺一不可，而且两者是对曲线上的任意一点以及方程的任意一组实数解而言的. 从集合的角度来看，设 A 是曲线 C 上的所有点组成的点集，B 是所有以方程 $F(x,\ y)=0$ 的实数解为坐标的点组成的点集，则由定义中的（1）可知 $A\subseteq B$，由定义中的（2）可知 1 __________；同时具有关系（1）和（2），就有 $A=B$.

例 2 已知曲线 C_1 的方程是 $x^2-y=0$，曲线 C_2 的方程是 $|y|=|x|$，判断 C_1 与 C_2 是否有交点. 如果有，求出交点坐标；如果没有，说明理由.

分析 由曲线的方程的定义可知，一个点是两条曲线的交点的充要条件是，该点的坐标是这两条曲线的方程的公共实数解，因此可以通过解方程组来判断两条曲线是否有交点.

解 联立两个方程得方程组

$$\begin{cases}x^2-y=0,\\|y|=|x|,\end{cases}$$

解方程组可得 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=1.\end{cases}$

因此 C_1 与 C_2 有三个交点，且交点坐标为

2 ____________________.

例 2 说明，曲线 $F(x,\ y)=0$ 与 $G(x,\ y)=0$ 是否有交点的问题，可以转化为方程组

$$\begin{cases}F(x,\ y)=0,\\G(x,\ y)=0\end{cases}$$

是否有实数解的问题.

2. 求曲线的方程与根据方程研究曲线的性质

从直线、圆以及上述内容中可以看出，得到曲线的方程之后，可以借助方程来研究曲线的性质以及曲线之间的关系等. 因此，如何得到曲线的方程是用这种方法解决问题的第一步.

尝试与发现

已知 l_1，l_2 是平面内两条互相垂直的直线，且曲线 C 是到 l_1，l_2 的距离的乘积等于 1 的点组成的集合.

（1）建立适当的平面直角坐标系，写出曲线 C 的方程；

（2）根据曲线 C 的方程，说出曲线 C 具有的性质，然后作出曲线 C.

如果以 l_1 与 l_2 分别为 x 轴与 y 轴建立平面直角坐标系，设 $P(x, y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点，则 P 到 x 轴的距离为 $|y|$，到 y 轴的距离为 3 ________. 因此 $P(x, y)$ 在曲线 C 上的充要条件是

$$|y||x|=1. \qquad ②$$

因此，②就是曲线 C 的方程.

另一方面：

(1) $x=0$ 或 $y=0$ 时，方程②不可能成立，这说明曲线 C 与两坐标轴都没有交点.

(2) 如果 (x, y) 是方程②的一组解，则 $(-x, y)$ 也是方程②的一组解，又因为 $(-x, y)$ 与 (x, y) 关于 y 轴对称，这说明曲线 C 关于 y 轴对称. 类似地，可知曲线 C 关于 x 轴以及原点都对称.

(3) 由于 $|y||x|=1$，所以 $|x|$ 越来越大时，$|y|$ 越来越小且接近于 0；$|x|$ 越来越小且接近于 0 时，$|y|$ 越来越大.

为了作出曲线 C，根据上述性质 (2)，可以先作出曲线 C 在第一象限内的部分，然后根据对称性作出其他部分，而第一象限内的部分可以由描点作图作出，如下表和图 2-4-3 所示.

x	…	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	…
y	…	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	…

就像直线可以看成动点做直线运动的轨迹、圆可以看成动点做圆周运动的轨迹一样，曲线一般都可以看成动点依某种条件运动的轨迹，所以曲线的方程也常称为满足某种条件的点的轨迹方程.

例如，尝试与发现中的曲线 C，可以看成动点 M 的运动轨迹，且动点 M 到 l_1，l_2 的距离的乘积等于 1，因此动点 M 的轨迹方程就是 $|y||x|=1$.

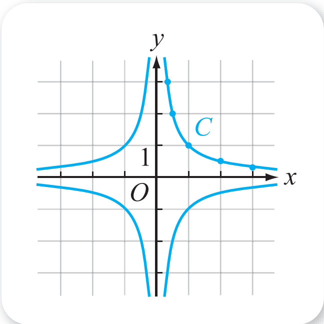


图 2-4-3

例 3 已知动点 M 到 $A(1, 2)$ 的距离与到 $B(3, 6)$ 的距离相等，求 M 的轨迹方程，并指出轨迹曲线的形状.

解 设 M 的坐标为 (x, y)，依照条件可知 $|MA|=|MB|$. 由两点之间的距离公式可知

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2},$$

两边平方并化简，得 $x+2y-10=0$.

可以检验，上式就是 M 的轨迹方程，因此轨迹曲线是直线.

利用类似例 3 的方法，实际上可以证明我们在初中归纳出的结论：平面上所有到线段两端点的距离相等的点组成一条直线，而且这条直线是线段的垂直平分线.

例 4 已知动点 M 到 $O(0, 0)$ 的距离与到 $A(3, 0)$ 的距离之比是 $\frac{1}{2}$，求 M 的轨迹方程，并指出轨迹曲线的形状.

解 设 M 的坐标为 (x, y)，依照条件可知 $\frac{|MO|}{|MA|}=\frac{1}{2}$.

由两点之间的距离公式可知，上式可用坐标表示为

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\frac{1}{2},$$

两边平方并化简，得 $x^2+y^2+2x-3=0$.

可以检验，上式就是 M 的轨迹方程.

又因为将轨迹方程左边配方，可得 $(x+1)^2+y^2=4$，所以可知轨迹曲线是圆心为 4 ________ 且半径为 5 ________ 的圆.

例 3、例 4 实际上是在不知道轨迹曲线形状的前提下，通过用代数等式表示几何条件，求出了轨迹方程（即曲线的方程），从而明确了曲线的形状，更进一步，还可以研究曲线的性质，这都是坐标法以及解析几何的优点. 从这两个例题中也可以看出求动点 M 轨迹方程的一般步骤：

（1）设动点 M 的坐标为 (x, y)（如果没有平面直角坐标系，需先建立）；

（2）写出 M 要满足的几何条件，并将该几何条件用 M 的坐标表示出来；

（3）化简并检验所得方程是否为 M 的轨迹方程.

习题2-4A

1. 判断 $P(\sqrt{3}, 0)$，$Q(-2, 3)$ 是否在方程 $4x^2+3y^2=12$ 的曲线上.
2. 已知方程 $(x+2)^2+(y-3)^2=r^2$ 的曲线通过点 $(-1, 5)$，求 r^2 的值.
3. 到两坐标轴距离相等的点组成的轨迹的方程是 $x-y=0$ 吗？为什么？
4. 判断直线 $2x+5y-15=0$ 与曲线 $y=-\frac{10}{x}$ 是否相交，如果相交，求出交点的坐标.
5. 设 $A(-1, -1)$，$B(3, 7)$，求线段 AB 的垂直平分线的方程.
6. 求到 y 轴的距离等于 4 的点的轨迹的方程.

习题2-4B

1. 求到两定点 $A(-1,\ 2)$，$B(3,\ 2)$的距离之比为$\sqrt{2}$的点的轨迹方程.
2. 已知 A，B 是平面上两个定点，$AB=6$，动点 M 满足条件 $\overrightarrow{MA}\cdot(2\overrightarrow{MB})=-1$，求点 M 的轨迹方程.
3. 已知动点 M 到点$(a,\ 0)$的距离等于到点$(b,\ 0)$的距离的 2 倍（其中 $a\neq b$），求点 M 的轨迹方程，并指出轨迹曲线的形状.
4. 已知动点 M 到 x 轴的距离与到点 $F(0,\ 4)$的距离相等，求点 M 的轨迹方程，并根据方程给出轨迹曲线的一些性质.
5. 已知点 $B(-2,\ 1)$和点 $C(3,\ 2)$，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 以 BC 为斜边，求直角顶点 A 的轨迹方程.
6. 已知点 M 到两条互相垂直的直线的距离的平方和等于常数 k（$k>0$），求点 M 的轨迹方程，并根据方程研究曲线的性质.
7. 求通过圆 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+y^2-4x-4y-1=0$ 的交点，并且过点$(2,\ -1)$的圆的方程.

习题2-4C

1. 已知圆 C_1：$x^2+y^2+6x-16=0$，C_2：$x^2+y^2-4x-5=0$. 求证：对任意不等于-1 的实数 λ，方程
$$x^2+y^2+6x-16+\lambda(x^2+y^2-4x-5)=0$$
是通过两个已知圆交点的圆的方程.
2. 已知 A，B 是平面内的两点，且 $AB=6$，分别判断平面内满足下列条件的动点 P 是否存在，并说明理由.
(1) $|PA|+|PB|=6$；　(2) $|PA|-|PB|=6$；　(3) $|PB|-|PA|=6$；
(4) $|PA|+|PB|=3$；　(5) $|PB|-|PA|=7$.
3. 已知 A，B 是平面内的两点，且$|AB|=6$，用坐标法判断平面内满足下列条件的动点 P 是否存在. 如果存在，求出轨迹方程；如果不存在，说明理由.
(1) $|PA|^2+|PB|^2=36$；　(2) $|PA|^2+|PB|^2=10$.

1 $B\subseteq A$　2 $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$　3 $|x|$　4 $(-1,\ 0)$　5 2

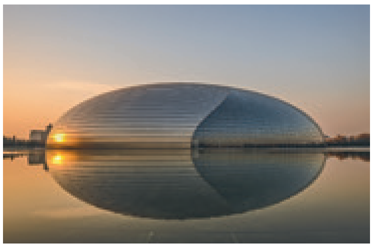
人民教育出版社

2.5 椭圆及其方程

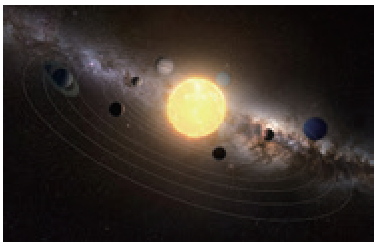
2.5.1 椭圆的标准方程

情境与问题

在日常生活与学习中，可以见到很多有关椭圆的形象，如图 2-5-1（1）（2）所示.



（1）



（2）

图 2-5-1

我们还知道，圆是平面内到圆心的距离等于半径的点的集合，圆上的点的特征是：任意一点到圆心的距离都等于半径. 那么，你能说说到底什么是椭圆吗？椭圆上任意一点的特征是什么？

椭圆给人的印象是“压扁的圆”，但这不是数学上椭圆的定义，事实上：如果 F_1，F_2 是平面内的两个定点，a 是一个常数，且 $2a>|F_1F_2|$，则平面内满足

$$|PF_1|+|PF_2|=2a$$

的动点 P 的轨迹称为**椭圆**，其中，两个定点 F_1，F_2 称为**椭圆的焦点**，两个焦点之间的距离 $|F_1F_2|$ 称为**椭圆的焦距**. 另外，从本章导语中可以看出，椭圆也可以通过用平面截圆锥面得到，因此椭圆是一种圆锥曲线.

尝试与发现

你能利用日常生活中的物品作出一个椭圆吗？

如图 2-5-2 所示，在平的画板上取两个定点 F_1 和 F_2，在这两个点上都钉上一个图钉，将一条长度大于 $|F_1F_2|$ 的细绳的两端固定在两个图钉上，用笔尖把细绳拉紧，并使笔尖在画板上慢慢移动一周，则画出的图形是一个椭圆.

这种作椭圆的方法实际上是验证了椭圆定义中的 P 点一定存在而且有无数多个. 那么，从数学上能不能证明这一点呢?

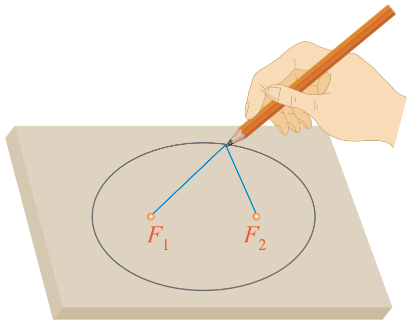


图 2-5-2

尝试与发现

设 F_1，F_2 是平面内的两个定点，$|F_1F_2|=8$，证明平面上满足

$$|PF_1|+|PF_2|=10$$

的动点 P 有无数多个，并求 P 的轨迹方程.

不难想到，可以通过坐标法来探讨上述满足条件的 P 点是否存在.

以 F_1F_2 所在直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy，设椭圆的焦点分别为 $F_1(-4,\ 0)$，$F_2(4,\ 0)$.

设 P 的坐标为 $(x,\ y)$，因为 $|PF_1|+|PF_2|=10$，而且 $|PF_1|=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$，$|PF_2|=$ 1 __________，所以

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=10. \qquad ①$$

当 $x\neq0$ 时，$\sqrt{(x+4)^2+y^2}\neq\sqrt{(x-4)^2+y^2}$，此时，由①得

$$\frac{(x+4)^2+y^2-[(x-4)^2+y^2]}{\sqrt{(x+4)^2+y^2}-\sqrt{(x-4)^2+y^2}}=10,$$

整理得

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}-\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\frac{8}{5}x. \qquad ②$$

①+②整理得

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}=5+\frac{4}{5}x, \qquad ③$$

将③式平方，再整理得

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1. \qquad ④$$

当 $x=0$ 时，由①可知 $2\sqrt{4^2+y^2}=10$，即 $y^2=9$，此时④也成立.

可以验证，如果 P 的坐标 $(x,\ y)$ 满足④式，则可得 $|PF_1|+|PF_2|=10$.

不难看出，方程④有无穷多组实数解，这说明坐标满足 $|PF_1|+|PF_2|=10$

人民教育出版社

的点有无数多个，而且 P 的轨迹方程为④式.

一般地，如果椭圆的焦点为 F_1 和 F_2，焦距为 $2c$，而且椭圆上的动点 P 满足

$$|PF_1|+|PF_2|=2a,$$

其中 $a>c>0$. 则以 F_1F_2 所在直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，如图 2-5-3 所示. 此时，椭圆的焦点分别为 $F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$.

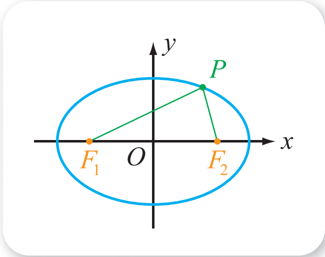


图 2-5-3

设 $P(x,\ y)$是椭圆上任意一点，则 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，因为 $|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|PF_2|=$ 2 ________，所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \quad ⑤$$

当 $x\neq 0$ 时，$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\neq\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，由⑤得

$$\frac{(x+c)^2+y^2-[(x-c)^2+y^2]}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=2a,$$

整理得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{2c}{a}x. \quad ⑥$$

⑤+⑥整理得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x, \quad ⑦$$

将⑦式平方，再整理得

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2. \quad ⑧$$

当 $x=0$ 时，由⑤可知 $2\sqrt{c^2+y^2}=$ 3 ________，此时⑧也成立.

因为 $a>c>0$，所以 $a^2-c^2>0$，设

$$a^2-c^2=b^2$$

且 $b>0$，则⑧式可化为

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).} \quad ⑨$$

可以验证，方程⑨就是椭圆的方程，通常称为**焦点在 x 轴上的椭圆的标准方程**.

尝试与发现

设椭圆的焦点为 F_1 和 F_2，焦距为 $2c$，而且椭圆上的动点 P 满足

$$|PF_1|+|PF_2|=2a,$$

其中 $a>c>0$. 以 F_1F_2 所在直线为 y 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 x 轴，建立平面直角坐标系，如图 2-5-4 所示. 此时：

（1）椭圆焦点的坐标分别是什么？

（2）能否通过⑨式来得到此时椭圆方程的形式？

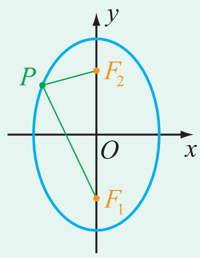


图 2-5-4

显然，此时椭圆的焦点是 $F_1(0,\ -c)$，$F_2(0,\ c)$，而且只要将方程⑨中的 x 与 y 互换，就可以得到椭圆的方程为

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0),} \qquad ⑩$$

其中 $b^2=a^2-c^2$. 这个方程通常称为**焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程**.

由上可以看出，椭圆的标准方程由 a，c 以及焦点的位置确定，其中 $a>c>0$. 如不特别声明，以后总认为椭圆有相应的 a，c 值以及 b 值，其中

$$b=\sqrt{a^2-c^2}.$$

而且谈到椭圆的标准方程时，指的总是⑨⑩这两种形式之一.

例 1 分别求满足下列条件的椭圆的标准方程：

（1）两个焦点分别是 $F_1(-3,\ 0)$，$F_2(3,\ 0)$，椭圆上的点 P 到两焦点的距离之和等于 8；

（2）两个焦点分别是 $F_1(0,\ -4)$，$F_2(0,\ 4)$，并且椭圆经过点 $(\sqrt{3},\ -\sqrt{5})$.

解 （1）由已知得 $2a=8$，因此 $a=4$. 又因为 $c=$ **4** ________，所以

$$b^2=a^2-c^2=4^2-3^2=7,$$

因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1.$$

（2）因为椭圆的焦点在 y 轴上，设它的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

由已知得 $c=$ **5** ________. 又因为 $c^2=a^2-b^2$，所以 $a^2=b^2+16$.

因为点 $(\sqrt{3},\ -\sqrt{5})$ 在椭圆上，所以 $\dfrac{(-\sqrt{5})^2}{a^2}+\dfrac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1$，即

人民教育出版社

$$\frac{5}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1.$$

从而有

$$\frac{5}{b^2+16}+\frac{3}{b^2}=1,$$

解得 $b^2=4$ 或 $b^2=-12$（舍去）.

因此 $a^2=4+16=20$，从而所求椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{4}=1.$$

例 1 的（2）中，也可以根据椭圆的定义，由点$(\sqrt{3}，-\sqrt{5})$与焦点 F_1，F_2 的距离的和等于 $2a$ 来求出 a 的值，然后再得到椭圆的标准方程，请读者自行尝试.

例 2 已知 B，C 是平面内的两个定点，$|BC|=8$，且平面内$\triangle ABC$ 的周长等于 18，求这个三角形的顶点 A 的轨迹方程.

分析 由$\triangle ABC$ 的周长等于 18 且$|BC|=8$，可知点 A 到B，C 两个定点的距离之和总是等于 10，因此点 A 一定在以 B，C 为焦点的椭圆上.

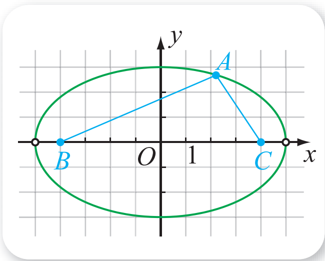


图 2-5-5

解 以 BC 所在的直线为 x 轴，线段 BC 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy，如图 2-5-5 所示.

由$|BC|=8$，可知 $B(-4，0)$，$C(4，0)$. 又因为$|AB|+|AC|+|BC|=18$，所以

$$|AB|+|AC|=10.$$

从而点 A 在以 B，C 为焦点的椭圆上，而且这个椭圆上的点与两焦点的距离之和 $2a=10$，又焦距 $2c=$ 6 ________，因此 $a=5$，$c=4$. 从而

$$b^2=a^2-c^2=25-16=9.$$

因此点 A 的坐标必须满足$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，再注意到因为是三角形，所以 A，B，C 三点不能共线，因此可知点 A 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\ (y\neq 0).$$

拓展阅读

倾斜的试管液面轮廓一定是椭圆

在化学课上，你一定曾注意到，当装有液体的试管稍微倾斜一点时，液面的轮廓是椭圆形的，如图 1 所示.

图 1

你知道怎样利用有关的数学知识证明这一点吗？

如图 2 所示，假设平面 α 与圆柱相交，而且平面 α 不与圆柱的轴垂直，我们需要证明的是：平面 α 与圆柱表面的交线 C 是一个椭圆.

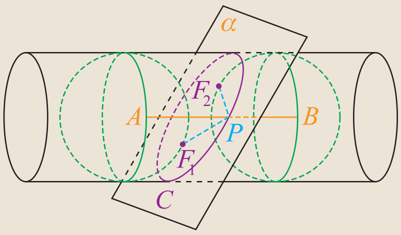


图 2

取半径与圆柱底面半径相同的两个球，从平面 α 的两侧放入圆柱面内（这两个球都称为圆柱面的内切球），并使得两个球都与平面 α 相切，切点分别为 F_1，F_2.

设 P 为交线 C 上任意一点，过 P 作圆柱的母线，分别与两个球相切于 A，B. 可以看出，PF_1 与 PA 是同一个球的两条切线，PF_2 与 PB 也是同一个球的两条切线，因此

$$|PF_1|=|PA|,\ |PF_2|=|PB|,$$

从而

$$|PF_1|+|PF_2|=|PA|+|PB|=|AB|,$$

又因为 AB 的值是不变的，所以 P 到 F_1 与 F_2 的距离之和是一个常数，且 $|AB|>|F_1F_2|$，这就证明了 C 是一个椭圆！

有意思的是，利用类似的方法还能证明我们在本章导语中所提到的结论，即利用平面截圆锥面能得到椭圆、双曲线、抛物线，感兴趣的同学请查阅有关资料进一步了解吧！

练习A

1. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的两个焦点为 F_1，F_2，且 P 为椭圆上一点，求 $|PF_1|+|PF_2|$ 的值.
2. 设 M 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点，F_1，F_2 是椭圆的焦点，如果点 M 到焦点 F_1 的距离为 4，那么点 M 到焦点 F_2 的距离是多少？
3. 分别根据下列条件，求椭圆的标准方程：

   (1) $a=\sqrt{3}$，$b=1$，焦点在 x 轴上；

   (2) $b=3$，经过点 $(0,\ -4)$，焦点在 y 轴上.

4 求下列方程表示的椭圆的焦点坐标：

（1）$\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{12}=1$；（2）$2x^2+4y^2=1$.

5 已知椭圆的两个焦点分别为 $F_1(-4,0)$ 和 $F_2(4,0)$，再添加什么条件，可使得这个椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$？

练习B

1 分别根据下列条件，求椭圆的标准方程：

（1）一个焦点坐标为 $(-5,0)$，且椭圆上的点到两焦点的距离之和是 26；

（2）一个焦点坐标为 $(0,2\sqrt{3})$，且椭圆经过点 $(-\sqrt{6},\sqrt{5})$.

2 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的两个焦点为 F_1，F_2，椭圆上的点 D，E 满足 D，E，F_2 三点共线，求 $\triangle F_1DE$ 的周长.

3 求经过 $P(-3,0)$，$Q(0,2)$ 两点的椭圆的标准方程.

4 求过点 $(3,-2)$ 且与椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 有相同焦点的椭圆的标准方程.

5 已知曲线 l：$x^2+y^2=4$ $(y\neq 0)$，从曲线上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP'，P' 为垂足，求线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程.

1 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}$ 2 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 3 $2a$ 4 3 5 4 6 8

2.5.2 椭圆的几何性质

1. 椭圆的几何性质

下面我们由椭圆的方程来研究椭圆具有的几何性质.

尝试与发现

已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，根据这个方程完成下列任务：

（1）观察方程中 x 与 y 是否有取值范围，由此指出椭圆 C 在平面直角坐标系中的位置特征；

(2) 指出椭圆 C 是否关于 x 轴、y 轴、原点对称；

(3) 指出椭圆 C 与坐标轴是否有交点，如果有，求出交点坐标.

因为实数的平方是一个非负数，所以在方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 中，必有 $\frac{x^2}{4}\leqslant 1$，即 $-2\leqslant x\leqslant 2$. 同理可得，**1** ________. 因此，椭圆 C 位于直线 $x=-2$，$x=2$，$y=-1$，$y=1$ 所围成的矩形内，如图 2-5-6 所示.

又因为如果 (x, y) 是方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的一组解，则不难看出，$(-x, y)$，$(x, -y)$，$(-x, -y)$ 都是方程的解，这说明椭圆 C 关于 y 轴、x 轴、坐标原点对称，这也可从图 2-5-6 中看出来.

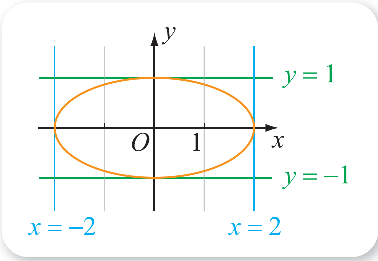


图 2-5-6

在方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 中，令 $y=0$，得 $x=-2$ 或 $x=2$，可知椭圆 C 与 x 轴有两个交点，且交点坐标分别为 $(-2, 0)$，$(2, 0)$；令 $x=0$，得 **2** ________，可知椭圆 C 与 y 轴也有两个交点，且交点坐标分别为 **3** ________.

一般地，如果椭圆 C 的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0), \qquad ①$$

则可以根据方程①来得到椭圆的一些几何性质.

(1) 范围

由方程①可知 $\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$ 且 $\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，因此

$$-a\leqslant x\leqslant a \text{ 且 } -b\leqslant y\leqslant b.$$

这说明，椭圆 C 位于直线 $x=-a$，$x=a$，$y=-b$，$y=b$ 所围成的矩形内，如图 2-5-7 所示.

(2) 对称性

如果 (x, y) 是方程①的一组解，则不难看出，$(-x, y)$，$(x, -y)$，$(-x, -y)$ 都是方程的解，这说明椭圆 C 关于 y 轴、x 轴、坐标原点对称，如图 2-5-7 所示.

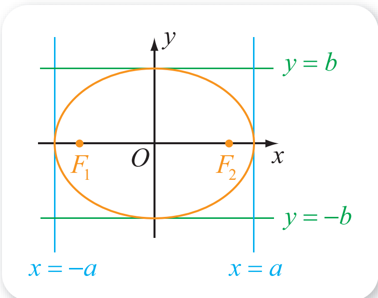


图 2-5-7

因此，x 轴、y 轴是椭圆 C 的对称轴，坐标原点是对称中心. 椭圆的对称中心也称为**椭圆的中心**，本书中我们只讨论中心在原点的椭圆.

（3）顶点

在方程①中，令 $y=0$，得 $x=-a$ 或 $x=a$，可知椭圆 C 与 x 轴有两个交点，可以记作 $A_1(-a，0)$，$A_2(a，0)$；令 $x=0$，得 $y=-b$ 或 $y=b$，可知椭圆 C 与 y 轴也有两个交点，可以记作 $B_1(0，-b)$，$B_2(0，b)$．因此，椭圆 C 与它的对称轴共有 4 个交点，即 A_1，A_2 和 B_1，B_2，如图 2-5-8 所示，这四个点都称为**椭圆的顶点**.

注意到 $|A_1A_2|=2a$，$|B_1B_2|=2b$，而且 $a>b>0$，所以线段 A_1A_2 称为**椭圆的长轴**，线段 B_1B_2 称为**椭圆的短轴**．显然，椭圆的两个焦点在它的长轴上，而且椭圆的长轴长为 $2a$，短轴长为 $2b$.

于是，a，b 分别是椭圆的半长轴长和半短轴长，如果设椭圆的焦距为 $2c$，则 c 是椭圆的半焦距，由

$$a^2=b^2+c^2$$

可知长度分别为 a，b，c 的三条线段构成一个直角三角形，且长度为 a 的线段是斜边．这就说明，以椭圆的任意一个短轴的端点、任意一个焦点以及原点为顶点的三角形是一个直角三角形，而且短轴端点与焦点的连线长为 a.

因此，如图 2-5-8 所示，有

$$|OA_1|=|OA_2|=a，|OB_1|=|OB_2|=b，|OF_1|=|OF_2|=c，$$

而且

$$|B_1F_1|=|B_1F_2|=|B_2F_1|=|B_2F_2|=a.$$

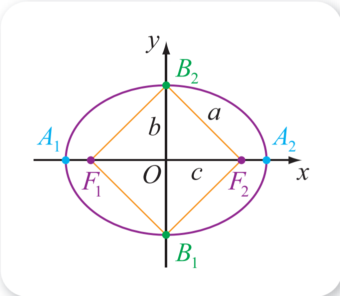


图 2-5-8

（4）离心率

一般地，椭圆的半焦距与半长轴长之比

$$e=\frac{c}{a}$$

称为**椭圆的离心率**.

尝试与发现

（1）根据椭圆离心率的定义，判断椭圆离心率的取值范围；

（2）猜想椭圆离心率的大小与椭圆的形状有什么联系，并尝试证明.

因为 $a>c>0$，所以

$$0<e<1.$$

另外，注意到

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}=\sqrt{1-e^2}，$$

这说明 e 越趋近于 1，则 $\frac{b}{a}$ 的值越小，因此椭圆越扁；反之，e 越趋近于 0，则 $\frac{b}{a}$ 的值越大，这时椭圆就越接近于圆.

当固定 a 不变时，椭圆的离心率与椭圆形状的关系可以从图 2-5-9 中看出来，其中橙色、绿色、蓝色椭圆的离心率分别为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{15}}{4}$.

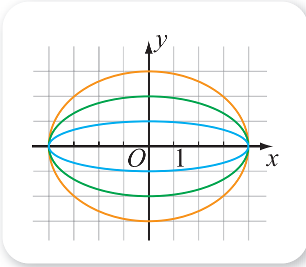


图 2-5-9

尝试与发现

如果椭圆的标准方程是

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0), \qquad ②$$

那么这个椭圆的范围、对称性、顶点、离心率中，哪些与焦点在 x 轴上的椭圆是有区别的？

显然，②式表示的椭圆，焦点坐标为 $(0, -c)$，$(0, c)$，椭圆上点的坐标的取值范围是

$-a\leqslant y\leqslant a$ 且 4 ________；

长轴的两个端点是 $A_1(0, -a)$，$A_2(0, a)$；短轴的两个端点是 $B_1(-b, 0)$，$B_2(b, 0)$. 除了这些以外，对称性、焦距、长轴长、短轴长、离心率等都与焦点在 x 轴上的椭圆是一致的，如图 2-5-10 所示.

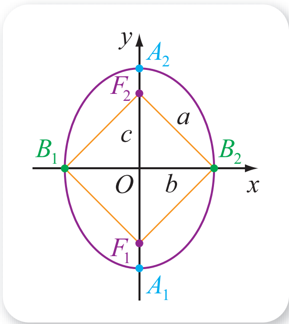


图 2-5-10

例 1 求下列方程表示的椭圆的长轴长、半短轴长、焦点坐标以及离心率：

(1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{24}=1$；　　(2) $8x^2+3y^2=24$.

解 (1) 由 $36>24$ 可知这个椭圆的焦点在 x 轴上，且 $a^2=36$，$b^2=24$，因此长轴长 $2a=12$，半短轴长 $b=2\sqrt{6}$.

又因为 $c^2=a^2-b^2=36-24=12$，即 $c=2\sqrt{3}$. 因此，椭圆的焦点坐标为

$$(-2\sqrt{3}, 0), (2\sqrt{3}, 0).$$

离心率

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

（2）已知椭圆的方程可化为

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}=1,$$

由 $8>3$ 可知这个椭圆的焦点在 5 ______ 轴上，且 $a^2=8$，$b^2=$ 6 ______，因此长轴长 $2a=4\sqrt{2}$，半短轴长 $b=\sqrt{3}$.

又因为 $c^2=a^2-b^2=8-3=5$，即 $c=\sqrt{5}$. 因此，椭圆的焦点坐标为

$$(0,\ -\sqrt{5}),\ (0,\ \sqrt{5}).$$

离心率

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

例 2 已知椭圆 C 的焦点为 F_1，F_2，短轴的一个端点为 B，且 $\triangle BF_1F_2$ 是一个等边三角形，求椭圆 C 的离心率.

解 因为 $|BF_1|=|BF_2|=a$，$|F_1F_2|=2c$，所以依据题意可知

$$a=2c,$$

从而有

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}.$$

例 3 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 F，且 P 是椭圆上的一点，求 $|PF|$ 的最小值与最大值.

解 记椭圆的焦距为 $2c$，则 $F(-c,\ 0)$，而且 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

设 $P(x,\ y)$，则

$$|PF|^2=(x+c)^2+y^2,$$

又因为 P 是椭圆上一点，所以 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，即 $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$，因此

$$\begin{aligned}|PF|^2&=(x+c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+b^2+c^2\\&=\frac{c^2}{a^2}x^2+2xc+a^2=\frac{c^2}{a^2}\left(x^2+2\frac{a^2}{c}x+\frac{a^4}{c^2}\right)\\&=\frac{c^2}{a^2}\left(x+\frac{a^2}{c}\right)^2.\end{aligned}$$

注意到 $-a\leqslant x\leqslant a$，而且 $-\frac{a^2}{c}=-\frac{a}{c}a<-a$，所以，当 $x=-a$ 时，$|PF|^2$ 最小，此时 $|PF|$ 有最小值，且最小值为

$$\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(-a+\frac{a^2}{c}\right)^2}=a-c;$$

当 $x=a$ 时，$|PF|^2$ 最大，此时 $|PF|$ 有最大值，且最大值为

$$\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a+\frac{a^2}{c}\right)^2}=a+c.$$

例 3 说明，椭圆上的所有点中，到给定焦点距离最大和最小的点，分别是长轴的两个端点.

例 4 航天器的轨道有很多种，其中的“地球同步转移轨道”是一个椭圆轨道，而且地球的中心正好是椭圆的一个焦点. 若地球同步转移轨道的远地点（即椭圆上离地球表面最远的点）与地球表面的距离为 m，近地点与地球表面的距离为 n，设地球的半径为 r，试用 m，n，r 表示出地球同步转移轨道的离心率.

解 设椭圆的半长轴长为 a，半焦距为 c，依照题意可知

$$\begin{cases}a-c=n+r,\\ a+c=m+r,\end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{n+m+2r}{2}$，$c=$ 7 __________，因此离心率

$$e=\frac{c}{a}=\frac{m-n}{n+m+2r}.$$

探索与研究

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（其中 a，b 是正的实常数）表示的一定是椭圆吗？当椭圆的焦距越来越小时，椭圆的形状将怎样变化？由此探讨椭圆与圆的关系.

2. 用信息技术作出椭圆以及研究椭圆的性质

根据椭圆的方程，利用计算机软件，可以方便地作出椭圆，并研究椭圆的性质.

例如，在 GeoGebra 中，输入“x^2/16+y^2/4=1”就可以得到 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 对应的椭圆；再指定 $A(2，0)$，并在椭圆上任取一点 B，构造线段 AB，就可以显示出线段 AB 的长，让点 B 沿椭圆运动，则可以观察出线段 AB 的变化情况，如图 2-5-11 所示. 有兴趣的读者可以结合课件“椭圆及其性质.ggb”进行观察.

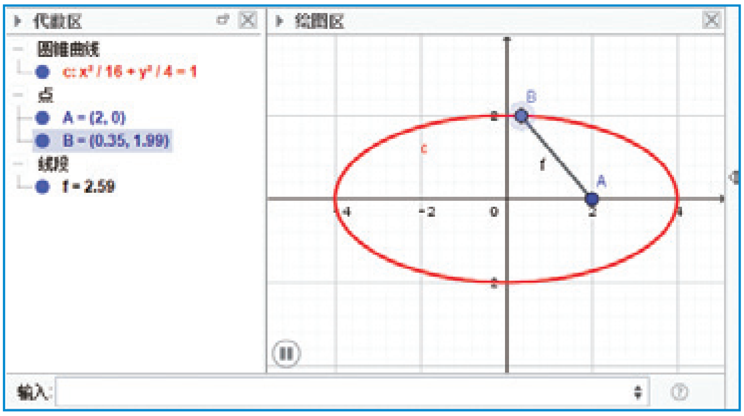


图 2-5-11

练习A

❶ 分别求下列椭圆的长轴长、短轴长、焦点坐标、顶点坐标和离心率：

(1) $x^2+9y^2=81$；　　(2) $25x^2+9y^2=225$；　　(3) $4x^2+5y^2=1$.

❷ 根据下列条件，求椭圆的标准方程：

(1) 长轴长和短轴长分别为 8 和 6，且焦点在 x 轴上；

(2) 一个焦点坐标为$(-3, 0)$，一个顶点坐标为$(0, 5)$.

❸ 已知椭圆 C 上的所有点中，到焦点的距离最小为 2，最大为 14，求椭圆的标准方程.

❹ 已知椭圆的一个焦点为 $F(6, 0)$，且 B_1，B_2 是短轴的两个端点，$\triangle FB_1B_2$ 是等边三角形，求这个椭圆的标准方程.

练习B

❶ 根据下列条件，求椭圆的标准方程：

(1) 两顶点坐标为$(0, \pm 6)$，且经过点$(5, 4)$；

(2) 焦距是 12，离心率是 0.6，焦点在 x 轴上.

❷ 已知椭圆 C 的方程为 $9x^2+4y^2=36$：

(1) 与椭圆 C 有相同焦点的椭圆有多少个？写出其中两个椭圆的方程；

(2) 与椭圆 C 有相同焦点且经过点$(4, \sqrt{5})$的椭圆有几个？写出符合条件的椭圆方程.

❸ 已知 P 是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$上一点，$A(0, 5)$，求$|PA|$的最小值与最大值.

❹ 已知椭圆的方程为 $m^2x^2+4m^2y^2=1$，其中 m 为大于零的实常数，求这个椭圆的焦点坐标与离心率.

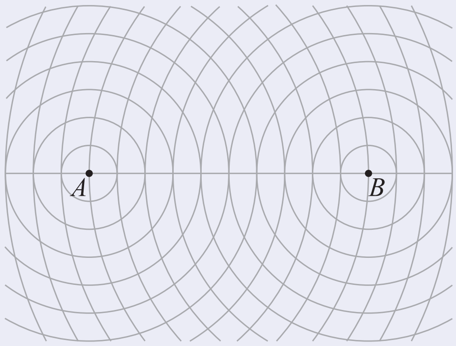
❺ 设动点 M 到定点 $F(2, 0)$的距离与它到直线 l：$x=\frac{9}{2}$的距离之比为$\frac{2}{3}$，求点 M 的轨迹方程.

1 $-1\leqslant y\leqslant 1$　2 $y=-1$ 或 $y=1$　3 $(0,\ -1)$，$(0,\ 1)$　4 $-b\leqslant x\leqslant b$

5 y　6 3　7 $\dfrac{m-n}{2}$

习题2-5A

1 如图，A，B 是平面上的两点，且 $|AB|=10$，图中的一系列圆是圆心分别为 A，B 的两组同心圆，每组同心圆的半径分别是 1，2，3，…．在两组同心圆的交点中，找出与 A，B 两点的距离之和等于 14 的点，并把这些点用光滑的曲线顺次连接起来，观察所得曲线的形状.



（第 1 题）

2 求椭圆 $\dfrac{4x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的长轴长、短轴长、焦点坐标和顶点坐标.

3 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 上一点 P 与两个焦点的连线互相垂直，求点 P 的坐标.

4 已知点 A 是椭圆 $x^2+2y^2=4$ 的长轴的左端点，以点 A 为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形 ABC，求斜边 BC 的长.

5 求经过 $P(\sqrt{3},\ -2)$，$Q(-2\sqrt{3},\ 1)$ 两点的椭圆的标准方程.

6 有一椭圆形溜冰场，其中椭圆的长轴长为 100 m，短轴长为 60 m．现要在该溜冰场上划定一个各顶点都在溜冰场边界上的矩形区域，且使这个区域的面积最大，则应把这个矩形的顶点定位在何处？这时矩形的周长是多少？

习题2-5B

1 已知椭圆的两个焦点 $F_1(-2\sqrt{2},\ 0)$，$F_2(2\sqrt{2},\ 0)$，过点 F_1 且与坐标轴不平行的直线 l 与椭圆相交于 M，N 两点，如果 $\triangle MNF_2$ 的周长等于 12，求这个椭圆的标准方程.

人民教育出版社

2. 已知 F_1，F_2 是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的焦点，点 P 在椭圆上且$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，求$\triangle F_1PF_2$的面积.

3. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的左焦点为 F，直线 l：$x=-\frac{a^2}{c}$. 设 P 是椭圆上的一点，求 P 到 F 的距离与 P 到直线 l 的距离之比.

习题2-5C

1. 设动点 M 到定点 $F(-c,0)$的距离与它到直线 l：$x=-\frac{a^2}{c}$的距离之比为$\frac{c}{a}$，$a>c>0$，求点 M 的轨迹方程，并用得到的轨迹方程解释 2.5.2 中例 3 得到的结果.

2. 已知点 $B(6,0)$和 $C(-6,0)$，过点 B 的直线 l 和过点 C 的直线 m 相交于点 A，设直线 l 的斜率为 k_1，直线 m 的斜率为 k_2，如果 $k_1k_2=-\frac{4}{9}$，求点 A 的轨迹方程，并说明此轨迹是何种曲线.

3. 已知点 $A(1,1)$，而且 F_1 是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左焦点，$P$ 是椭圆上任意一点，求$|PF_1|+|PA|$的最小值和最大值.

2.6 双曲线及其方程

2.6.1 双曲线的标准方程

情境与问题

如图 2-6-1 所示，某中心 O 接到其正西、正东、正北方向三个观测点 A，B，C 的报告：A，C 两个观测点同时听到了一声巨响，B 观测点听到的时间比 A 观测点晚 4 s. 已知各观测点到该中心的距离都是 1 020 m. 假定当时声音传播的速度为 340 m/s，发出巨响的位置为点 P，且 A，B，C，O，P 均在同一平面内. 你能确定该巨响发生的点的位置吗？

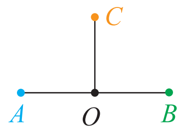


图 2-6-1

上述情境中，因为观测点 A 与 C 同时听到响声，说明 P 一定在 AC 的垂直平分线上；因为观测点 B 听到的时间比观测点 A 晚 4 s，这说明 P 距离 B 更远，而且

$$|PB|-|PA|=4\times340=1\,360.$$

那么，满足上式的点 P 可能的位置有哪些呢？这与本小节我们要讨论的双曲线有关.

一般地，如果 F_1，F_2 是平面内的两个定点，a 是一个正常数，且 $2a<|F_1F_2|$，则平面上满足

$$||PF_1|-|PF_2||=2a$$

的动点 P 的轨迹称为**双曲线**，其中，两个定点 F_1，F_2 称为**双曲线的焦点**，两个焦点的距离 $|F_1F_2|$ 称为**双曲线的焦距**. 另外，从本章导语中可以看出，双曲线也可以通过用平面截两个特殊的圆锥面得到，因此双曲线是一种圆锥曲线.

尝试与发现

你能利用拉链等日常生活中的物品作出双曲线吗？

如图 2-6-2 所示，将拉链的一边截去一部分，并将拉链的两端用图钉固定在画板的 F_1 与 F_2 处，将笔尖放置在拉锁处，随着拉链沿不同的方向逐渐拉开，笔尖将作出一条曲线；调换拉链的两端，按照同样的操作，笔尖也将作出一条曲线．最终作出的图形是双曲线的一部分，其中每一条曲线都称为双曲线的一支．

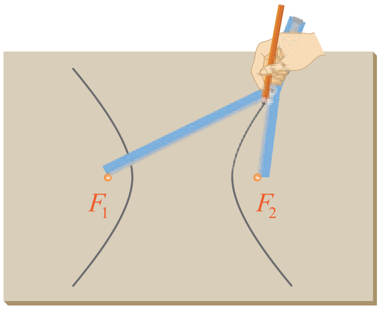


图 2-6-2

这种作双曲线的方法实际上验证了双曲线定义中的 P 点一定存在而且有无数多个．那么，从数学上能不能证明这一点呢？

尝试与发现

怎样从数学上证明满足双曲线定义的点一定是存在的？这样的点有多少个？你能想到什么办法来解决这两个问题？

同椭圆的情形一样，下面我们用坐标法来探讨尝试与发现中的问题，并求出双曲线的标准方程．

为了方便，设双曲线的焦距为 $2c$，则 $c>a>0$．

以 F_1F_2 所在直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，如图 2-6-3 所示．此时，双曲线的焦点分别为 $F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$．

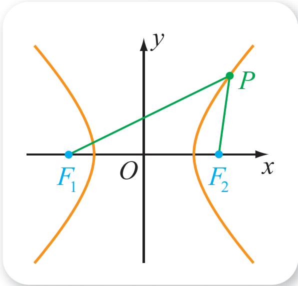


图 2-6-3

设 $P(x,\ y)$是双曲线上一点，则$||PF_1|-|PF_2||=2a$，因为$|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|PF_2|=$ 1 __________，所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad ①$$

由①得

$$\frac{(x+c)^2+y^2-[(x-c)^2+y^2]}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=\pm 2a,$$

整理得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm\frac{2c}{a}x. \qquad ②$$

且②与①的右边同时取正号或负号．①+②整理得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm\left(a+\frac{c}{a}x\right), \qquad ③$$

将③式平方，再整理得

$$\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2-y^2=c^2-a^2. \qquad ④$$

因为 $c>a>0$，所以 $c^2-a^2>0$，设

$$c^2-a^2=b^2$$

且 $b>0$，则④式可化为

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).} \qquad ⑤$$

可以验证，方程⑤就是双曲线的方程，通常称为**焦点在 x 轴上的双曲线的标准方程**. 显然，满足方程⑤的点的坐标有无穷多组，这无穷多组解对应的点组成的双曲线如图 2-6-3 所示.

尝试与发现

设双曲线的焦点为 F_1 和 F_2，焦距为 $2c$，而且双曲线上的动点 P 满足

$$||PF_1|-|PF_2||=2a,$$

其中 $c>a>0$. 以 F_1F_2 所在直线为 y 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 x 轴，建立平面直角坐标系，如图 2-6-4 所示. 此时：

（1）双曲线焦点的坐标分别是什么？

（2）能否通过⑤式来得到此时双曲线方程的形式？

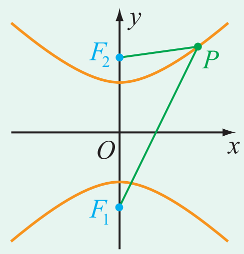


图 2-6-4

显然，此时双曲线的焦点是 $F_1(0,\ -c)$，$F_2(0,\ c)$，而且只要将方程⑤中的 x 与 y 互换，就可以得到此时双曲线的方程为

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0),} \qquad ⑥$$

其中 $b^2=c^2-a^2$. 这个方程通常称为**焦点在 y 轴上的双曲线的标准方程**.

由上可以看出，双曲线的标准方程由 a，c 以及焦点的位置确定，其中 $c>a>0$. 如不特别声明，以后总认为双曲线有相应的 a，c 值以及 b 值，其中

$$b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

而且谈到双曲线的标准方程时，指的总是⑤⑥这两种形式之一.

例 1 分别求适合下列条件的双曲线的标准方程：

（1）两个焦点的坐标分别是$(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$，且双曲线上的点与两焦点距离之差的绝对值等于 8；

（2）双曲线的一个焦点坐标是$(0,\ -6)$，且双曲线经过点 $A(-5,\ 6)$.

解 （1）由已知得 $c=$ **2** ____________，$2a=8$．因此 $a=4$，且 $b^2=c^2-a^2=5^2-4^2=9$．又因为双曲线的焦点在 x 轴上，所以所求的双曲线的标准方程是

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

（2）由已知得双曲线的焦点在 **3** __________ 轴上，且 $c=$ **4** __________，所以另一个焦点坐标为 **5** __________．

因为点 $A(-5,\ 6)$ 在双曲线上，所以点 A 与两焦点的距离的差的绝对值为

$$2a=\left|\sqrt{(-5)^2+(6+6)^2}-\sqrt{(-5)^2+(6-6)^2}\right|=|13-5|=8,$$

因此 $a=4$，从而 $b^2=6^2-4^2=20$．

因此，所求双曲线的标准方程是

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1.$$

例 1 的（2）中，也可以先设双曲线的方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，然后再通过已知求出 a，b 的值来求解，请读者自行尝试．

例 2 已知 $F_1(-2,\ 0)$，$F_2(2,\ 0)$，动点 P 满足

$$|PF_1|-|PF_2|=2,$$

求动点 P 的轨迹方程．

解 因为 $\frac{2}{2}=1<2$，所以根据双曲线的定义可知，P 一定在 $a=$ **6** ________，$c=$ **7** __________ 且焦点在 x 轴上的双曲线上．这就是说，点 P 的坐标 $(x,\ y)$ 一定满足

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1.$$

另一方面，由 $|PF_1|-|PF_2|=2>0$ 可知 $|PF_1|>|PF_2|$，因此 P 的横坐标要大于零，从而可知 P 的轨迹方程为

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1\ (x>0).$$

类似地，对于本节开始部分的情境与问题来说，如果以 O 为坐标原点，AB，OC 所在直线为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系，如图 2-6-5 所示．则可知

$A(-1\,020,\ 0)$，$B(1\,020,\ 0)$，$C(0,\ 1\,020)$，

发出巨响的位置 P 在以 A，B 为焦点的双曲线上，

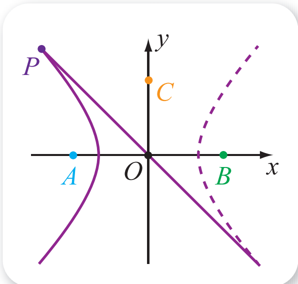


图 2-6-5

而且双曲线中，

$$c=1\,020,\ a=\frac{1\,360}{2}=680,$$

因此

$$b^2=c^2-a^2=1\,020^2-680^2=5\times340^2.$$

所以点 P 的坐标$(x,\ y)$满足

$$\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{5\times340^2}=1\ (x<0). \qquad ⑦$$

另一方面，容易求得 AC 的垂直平分线为

$$y=-x, \qquad ⑧$$

这也是点 P 的坐标$(x,\ y)$要满足的方程.

联立⑦与⑧，可解得$-x=y=680\sqrt{5}$. 因此，发出巨响的 P 点在中心 O 的西偏北 45°的 $680\sqrt{10}$ m 处，如图 2-6-5 所示.

练习A

1. 已知双曲线 C 的方程是$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$：

   (1) 求双曲线 C 的焦点坐标；

   (2) 如果双曲线 C 上一点 P 到其一个焦点的距离等于 8，求点 P 到其另一个焦点的距离.

2. 分别根据下列条件，求双曲线的标准方程：

   (1) $a=3$，$b=4$，且焦点在 x 轴上；

   (2) 焦点为 $F_1(0,\ -6)$和 $F_2(0,\ 6)$，且经过点 $A(2,\ -5)$.

3. 已知双曲线 $x^2-y^2=m$ 与椭圆 $2x^2+3y^2=72$ 有相同的焦点，求 m 的值.

4. 过双曲线$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ 的右焦点作 x 轴的垂线，分别求垂线与双曲线的交点到两焦点的距离.

5. 写出 $a=3$，$b=4$ 的双曲线的标准方程.

练习B

1. 已知双曲线 C 过椭圆$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ 的焦点，且以椭圆的顶点为焦点，求双曲线的方程.

2. 已知双曲线 $3mx^2-my^2=3$ 的一个焦点坐标是$(-2,\ 0)$，求实数 m 的值.

③ 求焦点在 x 轴上，且经过点 $P(4, 2)$ 与 $Q(2\sqrt{6}, 2\sqrt{2})$ 的双曲线的标准方程.

④ 相距 1 400 m 的 A，B 两个观察站都听到了一声巨响，且在 A 处听到的时间比在 B 处听到的时间早 4 s. 已知当时的声速是 340 m/s，发出巨响的点与 A，B 都在水平面上，求发出巨响的点所在曲线的方程.

1 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$　2 5　3 y　4 6　5 (0, 6)　6 1　7 2

2.6.2 双曲线的几何性质

1. 双曲线的几何性质

下面我们由双曲线的方程来研究双曲线具有的几何性质.

尝试与发现

已知双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$，根据这个方程完成下列任务：

(1) 观察方程中 x 与 y 是否有取值范围，由此指出双曲线 C 在平面直角坐标系中的位置特征；

(2) 指出双曲线 C 是否关于 x 轴、y 轴、原点对称；

(3) 指出双曲线 C 与坐标轴是否有交点，如果有，求出交点坐标；

(4) 如果 (x, y) 满足双曲线 C 的方程，说出当 $|x|$ 增大时，$|y|$ 将怎样变化，并指出这反映了双曲线的形状具有什么特点.

因为实数的平方是一个非负数，所以在方程 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 中，必有 $x^2\geqslant 1$，即 $x\leqslant -1$ 或 1 ________. 由此可知，双曲线 C 位于直线 $x=-1$ 与 2 ________ 所夹平面区域的外侧，如图 2-6-6 所示.

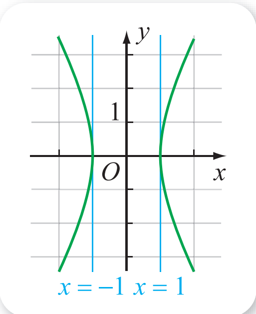


图 2-6-6

又因为如果 (x, y) 是方程 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的一组解，则不难看出，$(-x, y)$，$(x, -y)$，$(-x, -y)$ 都是方

程的解，这说明双曲线 C 关于 y 轴、x 轴、坐标原点对称，这也可从图 2-6-6 中看出来.

在方程 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 中，令 $y=0$，得 $x=-1$ 或 $x=1$，可知双曲线 C 与 x 轴有两个交点，且交点坐标分别为3___________；令 $x=0$，得 $-\frac{y^2}{4}=1$，这个方程无实数解，可知双曲线 C 与 y 轴没有交点.

如果 (x, y) 满足 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$，则可以看出，$|x|$ 增大时，$|y|$ 也是增大的. 这就是说，双曲线 C 向四周无限延展，如图 2-6-6 所示.

一般地，如果双曲线 C 的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0), \qquad ①$$

则可以根据方程①来得到双曲线的一些几何性质.

(1) 范围

由方程①可知 $\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1$，即

$$x\leqslant -a \text{ 或 } x\geqslant a.$$

因此双曲线 C 位于直线 $x=a$ 与 $x=-a$ 所夹平面区域的外侧，如图 2-6-7 所示.

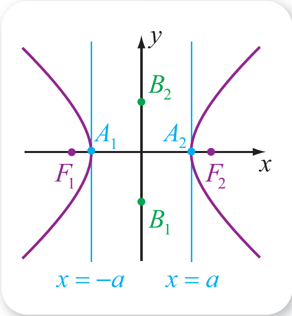


图 2-6-7

(2) 对称性

如果 (x, y) 是方程①的一组解，则不难看出，$(-x, y)$，$(x, -y)$，$(-x, -y)$ 都是方程的解，这说明双曲线 C 关于 y 轴、x 轴、坐标原点对称，如图 2-6-7 所示.

因此，x 轴、y 轴是双曲线 C 的对称轴，坐标原点是对称中心. 双曲线的对称中心也称为**双曲线的中心**，本书中我们只讨论中心在原点的双曲线.

(3) 顶点

在方程①中，令 $y=0$，得 $x=-a$ 或 $x=a$，可知双曲线 C 与 x 轴有两个交点，可以记作 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$；令 $x=0$，得 $-\frac{y^2}{b^2}=1$，这个方程无实数解，可知双曲线 C 与 y 轴没有交点.

双曲线 C 与它的对称轴共有 2 个交点，即 A_1，A_2，这两个点都称为**双曲线的顶点**，如图 2-6-7 所示.

习惯上，称线段 A_1A_2 为**双曲线的实轴**. 若记 $B_1(0, -b)$，$B_2(0, b)$，则称线段 B_1B_2 为**双曲线的虚轴**. 显然，双曲线的两个焦点在它的实轴所在的直线上，而且双曲线的实轴长为 $2a$，虚轴长为 $2b$. 于是，a，b 分别是双

曲线的半实轴长和半虚轴长.

特别地，实轴长与虚轴长相等的双曲线称为**等轴双曲线**.

（4）渐近线

由方程①可以看出，如果$(x,\ y)$是双曲线上一点，则$|x|$增大时，$|y|$也是增大的. 这就是说，双曲线向四周无限延展，如图 2-6-7 所示. 那么，这种无限延展还有什么性质呢？

考虑到双曲线关于坐标轴和原点对称，因此我们只要了解双曲线在第一象限内的情况即可. 在第一象限内，双曲线的方程可以改写为

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\quad (x>a),$$

因为 $x>a$ 时，

$$\sqrt{x^2-a^2}<\sqrt{x^2}=x,$$

这就说明在第一象限内，双曲线一定在直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的下方；又因为此时如果 x 越来越大，则

$$\sqrt{x^2-a^2}\approx\sqrt{x^2}=x,$$

直观上，这说明随着 x 的增大，双曲线会越来越接近直线 $y=\frac{b}{a}x$. 事实上，如果 $P(x,\ y)$是双曲线在第一象限的点，则 P 到直线 $y=\frac{b}{a}x$（即 $bx-ay=0$）的距离

$$\begin{aligned}d&=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|bx-b\sqrt{x^2-a^2}\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}\\&=\frac{a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}\,(x+\sqrt{x^2-a^2}\,)},\end{aligned}$$

因为当 $x>a$ 且 x 无限增大时，$x+\sqrt{x^2-a^2}$ 将无限增大，从而 d 将无限减小并接近于 0（但不等于 0），即在第一象限内，随着 x 的增大，双曲线会越来越接近直线 $y=\frac{b}{a}x$ 但不与这条直线相交.

根据双曲线的对称性可知，双曲线①向外无限延伸时，总是在由直线 $y=\frac{b}{a}x$ 与直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 相交而分平面所成的、含双曲线焦点的两个区域内，并无限接近于这两条直线，但永远不会与它们相交，如图 2-6-8 所示.

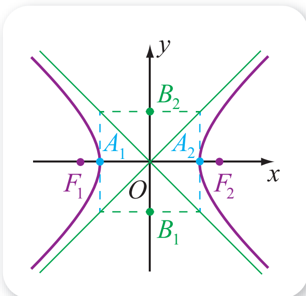


图 2-6-8

直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$ 都称为双曲线①的**渐近线**. 由此可知，作双曲线时，如果先作出它的渐近线，将有利于确定双曲线的大致形状. 另外，值得注意的是，如果过双曲线实轴与虚轴的端点分别作 x 轴与 y 轴的垂线，则可以得到一个矩形，而且矩形的对角线所在的直线正好就是渐近线，如图 2-6-8 所示.

（5）离心率

同椭圆的情形一样，双曲线的半焦距与半实轴长之比

$$e=\frac{c}{a}$$

称为**双曲线的离心率**.

尝试与发现

（1）根据双曲线离心率的定义，判断双曲线离心率的取值范围；

（2）猜想双曲线离心率的大小与双曲线的形状有什么联系，并尝试证明.

因为 $c>a>0$，所以可以看出 $e>1$.

另外，注意到

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{e^2-1},$$

这说明 e 越趋近于 1，则 $\frac{b}{a}$ 的值越小，因此双曲线的渐近线所夹的双曲线区域越狭窄.

当固定 a 不变时，双曲线的离心率与双曲线形状的关系可以从图 2-6-9 中看出来，其中蓝色、绿色双曲线的离心率分别为 $\sqrt{5}$，$\sqrt{2}$.

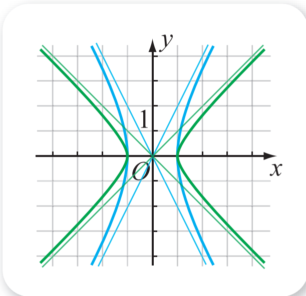


图 2-6-9

尝试与发现

如果双曲线的标准方程是

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0), \qquad ②$$

那么该双曲线的范围、对称性、顶点、渐近线、离心率中，哪些与焦点在 x 轴上的双曲线是有区别的？

显然，②式表示的双曲线，焦点坐标为 $(0,\ -c)$，$(0,\ c)$，双曲线上点的坐标的取值范围是

$$y \leqslant -a \text{ 或 } y \geqslant a;$$

实轴的两个端点是 $A_1(0,\ -a)$，$A_2(0,\ a)$；虚轴的两个端点是 $B_1(-b,\ 0)$，$B_2(b,\ 0)$；渐近线方程是

$$y = \pm\frac{a}{b}x.$$

除这些以外，对称性、焦距、实轴长、虚轴长、离心率等都与焦点在 x 轴上的双曲线是一致的，如图 2-6-10 所示.

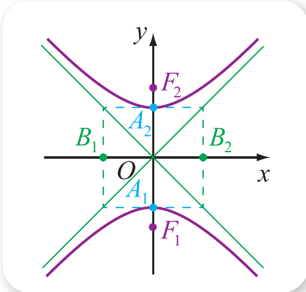


图 2-6-10

例 1 求下列方程表示的双曲线的实轴长、焦点坐标、离心率以及渐近线方程：

(1) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$；　　(2) $x^2-y^2=-9$.

解 (1) 由标准方程可知双曲线的焦点在 x 轴上，且 $a^2=9$，$b^2=$ **4** ________，因此实轴长 $2a=6$.

又因为 $c^2=a^2+b^2=9+16=25$，即 $c=5$. 因此，双曲线的焦点坐标为

$$(-5,\ 0),\ (5,\ 0).$$

离心率

$$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}.$$

渐近线方程为

$$y=\pm\frac{4}{3}x.$$

(2) 已知双曲线的方程可化为

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{9}=1,$$

由此可知这个双曲线的焦点在 y 轴上，且 $a^2=b^2=9$，因此实轴长 $2a=$ **5** ________.

又因为 $c^2=a^2+b^2=9+9=18$，即 $c=3\sqrt{2}$. 因此，双曲线的焦点坐标为

$$(0,\ -3\sqrt{2}),\ (0,\ 3\sqrt{2}).$$

离心率

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}.$$

渐近线方程为

$$y=\pm x.$$

例 2 已知双曲线 C 的顶点为 A_1，A_2，虚轴的一个端点为 B，且 $\triangle BA_1A_2$ 是一个等边三角形，求双曲线 C 的离心率.

解 设 O 为坐标原点，则 A_1A_2 的中点为 O，且 $|OA_1|=a$，$|BO|=b$. 由 $\triangle BA_1A_2$ 是等边三角形可知 $|BO|=\sqrt{3}\,|OA_1|$，因此

$$b=\sqrt{3}a,$$

又因为

$$c^2=a^2+b^2=a^2+(\sqrt{3}a)^2=4a^2,$$

所以 $c=2a$，从而

$$e=\frac{c}{a}=2.$$

例 3 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左焦点为 F，且 P 是双曲线上的一点，求 $|PF|$ 的最小值.

解 记双曲线的焦距为 $2c$，则 $F(-c,\ 0)$，而且 $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

设 $P(x,\ y)$，则

$$|PF|^2=(x+c)^2+y^2,$$

又因为 P 是双曲线上一点，所以 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，即 $y^2=-b^2+\dfrac{b^2}{a^2}x^2$，因此

$$\begin{aligned}|PF|^2&=(x+c)^2-b^2+\frac{b^2}{a^2}x^2=\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2cx-b^2+c^2\\&=\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2=\frac{c^2}{a^2}\left(x^2+2\,\frac{a^2}{c}x+\frac{a^4}{c^2}\right)\\&=\frac{c^2}{a^2}\left(x+\frac{a^2}{c}\right)^2.\end{aligned}$$

注意到 $x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$，而且 $0>-\dfrac{a^2}{c}=-\dfrac{a}{c}a>-a$，所以，当 $x=$ 6 ________ 时，$|PF|^2$ 最小，此时 $|PF|$ 有最小值，且最小值为

$$\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(-a+\frac{a^2}{c}\right)^2}=c-a.$$

例 3 说明，双曲线上的所有点中，到给定焦点距离最小的点，是离该焦点最近的实轴的端点.

2. 用信息技术作出双曲线以及研究双曲线的性质

根据双曲线的方程，利用计算机软件，可以方便地作出双曲线，并研究双曲线的性质.

例如，在 GeoGebra 中，输入“x^2－y^2/3＝1”就可以得到 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 对应的双曲线；再指定 $A(-3, 0)$，并在双曲线上任取一点 B，构造线段 AB，就可以显示出线段 AB 的长，让点 B 沿双曲线运动，则可以观察出线段 AB 的变化情况，如图 2-6-11 所示．有兴趣的读者可以结合课件“双曲线及其性质 . ggb”进行观察.

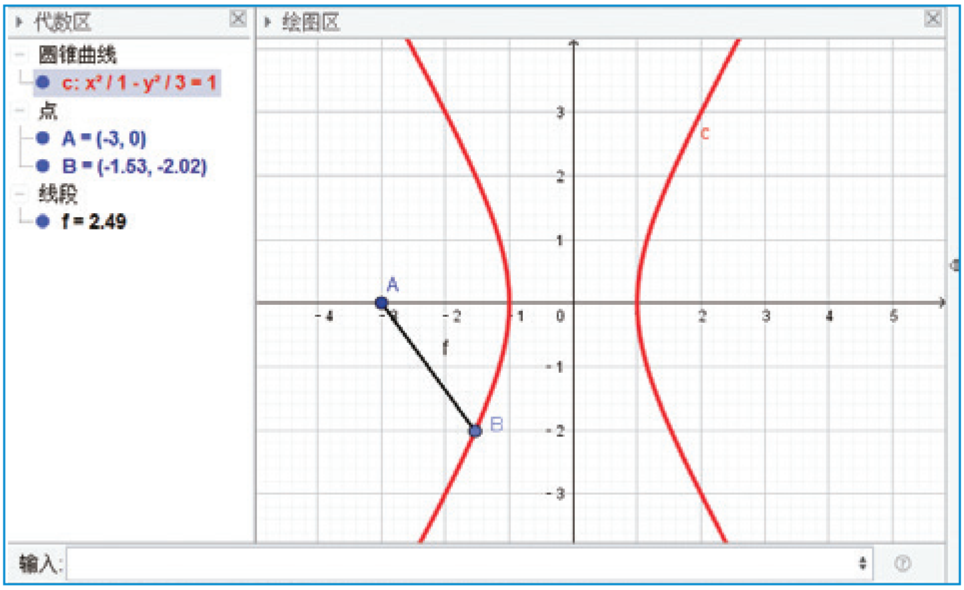


图 2-6-11

练习A

❶ 写出双曲线 $x^2-\frac{y^2}{24}=1$ 的实轴长、虚轴长、焦点坐标、渐近线方程.

❷ 已知双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点为 F，且 P 是双曲线上一点，写出 $|PF|$ 的最小值.

❸ 已知双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$，求双曲线的离心率.

练习B

❶ 求双曲线 $-9x^2+y^2=81$ 的实轴长、虚轴长、焦点坐标、离心率以及渐近线方程.

❷ 已知双曲线的一个焦点是 $(5, 0)$，一条渐近线方程为 $3x-4y=0$，求这个双曲线的标准方程和离心率.

❸ 当实数 $\lambda\neq0$ 时，方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$ 表示的都是双曲线，这些双曲线的共同点是什么？

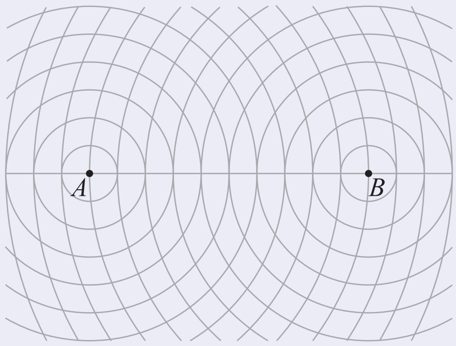
4 已知双曲线两顶点间的距离是 6，两焦点的连线被两顶点和中心四等分，求双曲线的标准方程.

5 求证：双曲线的焦点到其渐近线的距离等于半虚轴长.

1 $x\geqslant1$　2 $x=1$　3 $(-1,\ 0)$，$(1,\ 0)$　4 16　5 6　6 $-a$

习题2-6A

1 如图，A，B 是平面上的两点，且 $|AB|=10$，图中的一系列圆是圆心分别为 A，B 的两组同心圆，每组同心圆的半径分别是 1，2，3，…. 在两组同心圆的交点中，找出与 A，B 两点的距离之差的绝对值等于 6 的点，并把这些点用光滑的曲线顺次连接起来，观察所得曲线的形状.



（第 1 题）

2 求下列双曲线的实轴长、虚轴长、焦点坐标、顶点坐标以及渐近线方程：

(1) $\dfrac{9x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$；　　(2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{m}=1$.

3 已知双曲线的渐近线方程为 $3x\pm4y=0$，它的焦点是椭圆 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的长轴的端点，求此双曲线的标准方程.

4 已知中心在原点的双曲线的一个焦点是 $F_1(-4,\ 0)$，一条渐近线方程是 $3x-2y=0$，求此双曲线的标准方程.

5 求半实轴长为 $2\sqrt{3}$，且与双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 有公共焦点的双曲线的标准方程.

习题2-6B

1 已知直线 l_1：$5x+3y=0$ 和 l_2：$5x-3y=0$.

(1) 写出两个以直线 l_1 和 l_2 为渐近线的双曲线的标准方程；

(2) 如果以直线 l_1 和 l_2 为渐近线的双曲线经过点 $M(1,\ 3)$，求双曲线的标准方程.

人民教育出版社

2. 已知 P 是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 上一点，$A(3, 0)$，求 $|PA|$ 的最小值.

3. 设动点 M 到定点 $F(3, 0)$ 的距离与它到直线 l：$x=\frac{4}{3}$ 的距离之比为 $\frac{3}{2}$，求点 M 的轨迹方程.

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的左焦点为 $F(-c, 0)$，直线 l：$x=-\frac{a^2}{c}$. 设 P 是双曲线上的一点，求 P 到 F 的距离与 P 到直线 l 的距离之比.

5. 已知 F_1，F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点，点 M 在双曲线上，如果 $\overrightarrow{MF_1}\perp\overrightarrow{MF_2}$，求 $\triangle MF_1F_2$ 的面积.

习题2-6C

1. 如果过点 $(6, 0)$ 的直线与过点 $(-6, 0)$ 的直线相交于点 M，而且两直线斜率的乘积为 a，其中 $a\neq 0$.
   (1) 求点 M 的轨迹方程；
   (2) 讨论 M 的轨迹是何种曲线.

2. 设动点 M 到定点 $F(-c, 0)$ 的距离与它到直线 l：$x=-\frac{a^2}{c}$ 的距离之比为 $\frac{c}{a}$，其中 $c>a>0$，求点 M 的轨迹方程，并用得到的轨迹方程解释 2.6.2 中例 3 得到的结果.

2.7 抛物线及其方程

2.7.1 抛物线的标准方程

情境与问题

抛物线这个几何对象，我们并不陌生.

例如，从物理学中我们知道，一个向上斜抛的乒乓球，其运动轨迹是抛物线的一部分，如图 2-7-1 所示；二次函数的图象是一条抛物线；等等.

到底什么是抛物线呢？抛物线有没有一个类似于圆、椭圆或双曲线的定义呢？


图 2-7-1

本小节我们要探讨的就是抛物线的定义及其标准方程.

一般地，设 F 是平面内的一个定点，l 是不过点 F 的一条定直线，则平面上到 F 的距离与到 l 的距离相等的点的轨迹称为**抛物线**，其中定点 F 称为**抛物线的焦点**，定直线 l 称为**抛物线的准线**. 另外，从本章导语中可以看出，抛物线也可以通过用平面截圆锥面得到，因此抛物线是一种圆锥曲线.

如图 2-7-2 所示，在画板上画一条直线 l，使 l 与画板左侧的边线平行；再在直线 l 外画一个定点 F. 取一个丁字尺靠紧画板左侧外沿，丁字尺和直线 l 垂直且相交于点 P，在丁字尺的另一端取一点 Q，将一条长度等于 $|PQ|$ 的细绳，一端固定在点 Q，另一端固定在点 F，用笔尖靠着丁字尺边缘并扣紧细绳，然后上下平移丁字尺，笔尖作出的曲线是抛物线的一部分.

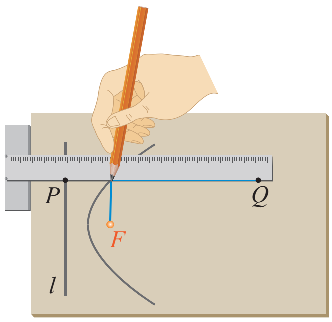


图 2-7-2

这种作抛物线的方法实际上验证了满足抛物线定义的点一定存在而且有无数多个. 那么，从数学上能不能证明这一点呢？

尝试与发现

怎样从数学上证明满足抛物线定义的点一定是存在的？这样的点有多少个？你能想到什么办法来解决这两个问题？

同椭圆、双曲线的情形一样，下面我们用坐标法来探讨尝试与发现中的问题，并求出抛物线的标准方程.

为了方便，过抛物线的焦点 F 作其准线 l 的垂线，记垂足为 K，设 $|KF|=p$（即 F 到准线 l 的距离为 p），因为直线 l 不过点 F，所以 $p>0$.

如图 2-7-3 所示，以直线 KF 为 x 轴，线段 KF 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系. 此时，抛物线的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，准线为 $x=$ **1** ______.

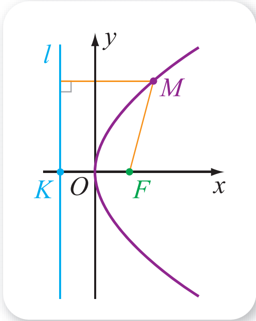


图 2-7-3

设 $M(x,\ y)$是抛物线上一点，则 M 到 F 的距离为

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},$$

M 到直线 l 的距离为 $\left|x+\frac{p}{2}\right|$，所以

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

上式两边平方，整理可得

$$\boxed{y^2=2px.} \quad ①$$

可以验证，方程①就是抛物线的方程，通常称为**焦点在 x 轴正半轴上的抛物线的标准方程**. 显然，满足方程①的点的坐标有无穷多组，这无穷多组解对应的点组成的抛物线如图 2-7-3 所示.

尝试与发现

如果建立的平面直角坐标系分别如图 2-7-4 的（1）（2）（3）所示，其他条件不变，则抛物线的焦点坐标和准线方程有变化吗？此时能否通过①式得到抛物线的标准方程具有的形式呢？

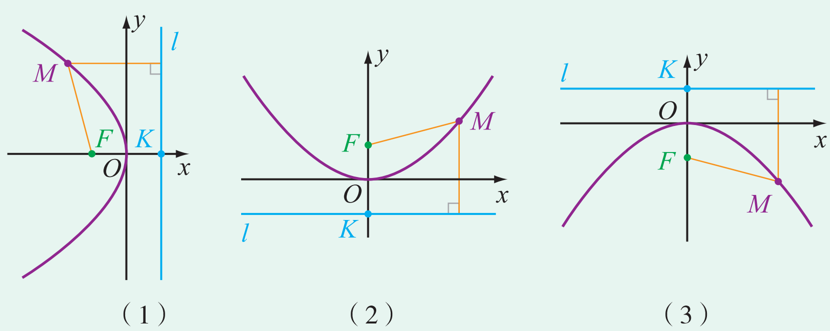


图 2-7-4

可以看出，如果按照图 2-7-4（1）的方式建立平面直角坐标系，则抛物线的焦点为 $F\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$，准线为 $x=$ 2 ________；只要将①中的 x 变为 $-x$ 即可得到抛物线的方程为

$$\boxed{y^2=-2px.} \qquad ②$$

通常称②为**焦点在 x 轴负半轴上的抛物线的标准方程**.

类似地，如果按照图 2-7-4（2）的方式建立平面直角坐标系，则抛物线的焦点为 $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$，准线为 $y=$ 3 ________；只要将①中的 x 与 y 互换即可得到抛物线的方程为

$$\boxed{x^2=2py.} \qquad ③$$

通常称③为**焦点在 y 轴正半轴上的抛物线的标准方程**.

如果按照图 2-7-4（3）的方式建立平面直角坐标系，则抛物线的焦点为 $F\left(0,\ -\frac{p}{2}\right)$，准线为 $y=$ 4 ________；只要将①中的 x 变为 $-y$ 且 y 变为 $-x$ 即可得到抛物线的方程为

$$\boxed{x^2=-2py.} \qquad ④$$

通常称④为**焦点在 y 轴负半轴上的抛物线的标准方程**.

由上可以看出，抛物线的标准方程是由焦点到准线的距离 p 以及焦点的位置确定的. 如不特别声明，以后总认为抛物线有相应的 p（$p>0$）值，而且以后谈到抛物线的标准方程时，总是指①②③④这四种形式之一.

例 1 分别根据下列条件，求抛物线的标准方程和准线方程：

（1）抛物线的焦点到准线的距离是 3，而且焦点在 x 轴的正半轴上；

（2）抛物线的焦点是 $F(-3,\ 0)$.

解 （1）根据题意可知，抛物线的标准方程具有 $y^2=2px$ 的形式，而且 $p=$ 5 ________，因此所求标准方程为

$$y^2=6x.$$

准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$.

（2）因为抛物线的焦点坐标是$(-3,\ 0)$，所以抛物线的标准方程具有 $y^2=-2px$ 的形式，而且 $\frac{p}{2}=3$，因此 $p=6$，从而所求抛物线的标准方程是

$$y^2=-12x.$$

准线方程为 $x=3$.

例 2 分别根据下列条件，求抛物线的焦点坐标和标准方程：

（1）抛物线的焦点到 x 轴的距离是 2，而且焦点在 y 轴的正半轴上；

（2）抛物线的焦点是双曲线 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ 的焦点之一.

解 （1）由已知可得焦点坐标为 $(0,2)$，因此抛物线的标准方程具有 $x^2=2py$ 的形式，且 $p=$ 6______，从而所求抛物线的标准方程是

$$x^2=8y.$$

（2）因为双曲线 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ 中，$c=\sqrt{9+16}=5$，又因为双曲线的焦点在 y 轴上，所以焦点坐标为 $(0,-5)$ 或 $(0,5)$.

如果抛物线的焦点坐标为 $(0,-5)$，则抛物线的标准方程具有 $x^2=-2py$ 的形式，且 $p=10$，此时抛物线的标准方程是

$$x^2=-20y;$$

如果抛物线的焦点坐标为 $(0,5)$，则抛物线的标准方程具有 $x^2=2py$ 的形式，且 $p=$ 7______，此时抛物线的标准方程是

$$x^2=20y.$$

例 3 已知平面直角坐标系中，动点 M 到 $F(0,-2)$ 的距离比 M 到 x 轴的距离大 2，求 M 的轨迹方程，并在平面直角坐标系中作出轨迹曲线.

解 设 M 的坐标是 (x,y)，则根据题意可知

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2}=|y|+2,$$

化简得 $x^2=4(|y|-y)$.

当 $y>0$ 时，方程可变为 $x=0$，这表示的是端点在原点、方向为 y 轴正方向的射线，且不包括端点，如图 2-7-5 所示；

当 $y\leqslant 0$ 时，方程可变为 $x^2=-8y$，这表示的是焦点为 $F(0,-2)$ 的抛物线，如图 2-7-5 所示.

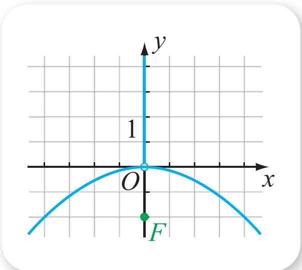


图 2-7-5

练习A

❶ 已知 M 是抛物线上一点，且 M 到抛物线的焦点的距离等于 3，写出 M 到抛物线的准线的距离.

❷ 分别根据下列条件，写出抛物线的标准方程：

（1）焦点是 $F(2,0)$；　　（2）准线方程是 $x=-\frac{3}{2}$.

3 写出抛物线 $y^2=4ax$ 的焦点坐标.

练习B

1 已知抛物线的焦点在 x 轴的正半轴上，且准线与 y 轴之间的距离为 6，求此抛物线的标准方程.

2 写出下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

（1）$y=2x^2$；　　（2）$y=ax^2$（$a\neq 0$）.

3 求焦点在 x 轴正半轴上，并且经过点 $M(2,-4)$的抛物线的标准方程.

4 已知点 M 在抛物线 $y^2=12x$ 上，它到焦点的距离等于 9，求点 M 的坐标.

5 已知点 M 到点 $F(4,0)$的距离比它到直线 l：$x+6=0$ 的距离小 2，求点 M 的轨迹方程.

1 $-\frac{p}{2}$　2 $\frac{p}{2}$　3 $-\frac{p}{2}$　4 $\frac{p}{2}$　5 3　6 4　7 10

2.7.2 抛物线的几何性质

1. 抛物线的几何性质

下面我们由抛物线的方程来研究抛物线具有的几何性质.

尝试与发现

已知抛物线 C 的方程为 $y^2=2x$，根据这个方程完成下列任务：

（1）观察方程中 x 与 y 是否有取值范围，由此指出抛物线 C 在平面直角坐标系中的位置特征；

（2）指出抛物线 C 是否具有对称性；

（3）指出抛物线 C 与坐标轴是否有交点，如果有，求出交点坐标.

因为实数的平方是一个非负数，所以在方程 $y^2=2x$ 中，必有 $2x\geqslant 0$，即 $x\geqslant 0$. 同时，可以看出 y 能取任意实数. 由此可知，抛物线 C 位于 y 轴及 y 轴的右侧，如图 2-7-6 所示.

又因为如果(x, y)是方程 $y^2=2x$ 的一组解，则不难看出，$(x, -y)$也是方程的解，这说明抛物线关于 x 轴对称；又因为$(-x, y)$，$(-x, -y)$不一定是方程的解，这就说明抛物线不关于 y 轴对称，也不关于原点对称．这也可从图 2-7-6 中看出来．

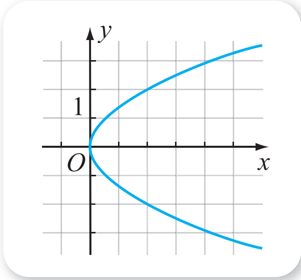


图 2-7-6

在方程 $y^2=2x$ 中，令 $y=0$，得 $x=0$；令 $x=0$，得 $y=0$．可知抛物线 C 与 x 轴、y 轴都只有一个交点，且交点都是原点$(0, 0)$．

一般地，如果抛物线 C 的标准方程是

$$y^2=2px\ (p>0), \qquad ①$$

则可以根据方程①来得到抛物线的一些几何性质．

（1）范围

由方程①可知，$2px\geqslant 0$，又因为 $p>0$，所以 $x\geqslant$ 1 ________．

因此，除顶点外，抛物线上的其余点都在 y 轴的右侧．

另外，当 x 无限增大时，$|y|$也无限增大，这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸，如图 2-7-7 所示．此时，称抛物线 C 的开口向右（或朝右）．

（2）对称性

如果(x, y)是方程①的一组解，则不难看出，$(x, -y)$也是方程的解，这说明抛物线 C 关于 x 轴对称，如图 2-7-7 所示．此时，称 x 轴是**抛物线的对称轴**（简称为**轴**）．

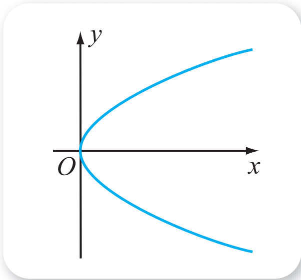


图 2-7-7

（3）顶点

在方程 $y^2=2px$ 中，令 $y=0$，得 $x=0$；令 $x=0$，得 $y=0$．可知抛物线 C 与 x 轴、y 轴都相交于原点$(0, 0)$．此时，称原点是**抛物线的顶点**．

（4）离心率

抛物线上的点到焦点的距离与到准线的距离之比称为**抛物线的离心率**，用 e 表示．根据抛物线的定义可知，抛物线的离心率

$$e=1.$$

尝试与发现

如果抛物线的标准方程是

$$y^2=-2px\ (p>0), \qquad ②$$

$$x^2=2py\ (p>0), \qquad ③$$

$$x^2=-2py\ (p>0), \qquad ④$$

那么抛物线的范围（开口方向）、对称性、顶点、离心率中，哪些与①所表示的抛物线是相同的？哪些是有区别的？

可以看出，②③④所表示的抛物线，顶点坐标、离心率与①所表示的抛物线是相同的，但是：

②所表示的抛物线中，$x\leqslant 0$，除顶点外，抛物线上的其余点都在 y 轴的**2**________，抛物线的开口向左（或朝左），抛物线关于 x 轴对称；

③所表示的抛物线中，$y\geqslant 0$，除顶点外，抛物线上的其余点都在 x 轴的**3**________，抛物线的开口向上（或朝上），抛物线关于 y 轴对称；

④所表示的抛物线中，$y\leqslant 0$，除顶点外，抛物线上的其余点都在 x 轴的**4**________，抛物线的开口向下（或朝下），抛物线关于 y 轴对称.

例 1 已知抛物线的对称轴为 x 轴，顶点是坐标原点且开口向左，又抛物线经过点 $M(-4,\ 2\sqrt{3})$，求这个抛物线的标准方程.

解 根据已知条件可设抛物线的标准方程为

$$y^2=-2px\ (p>0),$$

因为点 $M(-4,\ 2\sqrt{3})$在抛物线上，所以

$$(2\sqrt{3})^2=-2p\times(-4),$$

因此 $2p=3$.

从而可知所求方程为

$$y^2=-3x.$$

例 2 已知点 P 在抛物线 $x^2=-5y$ 上，且 $A(0,\ -3)$，求$|PA|$的最小值.

解 设点 P 的坐标为$(x,\ y)$，则 $x^2=-5y$，而且

$$\begin{aligned}|PA|^2&=x^2+(y+3)^2\\&=y^2+y+9\\&=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{35}{4},\end{aligned}$$

又因为 $y\leqslant 0$，所以 $y=$**5**________时，$|PA|^2$ 取最小值$\frac{35}{4}$.

因此所求最小值为**6**________.

例 3 已知直线 l 平行于 y 轴，且 l 与 x 轴的交点为$(4,\ 0)$，点 A 在直线 l 上，动点 P 的纵坐标与 A 的纵坐标相同，且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OP}$，求 P 点的轨迹方程，并说明轨迹方程的形状.

解 由条件可知，直线 l 的方程为 $x=4$，因此点 A 的横坐标为 4.

设 P 的坐标为$(x,\ y)$，则点 A 的坐标为$(4,\ y)$．因此

$$\overrightarrow{OA}=(4,\ y),\ \overrightarrow{OP}=\boxed{7}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

因为 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OP}$ 的充要条件是 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$，所以 $4x+y^2=0$，即动点 P 的轨迹方程为

$$y^2=-4x.$$

从而可以看出，轨迹是开口向左的抛物线.

2. 用信息技术作出抛物线以及研究抛物线的性质

根据抛物线的方程，利用计算机软件，可以方便地作出抛物线，并研究抛物线的性质.

例如，在 GeoGebra 中，输入“x^2=-5y”就可以得到 $x^2=-5y$ 对应的抛物线；再指定 $A(0,\ -3)$，并在抛物线上任取一点 B，构造线段 AB，就可以显示出线段 AB 的长，让点 B 沿抛物线运动，则可以观察出线段 AB 的变化情况，如图 2-7-8 所示. 有兴趣的读者可以结合课件“抛物线及其性质.ggb”进行观察.

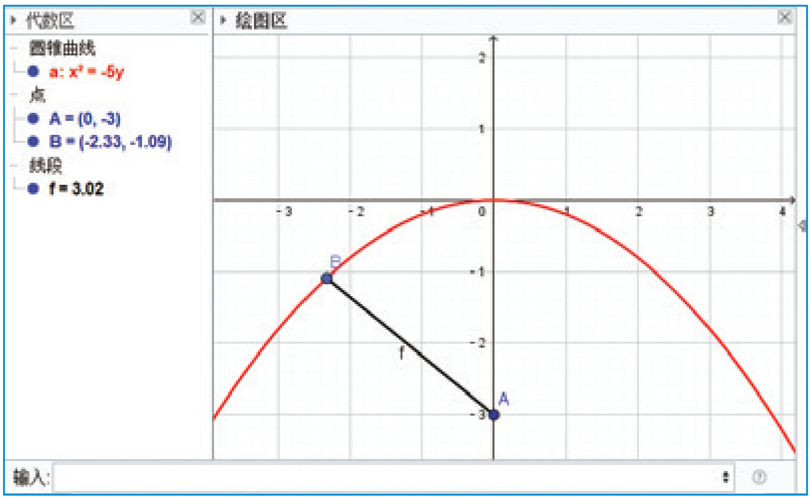


图 2-7-8

练习A

1. 已知抛物线 $y=4x^2$ 上的一点 M 的纵坐标为 1，求点 M 到焦点的距离.
2. 求抛物线 $y^2=8x$ 的焦点到直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 的距离.
3. 若抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的右焦点重合，求 p 的值.
4. 已知正三角形 AOB 的顶点 A，B 在抛物线 $y^2=6x$ 上，O 是坐标原点，求 $\triangle AOB$ 的边长.

5 求下列方程表示的抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1) $y^2-6x=0$； (2) $x^2+10y=0$；

(3) $y=\frac{3}{8}x^2$； (4) $ax+y^2=0$ $(a\neq 0)$.

6 设抛物线 $y^2=8x$ 上一点 P 到 y 轴的距离是 4，求点 P 到该抛物线焦点的距离.

练习B

1 已知抛物线的顶点在坐标原点，对称轴是坐标轴，且过点 $P(-2,\ 2\sqrt{2})$，求抛物线的标准方程.

2 若抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$上一点 M 到焦点 F 的距离 $|MF|=2p$，求点 M 的坐标.

3 从抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$上各点向 x 轴作垂线段，求垂线段中点的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线.

4 已知抛物线的顶点是坐标原点 O，对称轴为 x 轴，焦点为 F，抛物线上的点 A 的横坐标为 2，且 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{OA}=16$，求此抛物线的方程.

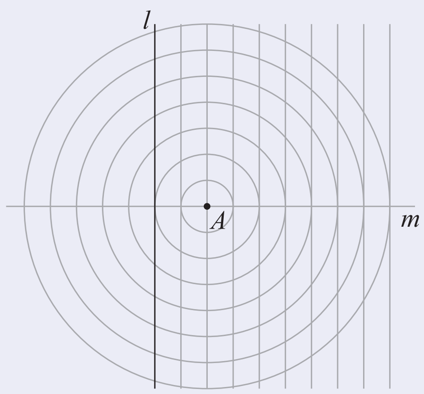
5 已知抛物线 $y^2=16x$ 和点 $A(4,\ 0)$，点 M 在此抛物线上运动，求点 M 到点 A 的距离的最小值，并指出取得最小值时点 M 的坐标.

6 设抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$上一点 M 的横坐标为 x_0，证明 M 到抛物线焦点的距离为 $x_0+\frac{p}{2}$，并总结出关于抛物线其他形式的标准方程的类似结论.

1 0 2 左侧 3 上方 4 下方 5 $-\frac{1}{2}$ 6 $\frac{\sqrt{35}}{2}$ 7 $(x,\ y)$

习题2-7A

1 如图，l 是平面上一条直线，A 在与 l 垂直的直线 m 上，且 A 到 l 的距离为 2，图中的圆是以 A 为圆心的一组同心圆，它们的半径分别为 1，2，3，…，除直线 m 外，图中的直线都是与直线 m 垂直的，相邻两直线之间的距离为 1. 在图中直线与圆的交点中，找出到点 A 与到直线 l 距离相等的点，并把这些点用光滑的曲线顺次连接起来，观察所得曲线的形状.



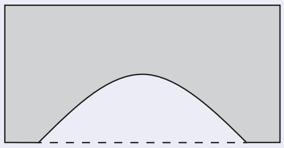
（第 1 题）

2. 已知动点 P 到点 $F(2, 0)$ 的距离与它到直线 $x+2=0$ 的距离相等，求点 P 的轨迹方程.

3. 若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的准线经过双曲线 $x^2-y^2=1$ 的一个焦点，求 p 的值.

4. 已知抛物线 $y=4x^2$ 上的一点 M 到焦点的距离为 1，求点 M 的纵坐标.

5. 如图是一座抛物线型拱桥示意图，拱桥是抛物线的一部分且以抛物线的轴为对称轴，已知顶点距离水面 4 m 时，量得水面宽 12 m，那么当水位升高 1 m 时水面的宽为多少？



（第 5 题）

6. 已知抛物线 C：$y^2=x$ 的焦点为 F，且 $A(x_0, y_0)$是 C 上一点，$|AF|=\frac{5}{4}x_0$，求 x_0.

7. 过抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点 F 的直线与抛物线相交于 A，B 两点，从 A，B 向抛物线的准线作垂线，垂足分别为 A_1，B_1，求证：$\angle A_1FB_1=\frac{\pi}{2}$.

习题2-7B

1. 已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，求 $|QF|$.

2. 已知 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点，A，B 是该抛物线上的两点，$|AF|+|BF|=3$，求线段 AB 的中点到 y 轴的距离.

3. 设抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，点 M 在 C 上，$|MF|=5$. 若以 MF 为直径的圆过点(0，2)，求 C 的方程.

4. 求抛物线 $x^2=2y$ 上到点 $M(0, 2)$距离最近的点的坐标.

5. 已知点 P 是抛物线 $y=x^2$ 上到直线 $2x-y-4=0$ 的距离最短的点，求 P 点的坐标.

习题2-7C

1. 已知抛物线 $y^2=4x$，且 P 是抛物线上一点：

(1) 设 F 为抛物线的焦点，$A(6, 3)$，求 $|PA|+|PF|$ 的最小值，并求出取得最小值时点 P 的坐标；

(2) 设 M 的坐标为$(m, 0)$，求 $|PM|$ 的最小值（用 m 表示），并求出取得最小值时点 P 的坐标.

2. 已知抛物线的顶点在原点，焦点为 $F(-3, 0)$，设点 $A(a, 0)$到抛物线上的点的距离的最小值为 $f(a)$，求 $f(a)$的表达式.

2.8 直线与圆锥曲线的位置关系

我们知道，通过直线的方程、圆的方程可以探讨直线与直线、直线与圆、圆与圆的位置关系的问题，而且这些问题都可以转化为方程组的解的问题．类似地，因为平面直角坐标系中的点在椭圆、双曲线、抛物线上的充要条件是点的坐标满足对应的方程，所以我们同样可以通过方程组的解的问题来探讨直线与这些曲线的位置关系的问题.

例 1 判断直线 $y=2x-2$ 与椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 是否有公共点．如有，求出公共点的坐标，如公共点有两个，求出以这两个公共点为端点的线段长.

尝试与发现

你认为应该怎样来判断直线与椭圆是否有公共点？如果有两个公共点，应该怎样求得对应线段的长？

解 联立直线与椭圆的方程，可得方程组

$$\begin{cases} y=2x-2, \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$$

解方程组可得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=-2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=\frac{5}{3}, \\ y=\frac{4}{3}, \end{cases}$$

因此直线与椭圆有两个公共点，且公共点的坐标为(0，−2)，1 ________.

从而可知所求线段长为

$$\sqrt{\left(\frac{5}{3}-0\right)^2+\left[\frac{4}{3}-(-2)\right]^2}=\frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

例 2 已知直线 l：$y=2x+m$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，分别求直线 l 与椭圆 C 有两个公共点、只有一个公共点和没有公共点时 m 的取值范围.

人民教育出版社

解　联立直线 l 的方程与椭圆 C 的方程得方程组

$$\begin{cases} y=2x+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1, \end{cases}$$

消去 y，整理得

$$9x^2+8mx+2m^2-4=0, \qquad ①$$

因为①的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta &=(8m)^2-4\times9\times(2m^2-4)=-8m^2+144\\ &=-8(m+3\sqrt{2})(m-3\sqrt{2}),\end{aligned}$$

所以：

当 $\Delta>0$ 即 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$ 时，方程①有两个不同的实数解，此时原方程组的实数解集中有两个元素，直线 l 与椭圆 C 有两个公共点；

当 $\Delta=0$ 即 2 ________ 时，方程①有两个相等的实数解，此时原方程组的实数解集中只有一个元素，直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点；

当 $\Delta<0$ 即 $m<-3\sqrt{2}$ 或 $m>3\sqrt{2}$ 时，方程①无实数解，此时原方程组的实数解集为空集，直线 l 与椭圆 C 没有公共点.

习惯上，当直线与椭圆有两个公共点时，称直线与椭圆相交；当直线与椭圆有且只有一个公共点时，称直线与椭圆相切；当直线与椭圆没有公共点时，称直线与椭圆相离. 如图 2-8-1 所示的图中，l_1 与椭圆相交，l_2 与椭圆相切，l_3 与椭圆相离.

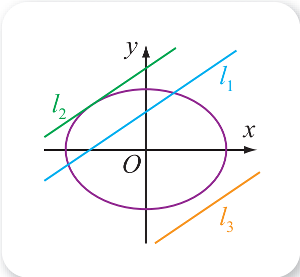


图 2-8-1

例 3　判断直线 l：$y=x+1$ 与双曲线 C：$x^2-y^2=1$ 是否有公共点. 如果有，求出公共点的坐标.

解　联立直线与双曲线的方程，可得方程组

$$\begin{cases} y=x+1, \\ x^2-y^2=1, \end{cases}$$

消去 y，可得 $x^2-(x+1)^2=1$，由此可解得 $x=-1$. 此时，$y=0$.

因此直线与双曲线有一个公共点，且公共点的坐标为 3 ________.

如图 2-8-2 所示是例 3 中的直线与双曲线，图中还作出了双曲线的渐近线. 从图中可以看出，直线 l 与双曲线 C 相交于双曲线的左顶点. 此时，虽然直线 l 与双曲线 C 只有一个公共点，但并不给人以“相切”的形象.

一般地，给定直线 l 与圆锥曲线 C（圆、椭圆、双曲线、抛物线），如果联立它们的方程并消去一个未知数后，得到的是一个一元二次方程且该方

人民教育出版社

程只有一个实数解（即有两个相等的实数解），则称直线与圆锥曲线**相切**.

由定义可知，例 3 中的直线与双曲线不相切，而且可以看出，直线与圆、直线与椭圆只有一个公共点是直线与它们相切的充要条件；但直线与双曲线、直线与抛物线只有一个公共点不是直线与它们相切的充分条件.

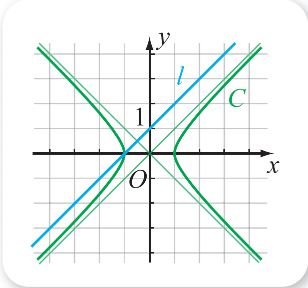


图 2-8-2

例 4 已知点 $A(0,\ 2)$ 和抛物线 C：$y^2=6x$，求过点 A 且与抛物线 C 相切的直线 l 的方程.

解 当直线 l 的斜率不存在时，由直线 l 过点 $A(0,\ 2)$ 可知，直线 l 就是 y 轴，其方程为 $x=0$.

由

$$\begin{cases} x=0, \\ y^2=6x \end{cases}$$

消去未知数 x 得 $y^2=0$. 这是一个一元二次方程且只有唯一的实数解，所以直线 $x=0$ 与抛物线 C 相切.

如果直线 l 的斜率存在，则设直线 l 的方程为 $y=kx+2$.

由方程组

$$\begin{cases} y=kx+2, \\ y^2=6x \end{cases}$$

消去 x，整理得 $ky^2-6y+12=0$. 为了使得这个方程是一元二次方程且只有一个实数解，必须有

$$k\neq 0 \text{ 且 } (-6)^2-4\times 12k=0,$$

因此可解得 $k=\dfrac{3}{4}$.

此时直线 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{4}x+2$，即 $3x-4y+8=0$.

综上可知，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $3x-4y+8=0$.

一般地，直线与圆锥曲线有两个公共点时，则以这两个公共点为端点的线段称为圆锥曲线的一条弦，线段的长就是弦长. 简单地说，圆锥曲线的弦就是连接圆锥曲线上任意两点所得的线段.

例 5 已知直线 l：$y=x-2$ 与抛物线 C：$x^2=-6y$ 相交于 A，B 两点，且 O 为坐标原点.

（1）求弦长 $|AB|$；

（2）判断 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ 是否成立，并说明理由.

解 （1）设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则

$$|AB|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

因为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$都是直线 $y=x-2$ 上的点，所以

$$\begin{cases}y_1=x_1-2,\\ y_2=x_2-2,\end{cases}$$

第二式减去第一式可得 $y_2-y_1=x_2-x_1$，从而

$$|AB|^2=(x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2=2(x_2-x_1)^2.$$

又因为从方程组

$$\begin{cases}y=x-2,\\ x^2=-6y\end{cases}$$

中消去 y，整理可得 $x^2+6x-12=0$，而且 x_1，x_2 是该方程的两个根，因此由韦达定理可知

$$\begin{cases}x_1+x_2=-6,\\ x_1x_2=-12,\end{cases}$$

所以

$$(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2=(-6)^2-4\times(-12)=84,$$

因此 $|AB|^2=2\times84=168$，从而可知 $|AB|=2\sqrt{42}$.

（2）设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $\overrightarrow{OA}=(x_1, y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2, y_2)$，因此

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2,$$

将 $y_1=x_1-2$，$y_2=x_2-2$ 代入上式可得

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+(x_1-2)(x_2-2)=2x_1x_2-2(x_1+x_2)+4.$$

又因为由（1）可知 $x_1+x_2=$ **4** ________，$x_1x_2=$ **5** ________，所以

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\times(-12)-2\times(-6)+4=-8\neq0,$$

所以 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ 不成立.

例 5 的解法中，同以前一样，我们设了 A，B 两点的坐标，但是解题过程中并没有实际求出，因此使用的也是“设而不求”的方法. 该题当然也可以先求出 A 与 B 的坐标，然后再求弦长，并验证垂直是否成立. 请读者自行总结两种解法的区别.

拓展阅读

圆锥曲线的光学性质

你知道吗？椭圆、双曲线、抛物线这些圆锥曲线，都具有令人惊奇的光学性质，而且这些光学性质都与它们的焦点有关.

从椭圆的一个焦点处出发的光线照射到椭圆上，经反射后都通过椭圆的另一个焦点，如图 1 所示.

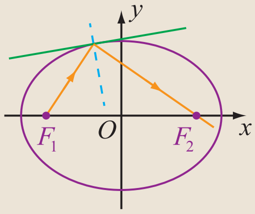


图 1

从双曲线的一个焦点处出发的光线照射到双曲线上，经反射后光线的反向延长线会经过双曲线的另一个焦点，如图 2 所示.

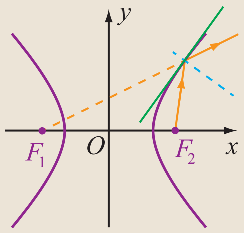


图 2

从抛物线的焦点处出发的光线照射到抛物线上，经反射后的光线平行于抛物线的轴，如图 3 所示.

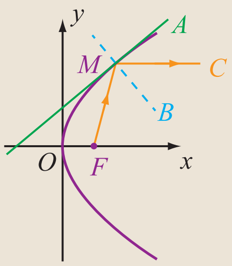


图 3

具体而言，在图 3 中，F 为抛物线的焦点，设 M 是抛物线上除顶点外一点，AM 是抛物线的切线，$MB\perp MA$，设光线 FM 在 M 处反射后的光线是 MC（即 $\angle FMB=\angle BMC$），则可以证明，MC 是平行于 x 轴的.

事实上，为了证明这个结论，我们只需证明直线 MF 的倾斜角是 AM 的倾斜角的两倍即可. 设抛物线的方程为 $y^2=2px$（$p>0$），且 $M(x_0, y_0)$，则可以算得直线 AM 的斜率为 $\dfrac{p}{y_0}$，直线 FM 的斜率为 $\dfrac{2py_0}{y_0^2-p^2}$，根据这两者之间的关系以及正切的倍角公式就可以得到结论.

圆锥曲线的这些光学性质，在日常生活和科学研究中有着广泛的应用. 例如，物理学中的凹凸透镜的表面一般都是抛物面（抛物线绕着其对称轴旋转所形成的曲面称为抛物面），2016 年 9 月 25 日落成启用的“中国天眼”——500 m 口径球面射电望远镜，反射面的主体是一个抛物面，如图 4 所示.

图 4

类似的应用还有很多，感兴趣的同学请利用网络进行搜索吧！

习题2-8A

1. 判断直线 $y=-2x+4$ 与抛物线 $y^2=4x$ 是否有公共点．如有，求出公共点的坐标，如公共点有两个，求出以这两个公共点为端点的线段长．

2. 已知直线 $x-2y+2=0$ 与椭圆 $x^2+4y^2=4$ 相交于 A，B 两点，求线段 AB 的长．

3. 举例说明，直线与抛物线只有一个公共点不是它们相切的充分条件．

4. 已知直线 l：$y=kx+2$ 和椭圆 C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$．分别求直线 l 与椭圆 C 有两个公共点、只有一个公共点和没有公共点时 k 的取值范围．

5. 如果直线 $y=kx-1$ 与双曲线 $x^2-y^2=4$ 没有公共点，求 k 的取值范围．

6. 过原点的直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 相交于两点，求 l 的斜率的取值范围．

7. 求圆心在抛物线 $y^2=2x$ 上且与 x 轴和该抛物线的准线都相切的圆的方程．

8. 已知抛物线 $y^2=4x$ 与过其焦点的斜率为 1 的直线交于 A，B 两点，O 为坐标原点，求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$．

9. 过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点的一条直线与抛物线相交，且两个交点的纵坐标为 y_1，y_2，求证：$y_1y_2=-p^2$．

习题2-8B

1. 已知斜率为 2 的直线 AB 过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，求弦 AB 的长．

2. 已知直线 l：$y=x-3$ 与抛物线 C：$x^2=-8y$ 相交于 A，B 两点，且 O 为坐标原点．

   (1) 求弦长 $|AB|$ 以及线段 AB 的中点坐标；

   (2) 判断 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ 是否成立，并说明理由．

3. 已知直线 l 的斜率与双曲线 C 的渐近线的斜率相等，求证：直线 l 与双曲线 C 最多只有一个公共点．

4. 求过点 $A(0,\ p)$ 且与抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 只有一个公共点的直线的方程．

5. 已知斜率为 2 的直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A，B 两点，如果线段 AB 的长等于 5，求直线 l 的方程．

6. 过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点 F 的一条直线与此抛物线相交于 A，B 两点，已知 $A(8,\ 8)$，求线段 AB 的中点到抛物线准线的距离．

人民教育出版社

7. 垂直于 x 轴的直线与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A，B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{3}$，求直线 AB 的方程.

8. 过抛物线的焦点的一条直线与它交于 P，Q 两点，过点 P 和此抛物线顶点的直线与抛物线的准线交于点 M，求证：直线 MQ 平行于此抛物线的对称轴.

9. 过抛物线的焦点 F 的一条直线与此抛物线相交于 P_1，P_2 两点. 求证：以 P_1P_2 为直径的圆与该抛物线的准线相切.

10. 设抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 且斜率为 1 的直线 l 与 C 相交于 A，B 两点，求过点 A，B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

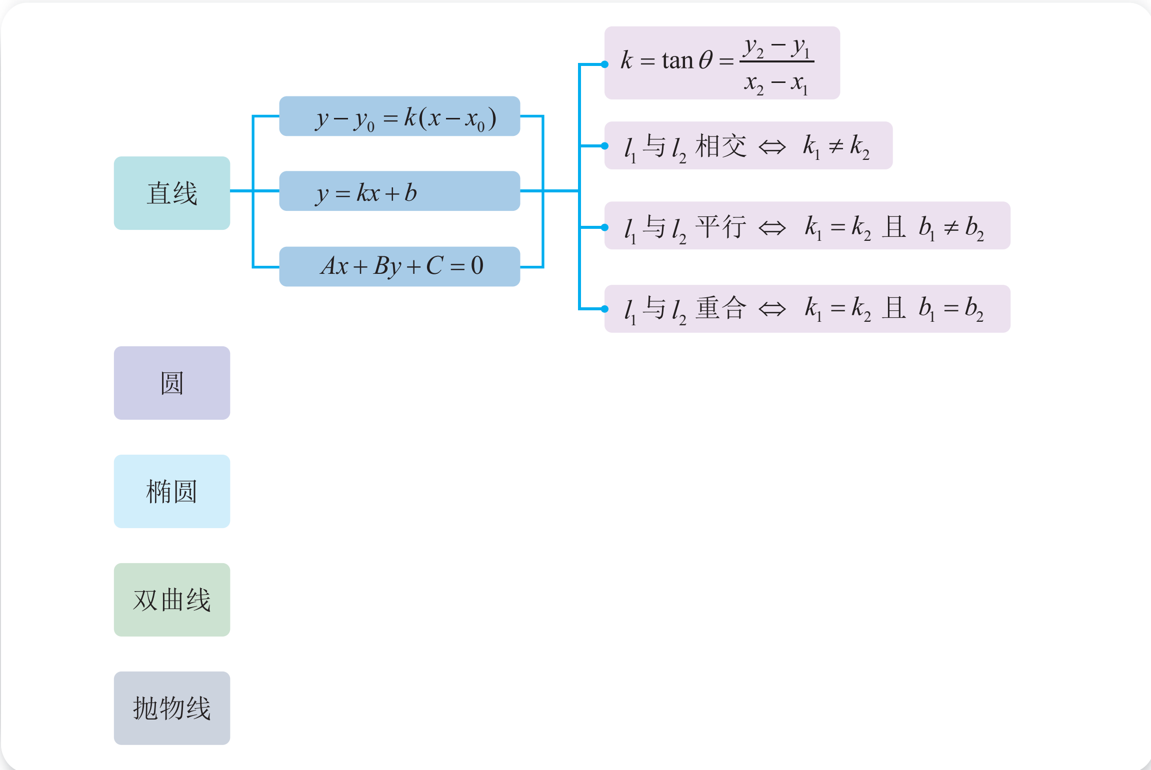
1 $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$　2 $m=\pm 3\sqrt{2}$　3 $(-1, 0)$　4 -6　5 -12

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们主要学习了平面上直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线等几何对象及其方程，并利用它们的方程研究了它们的性质与关系等.

依照知识之间的联系，我们可以作出如下的知识结构图.



请依据自己的理解，在知识结构图上补充更多的内容吧！你能作出其他形式的知识结构图吗？

02 课题作业

几何学的有关知识，早在公元前就已经出现. 然而，平面解析几何的出现与发展，却是十七世纪以来的事情. 但是，平面解析几何的出现，极大地促进了几何学的发展. 在平面解析几何的发展过程中，很多著名数学家都作出了卓越的贡献，例如笛卡儿、费马等. 请与其他同学合作，查阅有关历史资料，总结平面解析几何

发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件以及其对人类文明的贡献，并写成小论文，与其他同学一起交流分享.

03 复习题

A 组

1. 求下列直线的方程：

(1) 通过 $A(2, 3)$，$B(-1, -2)$的直线；

(2) 通过 $M(4, 5)$，$B(0, 0)$的直线；

(3) 在 x 轴上的截距是-2，在 y 轴上的截距是-5 的直线；

(4) 在 x 轴与 y 轴上的截距都是$-\frac{1}{2}$的直线.

2. 分别求经过点 $A(2, 1)$且与直线 $x+3y-3=0$ 平行、垂直的直线的一般式方程.

3. 求与直线 $x-y-2=0$ 平行且与它的距离为 $2\sqrt{2}$ 的直线的方程.

4. 判断命题“如果直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距分别为 a，b 且 $a\neq 0$，则 l 的斜率是$\frac{b}{a}$”的真假.

5. 求下列各点关于直线 $y=x$ 对称的点的坐标：$A(2, 1)$，$B(-5, -1)$，$C(3, -2)$，$D(-3, 4)$.

6. 求半径为 5，过点$(1, 2)$且与 x 轴相切的圆的方程.

7. 分别判断点 $A(1, 1)$，$B(-1, 1)$，$C(-1, -1)$，$D(1, -1)$是否在方程 $x^2+2xy+y^2-4=0$ 的曲线上.

8. 已知等腰三角形的顶点坐标为 $A(0, 3)$，$B(-2, 0)$，$C(2, 0)$，则这个三角形的中线 AO 的方程是 $x=0$ 吗？为什么？

9. 已知等腰三角形 ABC 的顶点是 $A(4, 2)$，底边的一个端点是 $B(3, 5)$，求另一个端点的轨迹方程.

10. 方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个根可分别作为（　　）.

(A) 椭圆和双曲线的离心率

(B) 两抛物线的离心率

(C) 椭圆和抛物线的离心率

(D) 两椭圆的离心率

11. 曲线$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$与曲线$\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$ $(k<9)$的（　　）.

(A) 长轴长相等　　(B) 焦距相等

(C) 离心率相等　　(D) 短轴长相等

12. 与两圆 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切的圆的圆心在（　　）.

(A) 一个椭圆上　　(B) 双曲线的一支上

(C) 一条抛物线上　　(D) 一个圆上

13. 已知$\triangle ABC$的三边 AB，BC，CA 满足

$$2|BC|=|AB|+|CA|,\quad |AB|>|CA|,$$

且 $B(-1, 0)$，$C(1, 0)$，求点 A 的轨迹方程，并说明它是什么曲线.

14. 若方程$(3-a)x^2+(a+1)y^2+a^2-2a-3=0$是双曲线的方程，求实数 a 的取值范围.

15. 已知双曲线的离心率等于$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，且双曲线与椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$有公共焦点，求此双曲线的标准方程.

16. 求与双曲线 $x^2-y^2=8$ 有相同的焦点且经过点 $P(4, 6)$的椭圆的方程.

17. 如果椭圆的一个焦点坐标为$(2, 0)$，过此焦点且垂直于 x 轴的弦的长等于$\dfrac{10}{3}$，求这个椭圆的标准方程.

18. 已知直线 $y=kx+2$ 与椭圆 $x^2+2y^2=2$ 相交于不同的两点，求 k 的取值范围.

19. 直线 l 过点 $P(2, 4)$且与抛物线 $y^2=8x$ 只有一个公共点，求直线 l 的方程.

B 组

1. 已知三条直线 $mx+2y+8=0$，$4x+3y=10$，$2x-y=10$ 相交于一点，求 m 的值.

2. 求 l_1：$2x-y+1=0$，l_2：$x+y+5=0$，l_3：$x=0$，l_4：$x=3$ 四条直线所围成的图形的面积.

3. (1) 已知直线 $3x+(1-a)y+5=0$ 与直线 $x-y=0$ 平行，求 a 的值；

(2) 已知直线$(a-4)x+y+1=0$与直线 $2x+3y+5=0$ 垂直，求 a 的值.

4. 求证：不论 λ 为何实数，直线$(2x+y-4)+\lambda(3x-2y+1)=0$恒过定点.

5. 判断命题的真假：如果 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是直线 l_1，l_2 的一个方向向量，则 l_1 与 l_2 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 垂直.

人民教育出版社

6. 光线从点 $M(-2, 3)$发出遇到 x 轴上一点 $P(1, 0)$后被 x 轴反射，求反射光线所在直线的方程.

7. 已知 $A(4, 1)$，$B(-3, 2)$，在 y 轴上求点 C，使得$\triangle ABC$ 的面积为 12.

8. 过点 $P(8, 6)$作圆 $x^2+y^2-8x+6y=0$ 的两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B，求直线 AB 的方程.

9. 已知一条曲线在 x 轴的上方，它上面的每一点到点 $A(0, 2)$的距离减去到 x 轴的距离的差都是 2，求这条曲线的方程.

10. 已知方程$\dfrac{x^2}{4-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$，讨论当 k 取不同的值时，这个方程所表示的曲线类型，并写出曲线是椭圆和双曲线时的焦点坐标.

11. 过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$的焦点的一条直线与这条抛物线相交于 A，B 两点. 求证：这两个交点到 x 轴的距离的乘积是常数.

12. 过抛物线的顶点 O 作两条互相垂直的弦 OA 和 OB. 求证：弦 AB 与抛物线的对称轴相交于定点.

13. 已知 $M(4, 2)$是直线 l 被椭圆 $x^2+4y^2=36$ 所截得的线段 AB 的中点，求直线 l 的方程.

14. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，点 A，B 分别是它的左、右顶点. 一条垂直于 x 轴的动直线 l 与椭圆相交于 P，Q 两点，当直线 l 与椭圆相切于点 A 或点 B 时，看作 P，Q 两点重合于点 A 或点 B，求直线 AP 与直线 BQ 的交点 M 的轨迹方程.

15. 已知直线 $y=x+m$ 与椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 A，B 两点，当 m 变化时，求$|AB|$的最大值.

16. 已知直线 $y=ax+1$ 与双曲线 $3x^2-y^2=1$ 相交于 A，B 两点，O 为坐标原点. 如果 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，求 a 的值.

17. 已知抛物线 C 的顶点在原点，对称轴是 x 轴，它的弦 PQ 所在直线的方程为 $y=2x+1$，弦长等于$\sqrt{15}$，求抛物线 C 的标准方程.

18. 过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$的焦点 F 作倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$的直线 l，且 l 交抛物线于 A，B 两点，点 A 在 x 轴的上方，求$\dfrac{|AF|}{|BF|}$的值.

19. 已知双曲线 $2x^2-y^2=2$，它的弦 PQ 的长是实轴长的 2 倍，如果弦 PQ 所在的直线 l 过点 $A(\sqrt{3}, 0)$，求直线 l 的方程.

20. 求双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$上任意一点$M$到两条渐近线的距离的乘积，并把结论推广到一般的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）.

21. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_1$的直线与双曲线的左支相交于$A$，$B$两点，如果$|AF_2|+|BF_2|=2|AB|$，求$|AB|$.

22. 已知抛物线$y^2=4x$的弦AB经过它的焦点F，弦AB的长为20，求直线AB的方程.

23. 设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），斜率为1的直线不经过坐标原点$O$，而且与椭圆相交于$A$，$B$两点，$M$为线段$AB$的中点. 直线$AB$与$OM$能否垂直？证明你的结论.

24. 设A，B分别是直线$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x$和$y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x$上的动点，且$|AB|=2\sqrt{5}$，设O为坐标原点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，求动点$P$的轨迹方程.

25. 已知椭圆的中心是坐标原点O，它的短轴长为$2\sqrt{2}$，一个焦点F的坐标为$(c,\ 0)$（$c>0$），点M的坐标为$\left(\frac{10}{c}-c,\ 0\right)$，且$|OF|=2|FM|$.

（1）求椭圆的方程及离心率；

（2）如果过点M的直线与椭圆相交于点P，Q两点，且$OP\perp OQ$，求直线PQ的方程.

C 组

1. 已知点$A(1,\ 4)$，$B(3,\ 1)$，直线l：$y=ax+2$与线段AB有交点，求l的斜率的取值范围.

2. 直线l经过已知点$P(2,\ -3)$，且被两条已知直线$3x+y-2=0$，$x+5y+10=0$截得的线段恰以P为中点，求直线l的方程.

3. 证明下述命题，并给出结论的几何解释：

（1）如果$A(x_0,\ y_0)$关于直线l：$y=x+b$的对称点为B，则B的坐标为$(y_0-b,\ x_0+b)$；

（2）如果$A(x_0,\ y_0)$关于直线l：$y=-x+b$的对称点为B，则B的坐标为$(-y_0+b,\ -x_0+b)$.

人民教育出版社

4. 已知 $A(2,1)$关于直线 l：$3x+2y+5=0$ 的对称点为 B，求点 B 的坐标.

5. 设圆 C 满足条件：截 y 轴所得的弦长为 2；被 x 轴分成两段的圆弧，其弧长的比为 $3:1$；圆心到直线 $x-2y=0$ 的距离为$\frac{\sqrt{5}}{5}$. 求圆 C 的方程.

6. 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的中心作一条直线交椭圆于 P，Q 两点，F 是椭圆的一个焦点，求$\triangle PFQ$ 的周长的最小值.

人民教育出版社

后 记

本套教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组依据教育部《普通高中数学课程标准（2017年版）》编写的，2019年经国家教材委员会专家委员会审核通过.

本套教科书的编写，集中反映了我国十余年来普通高中课程改革的成果，吸取了2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的编写经验，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教材编写专家、教研人员和一线教师，以及教材设计装帧专家的集体智慧.

我们衷心感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的所有编写人员，尤其是因为种种原因未能参加此次教材修订的专家、学者：丁尔陞、江守礼、房良孙、张润琦、高尚华、万庆炎、魏榕彬、邱万作、陈研、段发善、李沍岸、陈亦飞、刘长明、郭鸿、王池富……

本套教科书在编写过程中，得到了《普通高中数学课程标准（2017年版）》制定组、国家教材委员会专家委员会等的大力支持. 借此机会，向所有制定组成员、专家委员会成员以及其他为我们教材编写提供过帮助的专家表示衷心的感谢！

我们感谢所有对本套教科书的编写、出版、试教等提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友：王跃飞、胡细宝、邵丽云、王晓声、曹付生、侯立伟、王中华、王光图、王秀梅、卞文、邓艳强、田媛、史洪波、付一博、吕希、吕晶、朱明鲜、刘超、闫旭、池洪清、阮征、孙国华、牟柏林、李刚、李广勤、李洪岩、何艳国、张伟、张羽、张明、张文刚、张春青、张晶强、金永涛、郑继平、常丽艳、潘戈、薛达志、郑海军、赵争鸣、吴晖湘、戴莉、金盈、舒风杰、李祥广、胡文亮、王玉洁、杨长智、徐会吉、尹玉柱、尹燕花……

本套教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示衷心的感谢！同时也向为本书提供照片的单位表示感谢！

本套教科书投入使用后，我们根据各方意见作了修订，真诚希望广大师生和家长继续提出宝贵意见！

本书责任编辑：谢李杉；美术编辑：史越；插图绘制：郑海军.

联系方式

电话：010–58758997，010–58758866

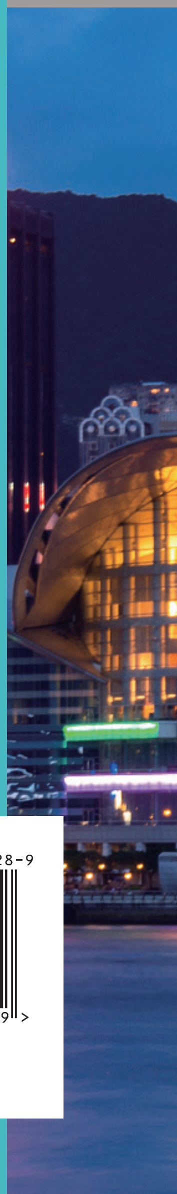
电子邮箱：mathb@pep.com.cn，jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组

PUTONG GAOZHONG JIAOKESHU

SHUXUE



中国环境标志

CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING

绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-34528-9